Politechnika Wrocławska

DZIEDZINA: NAUKI ŚCISŁE I PRZYRODNICZE

DYSCYPLINA: MATEMATYKA

ROZPRAWA DOKTORSKA

Zastosowania multiporządku w miarowych i topologicznych działaniach grup ze średnią

Mgr inż. Mateusz Więcek

Promotor:
prof. dr hab. inż. Tomasz Downarowicz

Słowa kluczowe: multiporządek, para asymptotyczna, entropia, układ tilingów, przeliczalne grupy ze średnią

WROCŁAW 2023

Wyrazy podziękowania kieruję do promotora –
prof. dr hab. inż. Tomasza Downarowicza
za poświęcony czas, cenne uwagi oraz
wskazówki udzielone podczas tworzenia pracy.

Streszczenie

Dla klasycznych układów dynamicznych, z działaniami addytywnej grupy $\mathbb{Z}$, znana jest charakteryzacja układów topologicznych o entropii zero, jako faktorów układów, które nie posiadają par asymptotycznych. Pierwszą część tej charakteryzacji podali F. Blanchard, B. Host i S. Ruette w 2002 roku, dowodząc twierdzenia dotyczącego istnienia par asymptotycznych w każdym topologicznym układzie dynamicznym o dodatniej entropii. W 2010 roku, T. Downarowicz, i Y. Lacroix uzupełnili ten rezultat, pokazując, że każdy topologiczny układ dynamiczny o entropii zero posiada rozszerzenie nie mające par asymptotycznych. Jak dotąd, nie udało się uzyskać analogicznej charakteryzacji dla układów z działaniami innych grup niż $\mathbb{Z}$. Trudności już sprawia samo uogólnienie definicji pary asymptotycznej tak by można było ją zastosować w ogólniejszym kontekście, na przykład dla układów z działaniami przeliczalnych grup ze średnią. Dotychczas stosowane definicje, albo wymagają istnienia porządku niezmienniczego na grupie (a większość grup ze średnią takiego porządku nie posiada), albo są zbyt restrykcyjne, przez co udowodnienie wykorzystujących je analogonów Twierdzenia Blancharda-Hosta-Ruette dla szerszych klas grup, wymaga przyjęcia dodatkowych założeń, na przykład, że działanie grupy w układzie jest ekspansywne. W pierwszym rozdziale pracy, pełniącym rolę wprowadzenia, przytoczono i omówiono dotychczasowe, dostępne w literaturze, rezultaty, dotyczące istnienia par asymptotycznych w układach z działaniami grup innych niż $\mathbb{Z}$.

Niedawno wprowadzone pojęcie *multiporządku* pomaga ominąć problem związany z istnieniem porządku niezmienniczego na grupie. Multiporządek na grupie G definiuje się bowiem jako rodzinę $\tilde{\mathcal{O}}$ porządków typu $\mathbb{Z}$ (czyli izomorficznych z tradycyjnym porządkiem $<$ na $\mathbb{Z}$) na G, taką że istnieje miara ν, niesiona przez $\tilde{\mathcal{O}}$, która jest niezmiennicza na działanie grupy G. Jak się okazuje, multiporządki istnieją na każdej przeliczalnej grupie ze średnią (nawet jeżeli nie posiada ona żadnego porządku, który sam w sobie jest niezmienniczy). Umożliwiło to sformułowanie definicji par asymptotycznych, które mają zastosowanie dla działań wszystkich takich grup oraz w pełni uogólniają klasyczną definicję. Głównym celem rozprawy było uzyskanie charakteryzacji układów z działaniem przeliczalnych grup ze średnią, o entropii zero, przez kryterium istnienia par asymptotycznych, analogicznej do tej znanej dla działań $\mathbb{Z}$. Konkretnie, dążono do udowodnienia twierdzenia głoszącego, że topologiczny układ dynamiczny (X, G) z działaniem przeliczalnej grupy ze średnią G ma entropię zero wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje topologiczne rozszerzenie (Y, G) układu (X, G), takie że w Y nie ma par asymptotycznych względem żadnego porządku z pewnego multiporządku na G. Cel ten udało się zrealizować.

Właściwe rozważania w pracy rozpoczynają się od sformułowania definicji multiporządku na grupie przeliczalnej oraz omówienia jego istotnych własności. Pokazano, że dla każdej przeliczalnej grupy ze średnią G istnieje multiporządek. Udowodniono również, że każdy multiporządek $\tilde{\mathcal{O}}$ posiada tak zwaną *własność Følnera*, to znaczy, że dla prawie każdego porządku z $\tilde{\mathcal{O}}$, odcinki porządkowe o rosnących długościach tworzą ciąg Følnera. Te dwie własności oznaczają, że istnienie multiporządku na grupie przeliczalnej jest równoważne ze średniowalnością grupy. Porównano też multiporządki z ogólniejszymi *losowymi porządkami niezmienniczymi*, wprowadzonymi przez J. Kieffera w 1975 roku. Pokazano także, że multiporządek na grupie G można utożsamić z pewną rodziną bijekcji z $\mathbb{Z}$ w G.

Następnie omówiono własności układów dynamicznych, które posiadają multiporządki jako faktory teoriomiarowe. Układom takim nadano nazwę *multiuporządkowanych*. Szczególną uwagę poświęcono zachodzeniu orbitalnej równoważności między multiuporządkowanym układem (X, G) a pewnym szczególnym działaniem $\mathbb{Z}$ na X, danym przez iteracje

tak zwanego *przekształcenia następnika*. Jak się bowiem okazuje, tę orbitalną równoważność można wykorzystać do pokazania wielu interesujących własności dotyczących entropii w układach multiuporządkowanych. Ich przedstawieniu i udowodnieniu poświęcony jest jeden z rozdziałów pracy. Podano w nim i udowodniono wzór na obliczanie entropii wzdłuż multiporządku. Pokazano również, że orbitalna równoważność z działaniem $\mathbb{Z}$, danym przez iteracje przekształcenia następnika, zachowuje entropię warunkową pod warunkiem multiporządku. Wynik ten wykorzystano do udowodnienia ogólniejszego Twierdzenia Rudolpha-Weissa, dotyczącego zachowywania entropii warunkowej przez orbitalną równoważność dowolnych układów z działaniami przeliczalnych grup ze średnią, posiadających wspólny faktor, niezwiązanych w żaden sposób z multiporządkami. Pokazuje to, że multiporządki mogą stanowić użyteczne narzędzie do badania ogólnych działań grup ze średnią. Na koniec udowodniono twierdzenie umożliwiające charakteryzację sigma-ciała Pinskera w układach z działaniem przeliczalnych grup ze średnią, przy pomocy multiporządku, które uogólnia klasyczne Twierdzenie Rokhlina-Sinaia.

Wykorzystując własności entropii w układach multiuporządkowanych, udowodniono jedno z dwóch głównych twierdzeń pracy, głoszące że w każdym topologicznym układzie dynamicznym (X, G) z działaniem przeliczalnej grupy ze średnią G, istnieją pary, które są asymptotyczne względem prawie każdego porządku należącego do dowolnego multiporządku $\tilde{\mathcal{O}}$ na G. Poprzedzone ono zostało sformułowaniem dwóch nowych definicji par asymptotycznych w układach z działaniami grup przeliczalnych, które w pełni uogólniają klasyczną definicję. Twierdzenie udowodnione zostało w dwóch krokach. Najpierw uzyskano wynik pośredni dotyczący jedynie układów multiuporządkowanych, a następnie wywnioskowano z niego twierdzenie zachodzące już dla dowolnych układów z działaniami grup ze średnią.

W pracy zaprezentowano również konstrukcję multiporządku pochodzącego od tak zwanego *systemu tilingów*. Sama konstrukcja poprzedzona została obszernym wstępem zaznajamiającym czytelnika z teorią tilingów oraz układów tilingów na przeliczalnych grupach ze średnią. Skonstruowane w ten sposób multiporządki posiadają dodatkowe własności topologiczne, które nie wynikają z ogólnej, wcześniej wprowadzonej definicji, a które okazały się niezbędne do udowodnienia wersji Twierdzenia Downarowicza-Lacroix dla układów z działaniami przeliczalnych grup ze średnią. Przy okazji podano również kilka konkretnych przykładów multiporządków pochodzących właśnie od systemów tilingów.

Rozprawa zwieńczona jest dowodem twierdzenia głoszącego, że każdy topologiczny układ dynamiczny z działaniem przeliczalnej grupy ze średnią G, o entropii zero, posiada rozszerzenie topologiczne, w którym nie ma par asymptotycznych względem żadnego porządku należącego do pewnego multiporządku na G (pochodzącego właśnie od sytemu tilingów). Podobnie jak przy dowodzie uogólnienia Twierdzenia Blancharda-Hosta-Ruette, najpierw dowodzi się twierdzenia słabszego, które zachodzi jedynie dla układów posiadających systemy tilingów jako faktory topologiczne i które spełniają pewne dodatkowe warunki, a następnie przy jego pomocy dowodzi się wyniku ogólnego, który zachodzi już dla dowolnych topologicznych układów dynamicznych z działaniem przeliczalnych grup ze średnią. Twierdzenie to, w połączeniu z wcześniejszym twierdzeniem dotyczącym istnienia par asymptotycznych w układach o dodatniej entropii, pozwoliło uzyskać charakteryzację układów z działaniem przeliczalnych grup ze średnią, o entropii zero, jako faktorów układów, które nie posiadają par asymptotycznych względem żadnego porządku z pewnego multiporządku, co stanowi realizację głównego celu rozprawy.

Abstract

For classical dynamical systems, with actions of an additive group $\mathbb{Z}$, there is a known characterization of zero-entropy topological dynamical systems, as factors of systems with no asymptotic pairs. One part of this characterization was given by F. Blanchard, B. Host and S. Ruette in 2002. They proved the theorem stating that asymptotic pairs exist in every topological dynamical system of positive entropy. In 2010, T. Downarowicz and Y. Lacroix completed this result by showing that every topological dynamical system of entropy zero has an extension with no asymptotic pairs. So far, no analogous characterization, for actions of groups different than $\mathbb{Z}$, has been obtained. In fact, even providing a definition of an asymptotic pair, which fully generalizes the classical one, and is valid for actions of wider classes of groups, such as countable amenable groups, turned out to be problematic. All such definitions, provided so far, either require existence of an invariant order on a group (which is not guaranteed for every countable amenable group) or they are too restrictive and proofs of any result analogous to the Blanchard-Host-Ruette Theorem, valid for wider classes of groups, require making additional assumptions, for instance that the action of group is expansive. In the introductory chapter of the dissertation, hitherto known results concerning existence of asymptotic pairs in dynamical systems with actions of groups other than $\mathbb{Z}$, were discussed.

The problem of existence of an invariant order on a group can be overcome with the aid of the recently invented notion of a *multiorder*. A multiorder on a group G is defined as a collection $\tilde{\mathcal{O}}$ of orders of type $\mathbb{Z}$ on G (i.e. orders isomorphic to the natural order $<$ on $\mathbb{Z}$), such that there exists a measure ν, supported by $\tilde{\mathcal{O}}$, which is invariant under the action of G. It turns out that multiorders exist on all countable amenable groups (even those which do not posses an order which is invariant itself). Hence, it was possible to formulate definitions of asymptotic pairs, which fully generalize the classical one and are valid for actions of countable amenable groups. The main goal of this dissertation was to obtain a characterization of topological dynamical systems with actions of countable amenable groups, of entropy zero, by the criterion of existence of asymptotic pairs, analogous to the one known for actions of $\mathbb{Z}$. Specifically, the aim was to prove the theorem stating that every topological dynamical system (X, G) with an action of a countable amenable group G, has entropy zero, if and only if there exists a topological extension (Y, G) of (X, G), such that there are no pairs in Y, which are asymptotic to any order from a certain multiorder on G. This goal was achieved

The main part of the dissertation begins with formulation of the definition of a multiorder on a countable group and discussion of its important properties. It was shown that multiorders exists on all countable amenable groups. It was also proved that every multiorder $\tilde{\mathcal{O}}$ on such group has so-called *Følner property*, i.e. for almost every order from a multiorder, order intervals of increasing lengths form a Følner sequence. These two properties show that existence of a multiorder on a countable group is equivalent to the condition that the group is amenable. Multiorders were also compared with more general *invariant random orders*, which were introduced by J. Kieffer in 1975. It was also shown that every multiorder on a group G can be represented as a certain collection of bijections from $\mathbb{Z}$ to G.

