ROZPRAWA DOKTORSKA

Tytuł: Zastosowania multiporządku w miarowych i topologicznych działaniach grup ze średnią

Autor: mgr inż. Mateusz Więcek

Promotor: prof. dr hab. inż. Tomasz Downarowicz

Streszczenie w języku polskim

Dla klasycznych układów dynamicznych, z działaniami addytywnej grupy $\mathbb{Z}$, znana jest charakteryzacja układów topologicznych o entropii zero, jako faktorów układów, które nie posiadają par asymptotycznych. Pierwszą część tej charakteryzacji podali F. Blanchard, B. Host i S. Ruette w 2002 roku, dowodząc twierdzenia dotyczącego istnienia par asymptotycznych w każdym topologicznym układzie dynamicznym o dodatniej entropii. W 2010 roku, T. Downarowicz, i Y. Lacroix uzupełnili ten rezultat, pokazując, że każdy topologiczny układ dynamiczny o entropii zero posiada rozszerzenie nie mające par asymptotycznych. Jak dotąd, nie udało się uzyskać analogicznej charakteryzacji dla układów z działaniami innych grup niż $\mathbb{Z}$. Trudności już sprawia samo uogólnienie definicji pary asymptotycznej tak by można było ją zastosować w ogólniejszym kontekście, na przykład dla układów z działaniami przeliczalnych grup ze średnią. Dotychczas stosowane definicje, albo wymagają istnienia porządku niezmienniczego na grupie (a większość grup ze średnią takiego porządku nie posiada), albo są zbyt restrykcyjne, przez co udowodnienie wykorzystujących je analogonów Twierdzenia Blancharda-Hosta-Ruette dla szerszych klas grup, wymaga przyjęcia dodatkowych założeń, na przykład, że działanie grupy w układzie jest ekspansywne. W pierwszym rozdziale pracy, pełniącym rolę wprowadzenia, przytoczono i omówiono dotychczasowe, dostępne w literaturze, rezultaty, dotyczące istnienia par asymptotycznych w układach z działaniami grup innych niż $\mathbb{Z}$.

Niedawno wprowadzone pojęcie *multiporządku* pomaga ominąć problem związany z istnieniem porządku niezmienniczego na grupie. Multiporządek na grupie G definiuje się bowiem jako rodzinę $\tilde{\mathcal{O}}$ porządków typu $\mathbb{Z}$ (czyli izomorficznych z tradycyjnym porządkiem $<$ na $\mathbb{Z}$) na G, taką że istnieje miara ν, niesiona przez $\tilde{\mathcal{O}}$, która jest niezmiennicza na działanie grupy G. Jak się okazuje, multiporządki istnieją na każdej przeliczalnej grupie ze średnią (nawet jeżeli nie posiada ona żadnego porządku, który sam w sobie jest niezmienniczy). Umożliwiło to sformułowanie definicji par asymptotycznych, które mają zastosowanie dla działań wszystkich takich grup oraz w pełni uogólniają klasyczną definicję. Głównym celem rozprawy było uzyskanie charakteryzacji układów z działaniem przeliczalnych grup ze średnią, o entropii zero, przez kryterium istnienia par asymptotycznych, analogicznej do tej znanej dla działań $\mathbb{Z}$. Konkretnie, dążono do udowodnienia twierdzenia głoszącego, że topologiczny układ dynamiczny (X, G) z działaniem przeliczalnej grupy ze średnią G ma entropię zero wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje topologiczne rozszerzenie (Y, G) układu (X, G), takie że w Y nie ma par asymptotycznych względem żadnego porządku z pewnego multiporządku na G. Cel ten udało się zrealizować.

Właściwe rozważania w pracy rozpoczynają się od sformułowania definicji multiporządku na grupie przeliczalnej oraz omówienia jego istotnych własności. Pokazano, że dla każdej przeliczalnej grupy ze średnią G istnieje multiporządek. Udowodniono również, że każdy multiporządek $\tilde{\mathcal{O}}$ posiada tak zwaną *własność Følnera*, to znaczy, że dla prawie każdego porządku z $\tilde{\mathcal{O}}$, odcinki porządkowe o rosnących długościach tworzą ciąg Følnera. Te dwie własności oznaczają, że istnienie multiporządku na grupie przeliczalnej jest równoważne ze średniowalnością grupy. Porównano też multiporządki z ogólniejszymi *losowymi porządkami niezmienniczymi*, wprowadzonymi przez J. Kieffera w 1975 roku. Pokazano także, że multiporządek na grupie G można utożsamić z pewną rodziną bijekcji z $\mathbb{Z}$ w G.