Subsequently, some properties of dynamical systems which have multiorders as their factors were discussed. Such systems were called *multiordered*. Special attention was paid to the orbital equivalence between a multiordered system (X, G) and a specific action of $\mathbb{Z}$ on X, given by the iterates of a so-called *successor map*. This equivalence can be used to

prove some interesting properties of entropy in multiordered systems. One of the chapters of the dissertation was particularly devoted to presenting and proving such properties. It starts with a formula for entropy calculated along a multiorder. Then, it was proved that the orbit equivalence with the action of $\mathbb{Z}$ given by the iterates of the successor map, preserves the conditional entropy with respect to the multiorder. This result was used to prove the more general Rudolph-Weiss Theorem concerning the preservation of conditional entropy by an orbit equivalence between any two dynamical systems with actions of countable amenable groups, which have a common factor (not necessarily being a multiorder). The chapter is concluded with a theorem which provides a characterization of a Pinsker sigma-algebra in a system with an action of a countable amenable group, using multiorders, which generalizes the classical Rokhlin-Sinai Theorem.

Properties of entropy in multiordered dynamical systems were used to prove one of the two main theorems of the dissertation, which states that in every topological dynamical system (X, G) with an action of a countable amenable group, which has positive entropy, for any multiorder $\tilde{\mathcal{O}}$ on G and almost every order from $\tilde{\mathcal{O}}$, there exist asymptotic pairs in X. It was preceded by formulations of two new definitions of asymptotic pairs in systems with actions of countable groups, which fully generalize the classical one. The theorem was proved in two steps. Firstly, a partial result, concerning only multiordered systems, was obtained. Then, the proper theorem, valid for actions of all countable amenable groups, was derived from the previous one.

In the dissertation, there was also presented a construction of a multiorder arising from a so-called *tiling system*. The construction itself was preceded by an introduction, which familiarizes the reader with the theory of tilings and systems of tilings on countable amenable groups. Such tiling-based multiorder has certain topological properties which played a crucial role in the proof of the version of Downarowicz-Lacroix Theorem for actions of countable amenable groups, and which do not stem from the general definition of a multiorder. Some examples of particular tiling-based multiorders were provided as well.

The dissertation was concluded by the proof of the theorem stating that every topological dynamical system with an action of a countable amenable group G, of entropy zero, has a topological extension which has no asymptotic pairs for any order from a certain (tiling-based) multiorder on G. Similarly as in the proof of the generalization of the Blanchard-Host-Ruette Theorem, a partial result is obtained first. It is valid only for systems which have a tiling system as their topological factor and which fulfil some additional assumptions. Then, this partial result is used to prove the proper one, valid for any topological dynamical systems with actions of countable amenable groups. By combining this theorem with the previous one concerning the existence of asymptotic pairs in any system of positive entropy, the full characterization of zero-entropy systems with actions of countable amenable groups, as factors of systems with no asymptotic pairs, was obtained. Henceforth, the main goal of the dissertation was achieved.

Spis treści

1 Wprowadzenie **9**
- 1.1 Motywacja badań i cele pracy 9
- 1.2 Główna teza pracy i plan rozprawy 13

2 Multiporządki i multiuporządkowane układy dynamiczne **15**
- 2.1 Multiporządki na grupach przeliczalnych 15
- 2.2 Multiuporządkowane układy dynamiczne i ich własności 19

3 Entropia w układach multiuporządkowanych **26**
- 3.1 Entropia teoriomiarowa dla działań przeliczalnych grup ze średnią 26
- 3.2 Entropia warunkowa wzdłuż multiporządku 27
- 3.3 Zachowywanie entropii warunkowej przez orbitalną równoważność zadaną przez multiporządek 34
- 3.4 Dowód Twierdzenia Rudolpha-Weissa przy użyciu multiporządków 36
- 3.5 Charakteryzacja sigma-ciała Pinskera procesu przy pomocy multiporządku 40

4 Pary asymptotyczne w układach z działaniem przeliczalnych grup ze średnią **44**
- 4.1 Entropia topologiczna dla działań przeliczalnych grup ze średnią 44
- 4.2 Uogólnienie Twierdzenia Blancharda-Hosta-Ruette na działania przeliczalnych grup ze średnią 46

5 Multiporządki pochodzące od systemów tilingów **50**
- 5.1 Tilingi i systemy tilingów 50
- 5.2 Multiporządki pochodzące od tilingów 52
- 5.3 Wyśrodkowane oraz hodometryczne systemy tilingów 58

6 Uogólnienie Twierdzenia Downarowicza-Lacroix na działania przeliczalnych grup ze średnią **61**
- 6.1 Rozszerzenia zerowymiarowe 62
- 6.2 Rozszerzenie topologicznego układu dynamicznego o entropii zero bez par asymptotycznych 63

Bibliografia **69**

Rozdział 1

Wprowadzenie

1.1 Motywacja badań i cele pracy

Przedmiotem zainteresowania klasycznej teorii układów dynamicznych, której największy rozwój przypadł na drugie i trzecie ćwierćwiecze ubiegłego stulecia, były działania addytywnej grupy $\mathbb{Z}$ na przestrzeniach topologicznych i miarowych. W ujęciu klasycznym, topologiczny układ dynamiczny definiuje się jako parę (X, T), gdzie X jest zwartą przestrzenią metryczną a $T : X \to X$ jest homeomorfizmem (wówczas działanie $\mathbb{Z}$ na X jest dane przez iteracje przekształcenia T, tzn. dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ mamy przyporządkowanie $n \mapsto T^n$). Teoriomiarowy układ dynamiczny definiujemy natomiast jako czwórkę (X, Σ_X, μ, T) gdzie (X, Σ_X, μ) jest przestrzenią probabilistyczną a $T : X \to X$ jest przekształceniem Σ_X-mierzalnym zachowującym miarę μ, tzn. dla każdego zbioru $A \in \Sigma_X$ mamy $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ (wówczas, podobnie jak w przypadku topologicznym, działanie $\mathbb{Z}$ na (X, Σ_X, μ) jest dane przez iteracje T). Od końca drugiej połowy ubiegłego stulecia możemy zaobserwować rosnące zainteresowanie układami dynamicznymi z działaniem grup innych niż $\mathbb{Z}$. Szczególnie interesujące w tym aspekcie są grupy ze średnią. Z jednej bowiem strony, średniowalność grupy G implikuje, że na każdej zwartej przestrzeni metrycznej X istnieje miara niezmiennicza na działanie G. Dzięki temu można było się spodziewać, że dla działań tych grup będą zachodzić związki między dynamiką topologiczną oraz teoriomiarową znane z klasycznych układów. Z drugiej strony, klasa grup ze średnią jest wystarczająco bogata by dostarczać wiele nietrywialnych przykładów grup. Należą bowiem do niej wszystkie grupy rozwiązalne (czyli również wszystkie abelowe), nilpotentne oraz grupy o wzroście podwykładniczym. Wiele wyników znanych dla klasycznych układów dynamicznych udało się uogólnić na przypadek działań grup ze średnią. Praca ta poświęcona jest w większości właśnie uogólnieniu kilku klasycznych twierdzeń na przypadek działań przeliczalnych grup ze średnią. W szczególności, naszym głównym celem będzie uzyskanie charakteryzacji układów topologicznych o entropii zero, poprzez kryterium istnienia par asymptotycznych, analogicznej do tej, która znana jest dla układów z działaniem $\mathbb{Z}$. W dalszej części pracy przez topologiczny układ dynamiczny z działaniem przeliczalnej grupy G, oznaczany przez parę (X, G), rozumieć będziemy zwartą przestrzeń metryczną X, na której G działa poprzez homeomorfizmy. Podobnie, przez teoriomiarowy układ dynamiczny z działaniem przeliczalnej grupy G, oznaczany przez czwórkę (X, Σ_X, μ, G) (czasem również przez trójkę (X, μ, G), jeżeli Σ_X wynikać będzie z kontekstu), rozumieć będziemy przestrzeń probabilistyczną (X, Σ_X, μ), na której G działa przez automorfizmy miarowe, czyli bijekcje zachowujące miarę μ.

Klasyczna definicja pary asymptotycznej ma następujące brzmienie:

Definicja 1.1.1. *Niech (X, T) będzie topologicznym układem dynamicznym. Parę różnych punktów (x, x') z X nazywamy* asymptotyczną, *jeżeli zachodzi zbieżność*

$$\lim_{n\to\infty} d_X(T^k(x), T^k(x')) = 0, \tag{1.1}$$

gdzie d_X jest metryką na X.

Przy pomocy kryterium istnienia par asymptotycznych można scharakteryzować topologiczne układy dynamiczne (z działaniem $\mathbb{Z}$) o entropii zero, jako faktory[1] układów nieposiadających par asymptotycznych. Najpierw, w 2002 roku, F. Blanchard, B. Host i S. Ruette dowiedli następującego twierdzenia:

Twierdzenie 1.1.2. *[2, Propozycja 1] Niech (X, T) będzie topologicznym układem dynamicznym o dodatniej entropii. Wówczas w (X, T) istnieją pary asymptotyczne. Co więcej, zbiór punktów należących do par asymptotycznych jest miary pełnej dla każdej ergodycznej miary[2] na X o dodatniej entropii[3].*

Następnie, w 2010 roku, T. Downarowicz i Y. Lacroix udowodnili, że każdy topologiczny układ dynamiczny (X, T) o entropii zero ma rozszerzenie (Y, S), które nie ma par asymptotycznych [12, Lemat 4.3]. Łącznie, oba rezultaty dały pełną charakteryzację układów topologicznych o entropii zero, jako faktorów układów bez par asymptotycznych, co w pracy [12] zapisano za pomocą równości

$$\mathsf{TEZ} = \mathsf{FNAP}, \tag{1.2}$$

gdzie TEZ oznacza klasę układów o topologicznej entropii zero (ang. ***T****opological* ***E****ntropy* ***Z****ero*), a FNAP klasę układów będących faktorami układów bez par asymptotycznych (ang. ***F****actors of systems with* ***N****o* ***A****symptotic* ***P****airs*).