Następnie omówiono własności układów dynamicznych, które posiadają multiporządki jako faktory teoriomiarowe. Układom takim nadano nazwę *multiuporządkowanych*. Szczególną uwagę poświęcono zachodzeniu orbitalnej równoważności między multiuporządkowanym układem (X, G) a pewnym szczególnym działaniem $\mathbb{Z}$ na X, danym przez iteracje tak zwanego *przekształcenia następnika*. Jak się bowiem okazuje, tę orbitalną równoważność można wykorzystać do pokazania wielu interesujących własności dotyczących entropii w układach multiuporządkowanych. Ich przedstawieniu i udowodnieniu poświęcony jest jeden z rozdziałów pracy. Podano w nim i udowodniono wzór na obliczanie entropii wzdłuż multiporządku. Pokazano również, że orbitalna równoważność z działaniem $\mathbb{Z}$, danym przez iteracje przekształcenia następnika, zachowuje entropię warunkową pod warunkiem multiporządku. Wynik ten wykorzystano do udowodnienia ogólniejszego Twierdzenia Rudolpha-Weissa, dotyczącego zachowywania entropii warunkowej przez orbitalną równoważność dowolnych układów z działaniami przeliczalnych grup ze średnią, posiadających wspólny faktor, niezwiązanych w żaden sposób z multiporządkami. Pokazuje to, że multiporządki mogą stanowić użyteczne narzędzie do badania ogólnych działań grup ze średnią. Na koniec udowodniono twierdzenie umożliwiające charakteryzację sigma-ciała Pinskera w układach z działaniem przeliczalnych grup ze średnią, przy pomocy multiporządku, które uogólnia klasyczne Twierdzenie Rokhlina-Sinaia.

Wykorzystując własności entropii w układach multiuporządkowanych, udowodniono jedno z dwóch głównych twierdzeń pracy, głoszące że w każdym topologicznym układzie dynamicznym (X, G) z działaniem przeliczalnej grupy ze średnią G, istnieją pary, które są asymptotyczne względem prawie każdego porządku należącego do dowolnego multiporządku $\tilde{\mathcal{O}}$ na G. Poprzedzone ono zostało sformułowaniem dwóch nowych definicji par asymptotycznych w układach z działaniami grup przeliczalnych, które w pełni uogólniają klasyczną definicję. Twierdzenie udowodnione zostało w dwóch krokach. Najpierw uzyskano wynik pośredni dotyczący jedynie układów multiuporządkowanych, a następnie wywnioskowano z niego twierdzenie zachodzące już dla dowolnych układów z działaniami grup ze średnią.

W pracy zaprezentowano również konstrukcję multiporządku pochodzącego od tak zwanego *systemu tilingów*. Sama konstrukcja poprzedzona została obszernym wstępem zaznajamiającym czytelnika z teorią tilingów oraz układów tilingów na przeliczalnych grupach ze średnią. Skonstruowane w ten sposób multiporządki posiadają dodatkowe własności topologiczne, które nie wynikają z ogólnej, wcześniej wprowadzonej definicji, a które okazały się niezbędne do udowodnienia wersji Twierdzenia Downarowicza-Lacroix dla układów z działaniami przeliczalnych grup ze średnią. Przy okazji podano również kilka konkretnych przykładów multiporządków pochodzących właśnie od systemów tilingów.

Rozprawa zwieńczona jest dowodem twierdzenia głoszącego, że każdy topologiczny układ dynamiczny z działaniem przeliczalnej grupy ze średnią G, o entropii zero, posiada rozszerzenie topologiczne, w którym nie ma par asymptotycznych względem żadnego porządku należącego do pewnego multiporządku na G (pochodzącego właśnie od sytemu tilingów). Podobnie jak przy dowodzie uogólnienia Twierdzenia Blancharda-Hosta-Ruette, najpierw dowodzi się twierdzenia słabszego, które zachodzi jedynie dla układów posiadających systemy tilingów jako faktory topologiczne i które spełniają pewne dodatkowe warunki, a następnie przy jego pomocy dowodzi się wyniku ogólnego, który zachodzi już dla dowolnych topologicznych układów dynamicznych z działaniem przeliczalnych grup ze średnią. Twierdzenie to, w połączeniu z wcześniejszym twierdzeniem dotyczącym istnienia par asymptotycznych w układach o dodatniej entropii, pozwoliło uzyskać charakteryzację układów z działaniem przeliczalnych grup ze średnią, o entropii zero, jako faktorów układów, które nie posiadają par asymptotycznych względem żadnego porządku z pewnego multiporządku, co stanowi realizację głównego celu rozprawy.