Wymieniona wyżej charakteryzacja nie została dotąd przeniesiona na przypadek układów z działaniami innych grup niż $\mathbb{Z}$. Autorowi nie jest znany żaden odpowiednik Lematu 4.3 z [12] (dotyczący istnienia rozszerzenia bez par asymptotycznych) zachodzący dla szerszych klas grup. Znane są jednak pewne uogólnienia Twierdzenia Blancharda-Hosta-Ruette (Twierdzenia 1.1.2) oraz pokrewne rezultaty dotyczące istnienia par asymptotycznych w pewnych klasach układów topologicznych z działaniami innych grup niż $\mathbb{Z}$, o dodatniej entropii. Uogólnienia te wymagały oczywiście wprowadzenia nowych definicji asymptotyczności, pasujących do bardziej ogólnego kontekstu. Najpowszechniejsza definicja pary asymptotycznej w układzie (X, G) z działaniem grupy przeliczalnej G brzmi następująco: para różnych punktów (x, x') z X jest asymptotyczna, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór skończony $K \subset G$, taki że dla każdego $g \notin K$ zachodzi $d_X(g(x), g(x')) < \varepsilon$. Należy zauważyć, że taka definicja asymptotyczności nie uogólnia klasycznej Definicji 1.1.1,

[1] Niech (X, T) i (Y, S) będą dwoma topologicznymi układami dynamicznymi. Mówimy, że układ (X, T) jest *faktorem topologicznym* (Y, S), jeżeli istnieje ciągła surjekcja $\pi : Y \to X$, spełniająca $\pi(T(y)) = S(\pi(y))$ dla każdego $y \in Y$. Wówczas układ (Y, S) nazywamy *rozszerzeniem topologicznym* układu (X, T). Dla układów z działaniem grup innych niż $\mathbb{Z}$ definicja jest analogiczna: mówimy, że układ (X, G) jest faktorem układu (Y, G) (z działaniem tej samej grupy), jeżeli istnieje ciągła surjekcja $\pi : X \to Y$ spełniająca $\pi(g(y)) = g(\pi(y))$ dla każdego $y \in Y$ i każdego $g \in G$.

[2] Jeżeli (X, Σ_X, μ, T) jest teoriomiarowym układem dynamicznym, to miarę μ nazywamy *ergodyczną*, jeżeli dla każdego zbioru $A \in \Sigma_X$, który jest T-niezmienniczy, tzn. $T^{-1}(A) \overset{\mu}{=} A$, zachodzi $\mu(A) \in \{0, 1\}$.

[3] Na mocy zasady wariacyjnej dla entropii, entropia topologiczna układu (X, T) jest równa supremum po entropiach (teoriomiarowych) wszystkich T-niezmienniczych, ergodycznych miar borelowskich na X. Stąd, jeżeli układ topologiczny (X, T) ma entropię dodatnią, to na X istnieje T-niezmiennicza miara borelowska μ, która ma entropię dodatnią.

gdyż, w jej myśl, w klasycznym układzie dynamicznym (X, T) asymptotyczne są tylko pary punktów, które spełniają Definicję 1.1.1 zarówno dla przekształcenia T jak i dla przekształcenia odwrotnego T^{-1} (czyli są asymptotyczne zarówno „w przód” jak i „w tył”). Przez wiele lat poszukiwano analogonów Twierdzenia Blancharda-Hosta-Ruette dla tak przyjętej definicji asymptotyczności. W 1995 roku K. Schmidt pokazał, że dla każdego układu symbolicznego typu skończonego[4], z działaniem $\mathbb{Z}^d$ (nadmieńmy tu, że każdy taki układ jest ekspansywny[5]) dodatniość entropii implikuje istnienie pary różnych punktów (x, y), takich że $x_{\mathbf{m}} = y_{\mathbf{m}}$ dla wszystkich $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d$ poza co najwyżej skończonym podzbiorem $\mathbb{Z}^d$ (czyli spełniających wyżej wymienioną, nową definicję asymptotyczności dla metryki dyskretnej d_X na przestrzeni $\Lambda^{\mathbb{Z}^d}$) [28]. Później, w 1999 roku, wspólnie z D. Lindtem uzyskali podobny rezultat dla ekspansywnych działań $\mathbb{Z}^d$ na zwartych grupach abelowych [20]. Co więcej, w pracy tej podali oni również przykład układu topologicznego z nieekspansywnym działaniem $\mathbb{Z}$, o dodatniej entropii, w którym nie ma żadnych tak zdefiniowanych par asymptotycznych [20, Przykład 3.4]. Przykład ów dowodzi, że ekspansywność jest konieczna do zagwarantowania istnienia par spełniających nową definicję asymptotyczności, w układach topologicznych o dodatniej entropii, nawet w przypadku $G = \mathbb{Z}$. Wyniki K. Schmidta uogólnili następnie N.-P. Chung i H. Li [5], którzy udowodnili, że jeżeli X jest zwartą grupą abelową a G jest przeliczalną grupą prawie policykliczną[6] oraz (X, G) jest układem ekspansywnym, gdzie G działa na X przez automorfizmy grupowe, to w X istnieje para (x, x') różnych punktów, która jest asymptotyczna w myśl nowej definicji. Należy jeszcze nadmienić, że w 2019 roku, T. Meyerovitch w pracy [22] uogólnił rezultat N.-P. Chunga i H. Li, zastępując założenie o tym by X była zwartą grupą abelową, słabszym warunkiem by X była zwartą przestrzenią metryczną spełniającą tzw. *pseudo-orbit tracing property*. Podał on również przykład ekspansywnego układu (X, T) o dodatniej entropii, w którym nie istnieją pary asymptotyczne w myśl nowej definicji. Uzupełnił on tym samym przykład D. Lindta i K. Schmidta. Razem, oba te przykłady pokazują, że sama ekspansywność jest konieczna, lecz nie jest wystarczająca do istnienia par asymptotycznych w układach o dodatniej entropii. Warto tu jeszcze wspomnieć, że w układzie (X, T) z działaniem $\mathbb{Z}$, który jest ekspansywny, zawsze istnieją pary asymptotyczne w myśl klasycznej Definicji 1.1.1 i to zarówno dla T jak i dla T^{-1} (niezależnie od entropii układu), co pokazał B. F. Bryant w pracy [3].

Jak widać, do uogólnienia Twierdzenia 1.1.2 potrzeba bardziej subtelnej definicji asymptotyczności, która wykorzystywać będzie pojęcie porządku na grupie, pozwalającej na jednoznaczne zdefiniowanie „przyszłości” oraz „przeszłości”. Takie podejście można znaleźć w pracach W. Huanga, L. Xu i Y. Yi z 2014 roku [16] oraz W. Bułatka, B. Kamińskiego i J. Szymańskiego z 2016 roku [4]. W obu tych pracach przyjęto założenie, że G jest nieskończoną grupą abelową, która jest porządkowalna, czyli, że na G istnieje porządek

[4]Niech Λ będzie skończoną przestrzenią dyskretną i niech G będzie grupą przeliczalną. Na Λ^G rozważamy działanie G zadane przez przesunięcia (prawostronne): dla każdego $g \in G$ mamy $g(x(h)) = x(hg)$, gdzie $x \in X$ i $h \in G$. Jeżeli $X \subset \Lambda^G$ jest zbiorem domkniętym i niezmienniczym na takie działanie, to (X, G) nazywamy ***układem symbolicznym***. Mówimy, że układ symboliczny (X, G), gdzie $X \subset \Lambda^G$, jest ***skończonego typu***, jeżeli istnieją zbiór skończony $K \subset G$ oraz rodzina $\mathcal{L} \subsetneq \Lambda^K$, taka że dla każdego $x \in X$ oraz dla każdego $g \in G$ mamy $g(x)|_K \in \mathcal{L}$.

[5]Topologiczny układ dynamiczny (X, G) nazywamy ***ekspansywnym***, jeżeli istnieje stała $r \geq 0$, taka że dla każdej pary różnych punktów $x, x' \in X$ zachodzi $\sup_{g \in G} d_X(g(x), g(x')) \geq r$.

[6]Grupę G nazywamy ***prawie policykliczną*** (ang. *policyclic-by-finite*), jeżeli istnieje skończony ciąg podgrup $G = G_n \trianglerighteq G_{n-1} \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq G_0 = \{e\}$, taki że dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$ iloraz G_i/G_{i-1} jest albo skończony, albo cykliczny. Więcej informacji na temat grup prawie policyklicznych można znaleźć np. w [6, Rozdział 5].

liniowy $\prec$, który jest niezmienniczy w tym sensie, że dla każdego $g \in G$ zachodzi:

$$a \prec b \iff a \cdot g \prec b \cdot g \quad (a, b \in G).$$

Oba zespoły, niezależnie od siebie udowodniły, że dla każdego układu topologicznego (X, G) z działaniem takiej właśnie grupy G, który ma dodatnią entropię, istnieje w X para różnych punktów (x, x'), która jest asymptotyczna względem $\prec$, tzn. dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje element $g_0 \in G$, taki że dla każdego $g \succ g_0$ mamy $d_X(g(x), g(x')) < \varepsilon$. Rezultat ten odnosi się jednak jedynie do grup przemiennych, na których dodatkowo istnieje porządek niezmienniczy. Nie każda zaś grupa ze średnią (nawet przemienna) taki porządek posiada. Koncepcja multiporządku, która będzie zaprezentowana i omówiona w tej pracy, pozwala ominąć tę przeszkodę. Zamiast bowiem wymagać istnienia jednego porządku niezmienniczego $\prec$ na grupie, zadowolimy się rodziną porządków $\tilde{\mathcal{O}}$, która jako zbiór będzie niezmiennicza, w takim sensie, że jeżeli $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$, to dla każdego $g \in G$ istnieje w $\tilde{\mathcal{O}}$ porządek $\prec' = g(\prec)$ spełniający

$$a \prec' b \iff a \cdot g \prec b \cdot g \quad (a, b \in G).$$

Taką rodzinę $\tilde{\mathcal{O}}$, wyposażoną w miarę G-niezmienniczą i rozumianą jako teoriomiarowy układ dynamiczny, nazywać będziemy właśnie multiporządkiem. Jak się okazuje multiporządki istnieją na każdej przeliczalnej grupie ze średnią. Co więcej, multiporządki na grupach ze średnią posiadają pewne dodatkowe cechy, imitujące własności naturalnego porządku $<$ na grupie $\mathbb{Z}$.

Multiporządki posłużą nam do sformułowania nowych definicji par asymptotycznych, w pełni uogólniających klasyczną Definicję 1.1.1 oraz udowodnienia uogólnienia Twierdzenia 1.1.2 na przypadek układów z działaniami przeliczalnych grup ze średnią. Dodatkowo, wykorzystanie specyficznych multiporządków, skonstruowanych z tak zwanych systemów tilingów, umożliwi nam udowodnienie twierdzenia analogicznego do Lematu 4.3 podanego przez T. Downarowicza i Y. Lacroix. W efekcie, otrzymamy pełną charakteryzację topologicznych układów dynamicznych z działaniem przeliczalnych grup ze średnią, o entropii zero, która uogólnia równość $\mathsf{TEZ} = \mathsf{FNAP}$ z pracy [12], co stanowi główny cel rozprawy.

Innym klasycznym rezultatem, który przeniesiemy na przypadek układów z działaniami przeliczalnych grup ze średnią jest Twierdzenie Rokhlina-Sinaia, które mówi, że jeżeli (X, Σ_X, μ, T) jest teoriomiarowym układem dynamicznym, to sigma-ciało Pinskera procesu generowanego przez dowolne skończone rozbicie mierzalne $\mathcal{P}$ przestrzeni X może być utożsamione z „odległą przeszłością" (i równoważnie z „odległą przyszłością") tego rozbicia względem przekształcenia T. Udowodnimy analogiczny rezultat dla układów z działaniem grup ze średnią. Pokażemy mianowicie, że jeżeli (X, Σ_X, μ, G) jest układem z działaniem przeliczalnej grupy ze średnią i $\mathcal{P}$ jest dowolnym skończonym rozbiciem mierzalnym X, to sigma-ciało Pinskera G-procesu generowanego przez $\mathcal{P}$ można scharakteryzować następująco: zbiór A jest mierzalny względem sigma-ciała Pinskera wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego (dowolnego) multiporządku $\tilde{\mathcal{O}}$ na G i prawie każdego porządku $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$, A jest mierzalny względem odpowiednio rozumianej przeszłości (równoważnie przyszłości) $\mathcal{P}$, wyznaczonej wzdłuż $\prec$. Ten rezultat nie jest aż tak nowatorski jak twierdzenia dotyczące par asymptotycznych. Charakteryzacje sigma-ciała Pinskera uogólniające Twierdzenie Rokhlina-Sinaia dla działań grup ze średnią są już bowiem znane - jedną z nich podał np. A. Danilenko w pracy [9]. Jednakże, ponieważ w ich sformułowaniach nie wykorzystuje się porządków (a zatem nie pojawiają się w nich również pojęcia analogiczne do „odległej przeszłości" bądź „odległej przyszłości"), na pierwszy rzut oka nie przypominają one klasycznego Twierdzenia Rokhlina-Sinaia, w przeciwieństwie do naszej charakteryzacji.

Udowodnimy również kilka twierdzeń dotyczących specyficznych własności, szczególnie związanych z entropią, które posiadają multiporządki i systemy tilingów oraz układy będące ich rozszerzeniami. Mimo że twierdzenia te stanowią raczej narzędzia potrzebne do uzyskania głównych wyników przedstawionych w tej pracy, same w sobie są interesujące i mogą być wykorzystane w dowodach innych faktów dotyczących układów dynamicznych z działaniami przeliczalnych grup ze średnią, niekoniecznie związanych z multiporządkami. Przykład takiego zastosowania zostanie przedstawiony w Rozdziale 3. Mianowicie wykorzystamy twierdzenie o zachowywaniu entropii przez pewną specyficzną orbitalną równoważność zachodzącą w układach posiadających multiporządek jako faktor, do dowodu wersji dużo ogólniejszego Twierdzenia Rudolpha-Weissa, które dotyczy dowolnych układów dynamicznych (niezwiązanych z multiporządkami).

1.2 Główna teza pracy i plan rozprawy

Główną tezą pracy jest, że topologiczny układ dynamiczny z działaniem grupy ze średnią ma topologiczną entropię zero wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje jego multiuporządkowane rozszerzenie topologiczne nieposiadające par asymptotycznych (względem multiporządku).

Pominąwszy wprowadzenie, praca została podzielona na pięć głównych rozdziałów. Rozdział 2 jest poświęcony wprowadzeniu definicji multiporządku i multiuporządkowanego układu dynamicznego (układu posiadającego multiporządek jako faktor teoriomiarowy[7]) oraz zaprezentowaniu pewnych własności tych obiektów. Udowodnimy między innymi, że na każdej przeliczalnej grupie ze średnią istnieje multiporządek oraz że każdy multiporządek na grupie przeliczalnej G może być reprezentowany jako pewna rodzina bijekcji z $\mathbb{Z}$ w G. Pokażemy również, że każdy układ multiuporządkowany jest orbitalnie równoważny ze specyficznym działaniem $\mathbb{Z}$ zadanym przez tzw. *przekształcenie następnika*. Ta orbitalna równoważność okaże się być bardzo istotna w kontekście dalszych rozważań i zostanie wykorzystana w dowodach wielu twierdzeń w dalszej części pracy.

W Rozdziale 3 skupimy się na własnościach układów multiuporządkowanych dotyczących entropii. Podamy i udowodnimy wzór na obliczanie entropii w układzie multiuporządkowanym, wzdłuż multiporządku będącego jego faktorem. Pokażemy również, że orbitalna równoważność z działaniem $\mathbb{Z}$ danym przez iteracje przekształcenia następnika zachowuje entropię warunkową pod warunkiem multiporządku. Twierdzenie to okazuje się być szczególnym przypadkiem Twierdzenia Rudolpha-Weissa dotyczącego zachowywania entropii warunkowej między dwoma orbitalnie równoważnymi układami dynamicznymi o wspólnym faktorze. Jednakże, przy nieznacznej modyfikacji założeń, twierdzenie to można wywnioskować z naszego twierdzenia dotyczącego układów multiuporządkowanych. Rozdział ten zakończymy przedstawieniem charakteryzacji sigma-ciała Pinskera w układach z działaniami przeliczalnych grup ze średnią przy pomocy multiporządków. Charakteryzacja ta

[7]Niech (X, Σ_X, ν, G) i (Y, Σ_Y, μ, G) będą dwoma teoriomiarowymi układami dynamicznymi z działaniem tej samej grupy G. Mówimy, że X jest *faktorem* Y (bądź, że X jest *rozszerzeniem* Y), jeżeli istnieje mierzalna surjekcja $\pi : Y \to X$, taka że $\nu = \pi(\mu)$ oraz spełniająca $\pi(g(y)) = g(\pi(y))$ dla μ-prawie każdego $y \in Y$ oraz każdego $g \in G$. Surjekcję taką nazywać będziemy *faktor-odwzorowaniem*. Zauważmy, że ponieważ $\pi^{-1}(\Sigma_Y)$ jest pod-sigma-ciałem Σ_X, niezmienniczym na działanie G (na X), więc samo Σ_Y możemy traktować jako G-niezmiennicze sigma-ciało na X. Podobnie, z każdym G-niezmienniczym pod-sigma-ciałem Σ_X możemy związać faktor teoriomiarowy $(Y, \Sigma_Y, \mu|_{\Sigma_Y}, G)$, gdzie punkty przestrzeni Y utożsamione są z atomami Σ_Y, a faktor-odwzorowanie π polega na przypisaniu każdemu punktowi z x atomu Σ_X, do którego ten punkt należy (łatwo można sprawdzić, że takie przyporządkowanie w istocie zadaje faktor teoriomiarowy)

stanowi uogólnienie klasycznego Twierdzenia Rokhlina-Sinaia, o którym wspominaliśmy wcześniej.

Rozdział 4 rozpoczniemy od sformułowania definicji pary $\prec$-asymptotycznej oraz pary φ-asymptotycznej, które uogólniają klasyczną Definicję 1.1.1. Udowodnimy również twierdzenie dotyczące istnienia par asymptotycznych w układach topologicznych z działaniem przeliczalnych grup ze średnią, o dodatniej entropii. Twierdzenie to, będące uogólnieniem Twierdzenia Blancharda-Hosta-Ruette (Twierdzenie 1.1.2), stanowi jeden z dwóch najważniejszych wyników zaprezentowanych w tej pracy.

Rozdział 5 poświęcony jest szczególnej klasie multiporządków, które pochodzą od tzw. uporządkowanych systemów tilingów. Wpierw zaznajomimy czytelnika z samą teorią tilingów i układów tilingów na grupach ze średnią. Następnie podamy konstrukcję multiporządku przy pomocy systemu tilingu oraz udowodnimy pewne, istotne dla nas, własności, które tak skonstruowany multiporządek posiada. Zaprezentujemy również kilka przykładów multiporządków pochodzących od systemów tilingów. Na koniec wprowadzimy jeszcze dwie szczególne klasy systemów tilingów - wyśrodkowane i hodometryczne, które będą odgrywać ważną rolę w dowodach twierdzeń z kolejnego rozdziału.

Rozdział 6 rozpoczniemy od wprowadzenia definicji topologicznie multiuporządkowanego układu dynamicznego, który stanowi topologiczny odpowiednik wcześniej wprowadzonego układu multiuporządkowanego (będącego układem teoriomiarowym). Najistotniejszym elementem tego rozdziału, będącym jednocześnie jednym z dwóch głównych wyników zaprezentowanych w tej pracy, jest konstrukcja rozszerzenia bez par asymptotycznych dla dowolnego topologicznego układu z działaniem przeliczalnej grupy ze średnią, który ma entropię zero. Łącząc ten wynik z twierdzeniem udowodnionym w rozdziale trzecim, uzyskamy pełną charakteryzację topologicznych układów dynamicznych z działaniami przeliczalnych grup ze średnią, o entropii zero, która uogólnia Twierdzenie Downarowicza-Lacroix dla układów z działaniem $\mathbb{Z}$, co stanowić będzie realizację głównego celu tej rozprawy.

Rozdział 2

Multiporządki i multiuporządkowane układy dynamiczne

2.1 Multiporządki na grupach przeliczalnych

Definicja 2.1.1. *Niech G będzie zbiorem przeliczalnym*[1]*. Mówimy, że porządek liniowy $\prec$ na G jest* porządkiem typu $\mathbb{Z}$*, jeżeli nie istnieje w G element maksymalny ani minimalny względem porządku $\prec$ oraz każdy odcinek porządkowy*

$$[a,b]^{\prec} = \{g \in G : a \prec g \prec b\} \cup \{a,b\}$$

jest skończony (innymi słowy $\prec$ jest izomorficzny z naturalnym porządkiem $<$ na $\mathbb{Z}$).

Niech $\tilde{\mathcal{O}}$ będzie zbiorem wszystkich porządków typu $\mathbb{Z}$ na G. Jest to podzbiór $\{0,1\}^{G\times G}$ - przestrzeni wszystkich relacji na G. Zatem $\tilde{\mathcal{O}}$ dziedziczy z $\{0,1\}^{G\times G}$ topologię, która jest metryzowalna i ośrodkowa. Ponadto łatwo można sprawdzić, że $\tilde{\mathcal{O}}$ jest niepustym i borelowskim[2] podzbiorem $\{0,1\}^{G\times G}$.

Jeżeli G jest grupą przeliczalną, to możemy rozważyć następujące działanie G na $\tilde{\mathcal{O}}$: dla każdego $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$ i każdego $g \in G$ porządek $\prec' = g(\prec)$ jest zadany wzorem

$$a \prec' b \iff ag \prec bg \qquad (a,b \in G) \tag{2.1}$$

(jak można łatwo sprawdzić, $\prec'$ również jest porządkiem typu $\mathbb{Z}$ na G).

Definicja 2.1.2. *Niech G będzie grupą przeliczalną. Niech $\tilde{\mathcal{O}}$ będzie zbiorem wszystkich porządków typu $\mathbb{Z}$ na G, niech $\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}$ będzie sigma-ciałem borelowskim na $\tilde{\mathcal{O}}$ i niech ν będzie borelowską miarą probabilistyczną niesioną przez $\tilde{\mathcal{O}}$, niezmienniczą na działanie G zadane przez* (2.1)*. Teoriomiarowy układ dynamiczny $(\tilde{\mathcal{O}}, \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}, \nu, G)$ nazywamy* multiporządkiem *na G.*

Dla skrócenia zapisu, zazwyczaj będziemy pomijać sigma-ciało w oznaczeniu multiporządku i będziemy pisać krócej $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$, a nawet tylko $\tilde{\mathcal{O}}$, jeżeli nie będzie to prowadzić do niejasności.

---

[1] Mówiąc o zbiorach przeliczalnych zawsze będziemy mieć na myśli zbiory przeliczalne i nieskończone. Ponadto, mówiąc o grupach przeliczalnych, zawsze będziemy mieć na myśli przeliczalne, nieskończone grupy topologiczne z topologią dyskretną.

[2] Niepustość jest oczywista. Borelowskość można sprawdzić, zapisując zbiór $\tilde{\mathcal{O}}$ przy pomocy przeliczalnych przekrojów i sum cylindrów stanowiących bazę topologii w $\{0,1\}^{G\times G}$.

Intencją stojącą za wprowadzeniem pojęcia multiporządku było zdefiniowanie rodziny porządków, która (jako zbiór) będzie miała pewne istotne własności naturalnego porządku $<$ na $\mathbb{Z}$ (takie jak niezmienniczość na działanie grupy). Jak zaraz pokażemy, ów naturalny porządek na $\mathbb{Z}$ jest w istocie szczególnym przypadkiem multiporządku.

Przykład 2.1.3. Niech $<$ będzie naturalnym porządkiem na $\mathbb{Z}$. Jest on punktem stałym dla działania $\mathbb{Z}$ zadanego wzorem (2.1). Jednopunktowy układ dynamiczny $(\{<\}, \delta_<, \mathbb{Z})$, gdzie $\delta_<$ jest miarą Diraca skupioną w $\prec$, jest zatem multiporządkiem na $\mathbb{Z}$.

Inne, bardziej skomplikowane przykłady multiporządków zostaną podane w rozdziale 5, przy okazji konstrukcji multiporządku z systemu tilingów.

W tym miejscu należy nadmienić, że multiporządki są szczególnymi przypadkami tak zwanych losowych porządków niezmienniczych (ang. *invariant random order* lub skrótowo IRO) wprowadzonych przez J.Kieffera w 1975 [19]:

Definicja 2.1.4. *Niech G będzie grupą przeliczalną.* Losowy porządek niezmienniczy *na G to przestrzeń probabilistyczna $(\mathcal{O}, \Sigma_{\mathcal{O}}, \nu)$, gdzie $\mathcal{O}$ jest rodziną wszystkich porządków liniowych na G (traktowaną jako podzbiór $\{0,1\}^{G\times G}$), $\Sigma_{\mathcal{O}}$ jest sigma-ciałem borelowskim na $\mathcal{O}$ i ν jest borelowską miarą probabilistyczną niesioną przez $\mathcal{O}$, niezmienniczą na działanie G na $\mathcal{O}$ zadane formułą $(g, \prec) \mapsto \prec'$, gdzie*

$$a \prec' b \iff ag \prec bg \qquad (a, b \in G).$$

Losowe porządki niezmiennicze różnią się od multiporządków brakiem wymogu by każdy element IRO był porządkiem typu $\mathbb{Z}$. Łatwo można pokazać, że IRO istnieje na każdej grupie przeliczalnej, co obrazuje Przykład 2.1.5. Istnienie multiporządku na grupie jest natomiast znacznie mniej oczywiste i, jak się okazuje, jest ono równoważne ze średniowalnością grupy, co zostanie udowodnione w kolejnym podrozdziale.

Przykład 2.1.5. Niech G będzie dowolną grupą przeliczalną. Niech $(\mathsf{X}_g)_{g\in G}$ będzie dowolnym G-procesem i.i.d. o wartościach z odcinka $[0,1]$, takim że dla każdego $g \in G$, X_g ma miarę Lebesgue'a. Prawie każda realizacja $\omega = (\omega_g)_{g\in G}$ tego procesu zadaje injekcję $g \mapsto \omega_g$ z G w odcinek $[0,1]$. Możemy więc zdefiniować porządek liniowy $\prec_\omega$ na G za pomocą równoważności:

$$a \prec_\omega b \iff \omega_a < \omega_b \qquad (a, b \in G),$$

gdzie $<$ jest tradycyjnym porządkiem na $[0,1]$. Łatwo można pokazać, że przyporządkowanie $\omega \mapsto \prec_\omega$ zadaje faktor teoriomiarowy G-procesu $(\mathsf{X}_g)_{g\in G}$ oraz, że faktor ten jest losowym porządkiem niezmienniczym na G, którego prawie każdy element $\prec_\omega$ jest porządkiem typu $\mathbb{Q}$ (czyli, że dla dowolnych $a, b \in G$, takich że $a \prec_\omega b$, istnieje element $c \in G$ spełniający $a \prec_\omega c \prec_\omega b$).[3]

Przed przejściem dalej przypomnimy definicję grupy ze średnią wykorzystującą pojęcie ciągu Følnera.

Definicja 2.1.6. *Przeliczalną grupę G nazywamy* grupą ze średnią, *jeżeli w G istnieje ciąg skończonych podzbiorów $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o tej własności, że dla dowolnego ustalonego $\varepsilon > 0$ i dla każdego $g \in G$, istnieje liczba $n_0 \in \mathbb{N}$, taka że dla każdego $n \geq n_0$, zbiór F_n jest (g,ε)-niezmienniczy, tzn. $\frac{|gF_n \triangle F_n|}{|F_n|} < \varepsilon$.[4] Ciąg $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o tej własności nazywamy* ciągiem Følnera.

[3] Ponadto, jeżeli G jest grupą ze średnią, to tak zadany IRO ma entropię dodatnią, ponieważ jest faktorem układu Bernoulliego (patrz [24]).

[4] Symbol $\triangle$ oznacza różnicę symetryczną dwóch zbiorów.

Naturalny porządek na $\mathbb{Z}$ ma tę własność, że odcinki porządkowe o rosnących długościach tworzą ciąg Følnera w $\mathbb{Z}$. Jak się okazuje, multiporządki na grupach ze średnią automatycznie posiadają podobną własność, której definicję podajemy poniżej.

Definicja 2.1.7. *Niech G będzie przeliczalną grupą ze średnią i niech e oznacza jedność w G. Mówimy, że multiporządek $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$ ma* własność Følnera *(lub krócej, że jest* følnerowski*), jeżeli dla ν-prawie każdego $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$, odcinki porządkowe $[e, b_n]^{\prec}$, gdzie b_n oznacza n-ty następnik jedności e w porządku $\prec$, tworzą ciąg Følnera w G.*

Twierdzenie 2.1.8. *Niech G będzie grupą przeliczalną i załóżmy, że na G istnieje multiporządek $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$. Wówczas $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$ ma własność Følnera. W szczególności, G jest grupą ze średnią.*

Dowód powyższego twierdzenia, zaproponowany przez T. Meyerovitcha, wykorzystuje orbitalną równoważność multiporządku z pewnym specyficznym działaniem grupy $\mathbb{Z}$ (na tym samym multiporządku), która zostanie szczegółowo opisana w kolejnym podrozdziale. Sam dowód Twierdzenia 2.1.8 również zostanie zaprezentowany w tymże podrozdziale. Warto nadmienić, że jak zauważył A. Danilenko, Twierdzenie 2.1.8 można udowodnić również, korzystając z lematu podanego przez D. Rudolpha i B. Weissa [27, Lemma 3.10] oraz z Lematu Borela-Cantellego. Dowód kolejnego twierdzenia, również wykorzystujący orbitalną równoważność, także zostanie podany w kolejnym podrozdziale.

Twierdzenie 2.1.9. *Jeżeli G jest przeliczalną grupą ze średnią, to na G istnieje multiporządek $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$ o entropii zero.*

Z Twierdzeń 2.1.8 i 2.1.9 wynikają dwa ważne wnioski. Pierwszy z nich może stanowić nową definicję (przeliczalnej) grupy ze średnią. Drugi natomiast gwarantuje, że w dowolnej przeliczalnej grupie ze średnią istnieje ciąg Følnera o pewnych specyficznych (niekiedy bardzo użytecznych) własnościach.

Wniosek 2.1.10. *Przeliczalna grupa G jest grupą ze średnią wtedy i tylko wtedy, gdy na G istnieje multiporządek.*

Wniosek 2.1.11. *W każdej przeliczalnej grupie ze średnią G istnieje ciąg Følnera $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełniający:*

- $F_n \subset F_{n+1}$,
- $F_1 = \{e\}$ *(ciąg $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o tej własności nazywamy* scentrowanym*),*
- $|F_n| = n$ *(czyli kolejne zbiory F_n przyrastają dokładnie o jeden element).*

Dowód. Na mocy Twierdzenia 2.1.9, na G istnieje multiporządek $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$. Z Twierdzenia 2.1.8, $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$ ma własność Følnera. Żądany ciąg Følnera uzyskujemy ustalając ν-typowy[5] porządek $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$ i kładąc $F_n = [e, b_n]^{\prec}$, gdzie b_n jest n-tym następnikiem e w porządku $\prec$. ∎

Istnieje kilka różnych reprezentacji multiporządków na grupach przeliczalnych. Jedna z nich, szczególnie użyteczna w kontekście dalszych rozważań, bazuje na utożsamieniu porządków typu $\mathbb{Z}$ na G z bijekcjami z $\mathbb{Z}$ w G.

[5]Przez *element μ-typowy* (gdzie μ jest miarą probabilistyczną na pewnej przestrzeni miarowej) będziemy zawsze rozumieć element należący do, wynikającego z kontekstu, zbioru pełnej miary μ.

Definicja 2.1.12. *Z każdym porządkiem* $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$ *możemy związać bijekcję* $\mathsf{bi}_\prec : \mathbb{Z} \to G$ *spełniającą* $\mathsf{bi}_\prec(0) = e$ *(o takiej bijekcji będziemy mówić, że jest* zakotwiczona*) oraz*

$$\mathsf{bi}_\prec(i) = g \iff \mathsf{bi}_\prec(i+1) = \mathsf{succ}_\prec(g) \quad (i \in \mathbb{Z},\ g \in G), \tag{2.2}$$

gdzie $\mathsf{succ}_\prec(g)$ *oznacza następnik elementu* g *w porządku* $\prec$*. Na przestrzeni wszystkich zakotwiczonych bijekcji* $\mathsf{bi} : \mathbb{Z} \to G$*, którą będziemy oznaczać symbolem* $\mathbf{Bi}(\mathbb{Z}, G)$*, definiujemy działanie* G *zadane wzorem:*

$$(g(\mathsf{bi}))(i) = \mathsf{bi}(i+k) \cdot g^{-1}, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z} \text{ spełnia } g = \mathsf{bi}(k). \tag{2.3}$$

Zbiór $\mathbf{Bi}(\mathbb{Z}, G)$ jest podzbiorem typu G_δ przestrzeni $G^{\mathbb{Z}}$ wszystkich funkcji z $\mathbb{Z}$ w G, zatem jest w szczególności zbiorem borelowskim, a sama przestrzeń $\mathbf{Bi}(\mathbb{Z}, G)$, wyposażona w naturalną strukturę topologiczną odziedziczoną z $G^{\mathbb{Z}}$, jest ośrodkową przestrzenią polską. Ponadto zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.1.13. *Przyporządkowannie* $\rho : \tilde{\mathcal{O}} \to \mathbf{Bi}(\mathbb{Z}, G)$ *zadane wzorem* $\rho(\prec) = \mathsf{bi}_\prec$ *jest borelowską bijekcją, a odwzorowanie odwrotne* $\rho^{-1} : \mathbf{Bi}(\mathbb{Z}, G) \to \tilde{\mathcal{O}}$ *jest ciągłe. Ponadto poniższy diagram komutuje:*

$$\begin{array}{ccc} \prec & \xrightarrow[(2.1)]{g} & g(\prec) \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ \mathsf{bi}_\prec & \xrightarrow[(2.3)]{g} & g(\mathsf{bi}_\prec) = \mathsf{bi}_{g(\prec)}, \end{array} \tag{2.4}$$

Dowód. Ze wzoru (2.2) wynika, że dla każdej $\mathsf{bi} \in \mathbf{Bi}(\mathbb{Z}, G)$ i każdego $g \in G$ zachodzi

$$(g(\mathsf{bi}))(0) = \mathsf{bi}(k) \cdot g^{-1} = g \cdot g^{-1} = e.$$

Zatem $g(\mathsf{bi})$ jest zakotwiczona. Injektywność ρ jest oczywista. Dodatkowo, każda zakotwiczona bijekcja $\mathsf{bi} \in \mathbf{Bi}(\mathbb{Z}, G)$ zadaje w naturalny sposób porządek liniowy $\prec$ typu $\mathbb{Z}$ na G, spełniający $\mathsf{bi} = \mathsf{bi}_\prec$. Czyli ρ jest również surjekcją. Przypomnijmy, że $\tilde{\mathcal{O}} \subset \{0,1\}^{G \times G}$ i $\mathbf{Bi}(\mathbb{Z}, G) \subset G^{\mathbb{Z}}$. Ustalmy zbiór skończony $K = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \subset G$ oraz zbiór $\mathcal{A} = \{\prec \in \tilde{\mathcal{O}} : g_1 \prec g_2 \prec \cdots \prec g_n\}$. Jest to cylinder bazowy w $\tilde{\mathcal{O}}$. Zauważmy, że

$$\rho(\mathcal{A}) = \bigcup_{i_1 \in \mathbb{Z}} \bigcup_{i_2 > i_1} \cdots \bigcup_{i_n > i_{n-1}} \{\mathsf{bi} \in \mathbf{Bi}(\mathbb{Z}, G) : \mathsf{bi}(i_1) = g_1, \mathsf{bi}(i_2) = g_2, \ldots, \mathsf{bi}(i_n) = g_n\}.$$

Zatem $\rho(\mathcal{A})$ jest zbiorem otwartym jako suma cylindrów z $\mathbf{Bi}(\mathbb{Z}, G)$. Czyli ρ^{-1} jest przekształceniem ciągłym. Stąd, ρ jest borelowską injekcją (patrz Twierdzenie 15.1 i uwaga pod ćwiczeniem (15.4) w [18]).

Pozostaje pokazać, że diagram (2.4) komutuje, czyli że dla dowolnych $g \in G$ oraz $i \in \mathbb{Z}$ zachodzi $(g(\mathsf{bi}_\prec))(i) = \mathsf{bi}_{g(\prec)}(i)$. Dla $i = 0$ równość ta zachodzi automatycznie, gdyż $\mathsf{bi}_\prec$ oraz $\mathsf{bi}_{g(\prec)}$ są zakotwiczone. Ustalmy więc $i > 0$ (rozumowanie dla $i < 0$ jest analogiczne) oraz połóżmy $h = \mathsf{bi}_{g(\prec)}(i)$. Odcinek porządkowy $[e, h]^{g(\prec)}$ ma wtedy długość $i+1$. Z (2.1) wynika więc, że $[g, hg]^\prec$ jest odcinkiem porządkowym wzdłuż porządku $\prec$, który także ma długość $i + 1$. Zatem, jeżeli $k \in \mathbb{Z}$ jest takie, że $\mathsf{bi}_\prec(k) = g$, to $hg = \mathsf{bi}_\prec(i + k)$ i równoważnie $h = \mathsf{bi}_\prec(i + k) \cdot g^{-1}$. Na mocy (2.3) mamy $\mathsf{bi}_\prec(i + k) \cdot g^{-1} = (g(\mathsf{bi}_\prec))(i)$, zatem $\mathsf{bi}_{g(\prec)}(i) = (g(\mathsf{bi}_\prec))(i)$. ■

Uwaga 2.1.14. Multiporządek może być zamiennie interpretowany jako teoriomiarowy układ dynamiczny $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$ z borelowską miarą probabilistyczną ν niezmienniczą na działanie G zadane wzorem (2.1) lub jako układ dynamiczny $(\mathbf{Bi}(\mathbb{Z}, G), \rho(\nu), G)$, gdzie działanie G na $\mathbf{Bi}(\mathbb{Z}, G)$ jest zadane wzorem (2.3). Na mocy Twierdzenia 2.1.13, obie reprezentacje mogą być stosowane zamiennie, co będzie w dalszej części pracy często wykorzystywane. Z tej racji, miary ν oraz $\rho(\nu)$ będziemy oznaczać jednym symbolem ν.

Uwaga 2.1.15. Z Twierdzenia 2.1.13 wynika, przy okazji, że działanie G na $\mathbf{Bi}(\mathbb{Z}, G)$ zadane wzorem (2.3) jest poprawnie zdefiniowane.

Na koniec tego podrozdziału wprowadzamy szereg oznaczeń, które znacząco uproszczą zapis wzorów w dalszej części pracy. Dla ustalonego $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$, zamiast $\mathsf{bi}_\prec(i)$, będziemy pisać $i^\prec$ ($i \in \mathbb{Z}$). W szczególności, niezależnie od wyboru $\prec$, mamy wówczas $0^\prec = e$. Dla ustalonych $i, j \in \mathbb{Z}$, takich że $i < j$, odcinek porządkowy $[i^\prec, j^\prec]^\prec = \{i^\prec, (i+1)^\prec, \ldots, j^\prec\}$ oznaczać będziemy przez $[i, j]^\prec$. Analogicznie, przez $[i, \infty)^\prec$ oraz $(-\infty, i]^\prec$ będziemy oznaczać odcinki porządkowe nieskończone, odpowiednio lewostronnie oraz prawostronnie domknięte. Dla ustalonego $g \in G$, symbolami $[g, g+n]^\prec$ oraz $[g-n, g]^\prec$ będziemy oznaczać odcinki porządkowe o długości $n+1$, odpowiednio zaczynające się bądź kończące się elementem g (przykładowo $[e, e+n]^\prec = [0, n]^\prec$). Ponadto, dla ustalonego $F \subset G$ oraz $n \in \mathbb{Z}$, będziemy stosować oznaczenia:

$$[F, F+n]^\prec = \bigcup_{g \in F} [g, g+n]^\prec \quad \text{i} \quad [F-n, F]^\prec = \bigcup_{g \in F} [g-n, g]^\prec. \tag{2.5}$$

Stosując powyższe oznaczenia, wzór (2.3), zadający działanie grupy G na przestrzeni $\mathbf{Bi}(\mathbb{Z}, G)$, może zostać zapisany w następujący sposób:

$$i^{g(\prec)} = (i+k)^\prec \cdot g^{-1}, \quad \text{równoważnie} \quad i^\prec \cdot g^{-1} = (i-k)^{g(\prec)}, \tag{2.6}$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$ jest unikalną liczbą, taką że

$$g = k^\prec, \quad \text{równoważnie} \quad g^{-1} = (-k)^{g(\prec)}. \tag{2.7}$$

Uwaga 2.1.16. Zauważmy, że zgodnie ze wzorem (2.7), $(k^\prec)^{-1}$ w ogólności nie musi być równe $(-k)^\prec$.

2.2 Multiuporządkowane układy dynamiczne i ich własności

W przeciwieństwie do niezmienniczych porządków losowych, które niemal zawsze są rozumiane jako niezależne obiekty, multiporządki będziemy często traktować jako faktory innych układów dynamicznych. Z tego powodu wprowadzamy definicję multiuporządkowanego układu dynamicznego.

Definicja 2.2.1. *Niech G będzie grupą przeliczalną i niech (X, μ, G) będzie teoriomiarowym układem dynamicznym z działaniem G. Jeżeli istnieje multiporządek $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$ na G będący faktorem układu (X, μ, G) przez przekształcenie φ, to układ (X, μ, G) będziemy nazywać* multiuporządkowanym *i oznaczać go będziemy za pomocą czwórki (X, μ, G, φ).*

W tym momencie może nasunąć się pytanie, jak bardzo powszechnymi obiektami są multiuporządkowane układy dynamiczne (i czy w ogóle takie układy istnieją). Okazuje się, że w przypadku działań grup ze średnią, są one dosyć pospolite, gdyż każde wolne[6] działanie grupy ze średnią na bezatomowej przestrzeni miarowej tworzy układ multiuporządkowany (co zostanie pokazane w dalszej części tego podrozdziału). Ponadto dowolny teoriomiarowy układ dynamiczny można bardzo łatwo „uzupełnić” do układu multiuporządkowanego.

Uwaga 2.2.2. Niech (X, μ, G) będzie teoriomiarowym układem dynamicznym z działaniem przeliczalnej grupy G i niech $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$ będzie dowolnym multiporządkiem na G. Dowolne połączenie[7] $(X \times \tilde{\mathcal{O}}, \mu \vee \nu, G, \varphi)$, z działaniem G na $X \times \tilde{\mathcal{O}}$ zadanym wzorem $g((x, \prec)) = (g(x), g(\prec))$, jest multiuporządkowanym układem dynamicznym. W tym przypadku rolę faktor-odwzorowania φ pełni po prostu rzut na drugą współrzędną.

W pracy wiele kluczowych rezultatów zostanie udowodnionych najpierw dla układów multiuporządkowanych, a następnie będą one uogólnione dla dowolnych układów.

Od tej pory interesować nas będą niemal wyłącznie działania przeliczalnych grup ze średnią. Wiele istotnych własności multiuporządkowanych układów dynamicznych z działaniem takich grup wynika z ich orbitalnej równoważności z pewnym szczególnym działaniem $\mathbb{Z}$. Zanim jednak podamy i udowodnimy te własności, przypomnimy pewne podstawowe definicje i fakty dotyczące samej orbitalnej równoważności.

Definicja 2.2.3. *Niech Γ i G będą dwiema grupami przeliczalnymi i niech (X, μ, Γ) oraz (Y, ν, G) będą dwoma teoriomiarowymi układami dynamicznymi z działaniami odpowiednio Γ oraz G. Mówimy, że układy (X, μ, Γ) i (Y, ν, G) są* orbitalnie równoważne, *jeżeli istnieje mierzalna bijekcja $\psi : (X, \mu) \to (Y, \nu)$ zachowująca miarę, która przekształca Γ-orbity w G-orbity, tzn., że dla μ-prawie każdego $x \in X$ i każdego $\gamma \in \Gamma$ istnieje element $g_{x,\gamma} \in G$, taki że*

$$\psi(\gamma(x)) = g_{x,\gamma}(\psi(x)) \tag{2.8}$$

oraz że $\{g_{x,\gamma} : \gamma \in \Gamma\} = G$.

Wzór (2.8) możemy równoważnie zapisać w postaci

$$\gamma(x) = \psi^{-1}(g_{x,\gamma}(\psi(x))),$$

co oznacza, że odwzorowanie identycznościowe $\mathsf{id} : X \to X$ wyznacza orbitalną równoważność między działaniem Γ na (X, μ) oraz działaniem G na tej samej przestrzeni, zdefiniowanym przy pomocy wzoru

$$g(x) = \psi^{-1}(g(\psi(x))),$$

które jest izomorficzne z uprzednio zadanym działaniem G na (Y, ν). Stąd możemy ograniczyć rozważania dotyczące orbitalnej równoważności do działań dwóch różnych grup Γ i G na tej samej przestrzeni miarowej (X, μ). Wówczas rolę przekształcenia ψ zawsze pełni odwzorowanie identycznościowe, a o układach (X, μ, Γ) oraz (X, μ, G) będziemy mówić po

[6]Niech (X, μ, G) będzie teoriomiarowym układem dynamicznym z działaniem grupy G. Mówimy, że działanie G na X jest *wolne*, jeżeli μ-prawie każdy $x \in X$ ma trywialny stabilizator, czyli $\{g \in G : g(x) = x\} = \{e\}$.

[7]*Połączeniem* dwóch teoriomiarowych układów dynamicznych (X, μ, G) oraz (Y, ν, G) nazywamy dowolną miarę na $X \times Y$ (zazwyczaj oznaczaną przez $\mu \vee \nu$), niezmienniczą na działanie produktowe G, która ma pełne rzuty na obie współrzędne. Szczególnym przykładem połączenia jest oczywiście miara produktowa $\mu \times \nu$.

prostu, że mają takie same orbity. W takim przypadku, μ-prawie każdy $x \in X$ wyznacza relację R_x pomiędzy elementami grup Γ i G zadaną wzorem

$$\gamma \, \mathsf{R}_x \, g \iff \gamma(x) = g(x), \tag{2.9}$$

która ma pełne rzuty na każdą ze współrzędnych. Jeżeli działania obu grup Γ i G są wolne, to relacja R_x jest bijekcją, którą będziemy oznaczać przez bi_x, a wzór (2.9) przyjmuje postać

$$g = \mathsf{bi}_x(\gamma) \iff \gamma(x) = g(x). \tag{2.10}$$

Zauważmy, że skoro działania G i Γ są wolne, to bi_x przekształca jedności obu grup na siebie, jest więc zakotwiczona. Zatem, $x \mapsto \mathsf{bi}_x$ jest mierzalnym odwzorowaniem z X w przestrzeń $\mathbf{Bi}(\Gamma, G)$ wszystkich zakotwiczonych bijekcji z Γ w G. Przypomnijmy jeszcze, że do tego by działanie $\mathbb{Z}$ na przestrzeni miarowej (X, μ) było wolne, potrzeba i wystarcza by orbity μ-prawie wszystkich punktów z X były nieskończone. Stąd też, jeżeli działanie $\mathbb{Z}$ jest orbitalnie równoważne z działaniem wolnym grupy G, to automatycznie ono samo jest wolne.

Sformułujemy teraz i udowodnimy dwa istotne twierdzenia dotyczące orbitalnej równoważności w przypadku multiuporządkowanych układów dynamicznych. Twierdzenia te pozwolą nam wywnioskować pewne istotne własności zarówno multiporządków jak i układów multiuporządkowanych.

Twierdzenie 2.2.4. *Niech (X, μ, G) będzie teoriomiarowym układem dynamicznym z działaniem przeliczalnej grupy G. Niech $T : X \to X$ będzie bijekcją zachowującą miarę μ i niech (X, μ, T) będzie układem z działaniem $\mathbb{Z}$, które jest zadane przez kolejne iteracje T ($\mathbb{Z} \ni n \mapsto T^n$). Niech (X, μ, T) będzie orbitalnie równoważne z (X, μ, G) (przez odwzorowanie identycznościowe). Wówczas przekształcenie $x \mapsto \mathsf{bi}_x$ zadane wzorem* (2.10) *jest teoriomiarowym faktor-odwzorowaniem z (X, μ, G) w multiporządek $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$, gdzie ν jest obrazem miary μ przez to odwzorowanie, a działanie G na $\tilde{\mathcal{O}}$ jest zadane wzorem* (2.3).

Dowód. Skoro oba działania są wolne, to dla μ-prawie wszystkich $x \in X$ bijekcja bi_x jest zakotwiczona. Pozostaje więc jedynie pokazać, że odwzorowanie $x \mapsto \mathsf{bi}_x$ spełnia równość

$$\mathsf{bi}_{g(x)} = (g(\mathsf{bi}_x))$$

dla μ-prawie wszystkich $x \in X$. Korzystając ze wzoru (2.3), dla każdego $i \in \mathbb{Z}$ mamy

$$(g(\mathsf{bi}_x))(i) = \mathsf{bi}_x(i + k) \cdot g^{-1},$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$ jest unikalną liczbą spełniającą $\mathsf{bi}_x(k) = g$. Skoro oba działania są wolne, to na mocy (2.10) $h = \mathsf{bi}_{g(x)}(i)$ oraz $h' = \mathsf{bi}_x(i + k)$ są (μ-prawie na pewno) unikalnymi elementami G, które spełniają poniższe warunki:

(i) $T^i(g(x)) = hg(x)$,

(ii) $T^{i+k}(x) = h'(x)$.

Dodatkowo, ponieważ $g = \mathsf{bi}_x(k)$, mamy również

(iii) $T^k(x) = g(x)$.

Łącząc (i) i (iii), otrzymujemy, że $T^{i+k}(x) = hg(x)$, co razem z (ii) daje równość $hg(x) = h'(x)$. Ponieważ działanie G jest wolne, więc dla μ-prawie każdego $x \in X$ otrzymujemy $h' = hg$ bądź równoważnie $h'g^{-1} = h$. Oznacza to, że dla μ-prawie wszystkich $x \in X$ i dowolnego $i \in \mathbb{Z}$ zachodzi $\mathsf{bi}_x(i + k) \cdot g^{-1} = \mathsf{bi}_{g(x)}(i)$, co było do pokazania. ∎

Wniosek 2.2.5. *Niech (X, μ, G) będzie układem dynamicznym z działaniem przeliczalnej grupy ze średnią G, takim że μ jest miarą bezatomową. Jeżeli działanie G jest wolne, to (X, μ, G) posiada multiporządek jako faktor (czyli jest układem multiuporządkowanym).*

Dowód. Na mocy Twierdzenia Ornsteina-Weissa [25, Twierdzenie 6], każdy teoriomiarowy układ dynamiczny z działaniem przeliczalnej grupy ze średnią G i miarą bezatomową jest orbitalnie równoważny z pewnym układem dynamicznym z działaniem $\mathbb{Z}$. Jeżeli więc działanie G jest wolne, to teza wynika bezpośrednio z Twierdzenia 2.2.4. ■

Wniosek 2.2.6. *Na każdej przeliczalnej grupie ze średnią G istnieje multiporządek $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$ o entropii zero.*

Dowód. Wystarczy zastosować Wniosek 2.2.5 do układu dynamicznego o entropii zero z wolnym działaniem G (istnienie takiego układu dla dowolnej przeliczalnej grupy ze średnią wynika np. z [10, Twierdzenie 6.1]). ■

Twierdzenie 2.2.7. *Niech (X, μ, G, φ) będzie układem multiuporządkowanym, którego faktorem jest multiporządek $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$. Wtedy (X, μ, G) jest orbitalnie równoważny z układem (X, μ, S) z działaniem $\mathbb{Z}$ zadanym przez iteracje przekształcenia $S : X \to X$, zdefiniowanego wzorem*

$$S(x) = 1^{\prec}(x), \quad \textit{gdzie} \quad \prec = \varphi(x) \tag{2.11}$$

(innymi słowy $S(x) = g(x)$, gdzie $g = 1^{\varphi(x)} = 1^{\prec}$). Przekształcenie S nazywać będziemy przekształceniem następnika *(ang.* successor map*). Dodatkowo, dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ mamy*

$$S^k(x) = k^{\prec}(x). \tag{2.12}$$

Ponadto przekształcenie $\tilde{S} : \tilde{\mathcal{O}} \to \tilde{\mathcal{O}}$ zadane wzorem

$$\tilde{S}(\prec) = 1^{\prec}(\prec) \tag{2.13}$$

(innymi słowy $\tilde{S}(\prec) = g(\prec)$, gdzie $g = 1^{\prec}$ i $g(\prec)$ jest zadane przez wzór (2.1)*) zachowuje miarę ν oraz $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, \tilde{S})$ jest faktorem teoriomiarowym układu (X, μ, S) przez odwzorowanie φ.*

Dowód. Ponieważ działanie G na X zachowuje miarę μ, więc odwzorowanie $S : X \to X$ też zachowuje μ. Do pokazania orbitalnej równoważności między (X, μ, G) i (X, μ, S) wystarczy udowodnić, że ze wzoru (2.11) wynika (2.12) (ponieważ $\{k^{\prec} : k \in \mathbb{Z}\} = G$, więc z (2.12) wynika, że orbity $\{S^k(x) : k \in \mathbb{Z}\}$ oraz $\{g(x) : g \in G\}$ są równe dla μ-prawie każdego $x \in X$). Przeprowadzimy rozumowanie indukcyjne dla $k \geq 0$. Wzór (2.12) jest oczywiście prawdziwy dla $k = 0$ ($S^0 = \mathsf{id}$, więc $S^0(x) = e(x)$) oraz, na mocy (2.11), dla $k = 1$. Załóżmy, że zachodzi on dla pewnego $k \geq 1$. Ustalmy μ-typowy $x \in X$. Niech $\varphi(x) = \prec$ oraz $g = k^{\prec}$. Ponieważ φ jest faktor-odwzorowaniem (czyli dla każdego $g \in G$ oraz $x \in X$ zachodzi $\varphi(g(x)) = g(\varphi(x))$), to mamy

$$S^{k+1}(x) = S(k^{\prec}(x)) = 1^{\varphi(k^{\prec}(x))}(k^{\prec}(x)) = 1^{\varphi(g(x))}(g(x)) =$$
$$1^{g(\varphi(x))}(g(x)) = 1^{g(\prec)}(g(x)).$$

Stosując (2.6) oraz (2.7), otrzymujemy

$$1^{g(\prec)} = (k+1)^{\prec} \cdot g^{-1}.$$

Zatem,

$$S^{k+1}(x) = \big((k+1)^{\prec} \cdot g^{-1}\big)(g(x)) = (k+1)^{\prec}(x),$$

czyli wzór (2.12) zachodzi dla $k+1$.

Niech teraz $U : X \to X$ będzie zdefiniowane wzorem $U(x) = (-1)^{\prec}(x)$, gdzie, jak poprzednio, $\prec = \varphi(x)$. Stosując rozumowanie indukcyjne, analogiczne jak dla przekształcenia S, otrzymujemy, że dla każdego $k \geq 0$ zachodzi wzór

$$U^k(x) = (-k)^{\prec}(x).$$

Pokażemy, że U jest odwzorowaniem odwrotnym do S. Ponownie ustalmy μ-typowy $x \in X$. Niech $x' = U(x)$ i niech $\prec' = \varphi(x')$. Zatem $x = \big((-1)^{\prec}\big)^{-1}(x')$ oraz, ponieważ φ komutuje z przekształceniami $x \mapsto g(x)$ dla wszystkich $g \in G$, mamy również

$$\prec' = \varphi(x') = \varphi(U(x)) = \varphi((-1)^{\prec}(x)) = (-1)^{\prec}(\varphi(x)) = (-1)^{\prec}(\prec)$$

bądź równoważnie

$$\prec = \big((-1)^{\prec}\big)^{-1}(\prec').$$

Stosując wzór (2.7) dla $g = (-1)^{\prec}$, otrzymujemy

$$\big((-1)^{\prec}\big)^{-1} = 1^{g(\prec)} = 1^{(-1)^{\prec}(\prec)} = 1^{\prec'}.$$

Skąd wynika, że

$$x = 1^{\prec'}(x') = 1^{\varphi(x')}(x') = S(x') = S(U(x)).$$

Stosując analogiczną argumentację, otrzymujemy również, że $x = U(S(x))$. Zatem U jest odwzorowaniem odwrotnym do S (w szczególności S jest odwracalne) oraz wzór (2.12) zachodzi dla wszystkich $k < 0$. To kończy dowód orbitalnej równoważności między (X, μ, G) oraz (X, μ, S).

Ponieważ $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$ jest oczywiście swoim własnym faktorem, możemy zastosować wyżej dowiedzioną już część twierdzenia, wstawiając $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$ w miejsce (X, μ, G). Otrzymujemy wtedy, że multiporządek $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$ jest orbitalnie równoważny z układem $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, \tilde{S})$, w którym działanie $\mathbb{Z}$ jest zadane przez iteracje przekształcenia $\tilde{S}$. W szczególności, wynika stąd, że $\tilde{S}$ zachowuje miarę ν.

Pozostaje pokazać, że $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, \tilde{S})$ jest faktorem (X, μ, S) przez odwzorowanie φ. Ustalmy μ-typowy $x \in X$. Niech $\prec = \varphi(x)$. Stosując własność, że φ komutuje z wszystkimi $g \in G$, otrzymujemy, że

$$\varphi(S(x)) = \varphi(1^{\prec}(x)) = 1^{\prec}(\varphi(x)) = 1^{\prec}(\prec) = \tilde{S}(\varphi(x)).$$

Zatem φ jest w istocie faktor-odwzorowaniem z (X, μ, S) w $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, \tilde{S})$, co kończy dowód. ■

Uwaga 2.2.8. Podkreślmy, że w Twierdzeniu 2.2.7 nie zakładamy, iż działanie G na (X, μ) bądź $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu)$ ma być wolne.

Uwaga 2.2.9. Dla układów ergodycznych z działaniem przeliczalnych grup ze średnią, część Twierdzenia 2.2.7 dotycząca orbitalnej równoważności wynika wprost z Twierdzenia Dye'a [15, Twierdzenie 9]. Specjalną własnością odwzorowania S jest jednak to, że przy orbitalnej równoważności, zachowuje on faktor będący multiporządkiem. W konsekwencji, zachowuje on również entropię warunkową względem multiporządku oraz sigma-ciało Pinskera pod warunkiem multiporządku, co zostanie pokazane w rozdziale 3.

Fakt 2.2.10. *Niech (X, μ, G) będzie układem dynamicznym z działaniem grupy G, które jest wolne i niech (X, μ, T) będzie układem z działaniem $\mathbb{Z}$ danym przez iteracje przekształcenia zachowującego miarę T, takim że oba układy są orbitalnie równoważne. Na mocy Twierdzenia 2.2.4, istnieje faktor-odwzorowanie φ z (X, μ, G) w pewien multiporządek $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$. Z Twierdzenia 2.2.7 wynika, że (X, μ, G) jest orbitalnie równoważny z (X, μ, S), gdzie S jest przekształceniem następnika zdefiniowanym za pomocą wzoru (2.11). Wówczas (z dokładnością do miary μ) odwzorowania T i S są równe.*

Dowód. Ustalmy (μ-typowy) punkt $x \in X$. Niech $g = \mathsf{bi}_x(1)$. Na mocy (2.10) mamy $g(x) = T(x)$. Jednak $\mathsf{bi}_x(1) = 1^{\prec}(x)$, gdzie $\prec = \varphi(x)$ ($\prec = \rho(\mathsf{bi}_x)$, gdzie ρ jest zdefiniowane jak w Twierdzeniu 2.1.13). Z (2.11) mamy wówczas, że $1^{\prec}(x) = S(x)$. Zatem $T(x) = S(x)$. Z dowolności $x \in X$ wynika, że $T = S$. ■

Wniosek 2.2.11. *Dla każdej przeliczalnej grupy ze średnią G istnieje multiporządek $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$ o „podwójnej entropii zero", tzn. $h(\nu, G) = h(\nu, \tilde{S}) = 0$, gdzie $h(\nu, G)$ oznacza entropię dynamiczną (Kołmogorova-Sinaia) miary ν pod działaniem G, a $h(\nu, \tilde{S})$ oznacza entropię dynamiczną (Kołmogorowa-Sinaia) miary ν pod działaniem $\mathbb{Z}$ zadanym przez iteracje przekształcenia $\tilde{S}$.*

Dowód. Niech (X, μ, G) będzie układem dynamicznym z wolnym działaniem przeliczalnej grupy ze średnią G, takim że $h(\mu, G) = 0$ (istnienie takiego układu można uzasadnić tak samo jak w dowodzie Wniosku 2.2.6). Z Twierdzenia Ornsteina-Weissa [25, Theorem 6] wynika, że układ (X, μ, G) jest orbitalnie równoważny z pewnym działaniem $\mathbb{Z}$ na (X, μ). Na mocy Twierdzenia Dye'a [15, Twierdzenie 9], wszystkie ergodyczne działania $\mathbb{Z}$ są parami orbitalnie równoważne. Zatem istnieje układ (X, μ, T) o entropii zero, który jest orbitalnie równoważny z (X, μ, G). Na mocy Twierdzenia 2.2.4, układ (X, μ, G) posiada faktor $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$ będący multiporządkiem. Oczywiście $h(\nu, G) = 0$ (gdyż $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$ jest faktorem układu o entropii zero). Ponadto układ $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, \tilde{S})$ jest faktorem (X, μ, S). Z Faktu 2.2.10 wynika, że $T = S$, czyli $h(\mu, S) = 0$ i w konsekwencji $h(\nu, \tilde{S}) = 0$. ■

Rozdział ten zakończymy odroczonym dowodem Twierdzenia 2.1.8. Poprzedzimy go jednak pewnym użytecznym lematem.

Lemat 2.2.12. *Niech (X, μ, T) będzie ergodycznym układem dynamicznym z działaniem $\mathbb{Z}$ danym przez iteracje przekształcenia $T : X \to X$, zachowującego miarę μ. Niech (X, μ, G) będzie układem dynamicznym z działaniem przeliczalnej grupy G, który jest orbitalnie równoważny z (X, μ, T). Wówczas, dla μ-prawie każdego $x \in X$, każdego $g \in G$ i dowolnego $\varepsilon > 0$, istnieje liczba $n_0 \in \mathbb{N}$, taka że dla każdego $n \geq n_0$,*

$$|g(O_T^{[0,n]}(x)) \triangle O_T^{[0,n]}(x)| < \varepsilon(n + 1),$$

gdzie $O_T^{[0,n]}(x) = \{T^k(x) : k \in [0, n]\} = \{x, T(x), T^2(x), \dots T^n(x)\}$.

Dowód. Ustalmy $x \in X$, $g \in G$ oraz $\varepsilon > 0$. Zbiory $X_k = \{x \in X : g(x) = T^k(x)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, tworzą przeliczalne rozbicie mierzalne przestrzeni X. Zatem istnieje liczba $m \in \mathbb{N}$, taka że $\mu(X_{[0,m]}) > 1 - \frac{\varepsilon}{8}$, gdzie $X_{[0,m]} = \bigcup_{k \in [0,m]} X_k$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ kładziemy $K_n = \{k \in [0, n] : T^k(x) \in X_{[0,m]}\}$. Zauważmy, że

$$\frac{|K_n|}{n + 1} = \frac{1}{n + 1} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{X_{[0,m]}}\big(T^k(x)\big).$$

Zatem, na mocy Twierdzenia Ergodycznego Birkhoffa, istnieje liczba $n_0 \in \mathbb{N}$, taka że dla każdego $n \geq n_0$ oraz dla μ-prawie każdego $x \in X$ zachodzi $\frac{|K_n|}{n+1} > 1 - \frac{\varepsilon}{4}$ bądź równoważnie $|[0,n] \setminus K_n| < \frac{\varepsilon}{4}(n+1)$. Zauważmy ponadto, że $g(O_T^{K_n}(x)) \subset O_T^{[0,n+m]}(x)$, gdzie $O_T^{K_n}(x) = \{T^k(x) : k \in K_n\}$. Dodatkowo, jeśli weźmiemy $n_0 \geq \frac{4m}{\varepsilon}$, to otrzymamy

$$|g(O_T^{[0,n]}(x)) \setminus O_T^{[0,n]}(x)| \leq |g(O_T^{K_n}(x)) \setminus O_T^{[0,n]}(x)| + |g(O_T^{[0,n]}(x)) \setminus g(O_T^{K_n}(x))| \leq$$
$$|O_T^{[n+1,n+m]}(x)| + |O_T^{[0,n]\setminus K_n}(x)| \leq m + |[0,n] \setminus |K_n|| < \frac{\varepsilon}{4}(n+1) + \frac{\varepsilon}{4}(n+1) = \frac{\varepsilon}{2}(n+1).$$

Ponieważ przekształcenie $x \mapsto g(x)$ jest odwracalne (odwzorowaniem odwrotnym jest $x \mapsto g^{-1}(x)$), więc zbiory $O_T^{[0,n]}(x)$ oraz $g(O_T^{[0,n]}(x))$ mają tę samą liczność. Stąd wynika, że

$$|O_T^{[0,n]}(x) \setminus g(O_T^{[0,n]}(x))| = |g(O_T^{[0,n]}(x)) \setminus O_T^{[0,n]}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}(n+1).$$

Ostatecznie zatem

$$|g(O_T^{[0,n]}(x)) \triangle O_T^{[0,n]}(x)| < \varepsilon(n+1).$$

■

Uwaga 2.2.13. Lemat 2.2.12 można sformułować ogólniej, biorąc w miejsce $(X, \mu, \mathbb{Z})$ układ (X, μ, Γ) z działaniem przeliczalnej grupy ze średnią Γ, a w miejsce przedziałów $[0, n]$, zbiory F_n z ciągu Følnera $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ na G, dla którego zachodzi Twierdzenie Ergodyczne Lindenstraussa [21]. Dowód uogólnionej wersji przebiega analogicznie.

Dowód Twierdzenia 2.1.8. Niech $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$ będzie multiporządkiem na grupie przeliczalnej G. Wystarczy udowodnić twierdzenie w przypadku, gdy ν jest miarą ergodyczną (stąd, przez rozkład ergodyczny, teza będzie wynikać dla dowolnej miary G-niezmienniczej). Załóżmy więc, że ν jest miarą ergodyczną. Istnieje ergodyczny układ dynamiczny (X, μ, G) z działaniem wolnym G, którego faktorem jest $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$ (przykładowo można wziąć połączenie ergodyczne[8] multiporządku z dowolnym G-procesem Bernoulliego, wówczas rolę φ pełni rzut na współrzędną będącą multiporządkiem). Niech $S : X \to X$ będzie przekształceniem następnika zdefiniowanym wzorem (2.11). Na mocy Twierdzenia 2.2.7, układ (X, μ, S) z działaniem $\mathbb{Z}$ danym przez iteracje S jest orbitalnie równoważny z (X, μ, G). Możemy więc zastosować Lemat 2.2.12. Wynika z niego, że dla μ-prawie każdego $x \in X$, dla każdego $g \in G$ i dowolnego $\varepsilon > 0$ oraz dla dostatecznie dużego $n \in \mathbb{N}$, zachodzi nierówność

$$|g(O_S^{[0,n]}(x)) \triangle O_S^{[0,n]}(x)| < \varepsilon(n+1). \tag{2.14}$$

Na mocy (2.12), mamy $O_S^{[0,n]}(x) = \{S^k(x) : k \in [0,n]\} = \{k^{\prec}(x) : k \in [0,n]^{\prec}\}$, gdzie $\prec = \varphi(x)$. Zatem wzór (2.14) przyjmuje postać

$$|g([0,n]^{\prec}(x)) \triangle [0,n](x)| < \varepsilon(n+1). \tag{2.15}$$

Ponieważ działanie G na (X, μ) jest wolne, więc we wzorze (2.15) możemy pominąć x, otrzymując

$$|g([0,n]^{\prec}) \triangle [0,n]| < \varepsilon(n+1). \tag{2.16}$$

Zatem, odcinek $[0,n]^{\prec}$ jest (g, ε)-niezmienniczy. Wynika stąd, że dla μ-prawie każdego $x \in X$, ciąg odcinków porządkowych $[0,n]^{\varphi(x)}$ jest ciągiem Følnera. Ponieważ $\nu(\varphi(X)) = 1$, więc $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$ jest følnerowski. ■

[8]Znanym faktem jest, że jeżeli miary μ i ν są ergodyczne, to istnieje połączenie $\mu \vee \nu$, które również jest ergodyczne (zobacz na przykład [29, 18, Proposition 1.4] - ten sam dowód stosuje się w przypadku działań dowolnych grup).

Rozdział 3

Entropia w układach multiuporządkowanych

Rozdział ten poświęcony jest przedstawieniu pewnych ważnych i interesujących własności entropii multiporządków i układów multiuporządkowanych oraz obiektów pochodzących od entropii, takich jak sigma-ciało Pinskera. Najpierw udowodnimy wzór na entropię liczoną wzdłuż multiporządku. Następnie udowodnimy twierdzenie mówiące, że orbitalna równoważność z działaniem $\mathbb{Z}$ zadanym przez iteracje przekształcenia następnika S, zdefiniowanego w podrozdziale 2.2, zachowuje entropię. Pokazany również zostanie związek między tym twierdzeniem a podobnym twierdzeniem udowodnionym przez D. Rudolpha i B. Weissa [27, Theorem 2.6] dotyczącym zachowywania entropii przez orbitalną równoważność między działaniami grup ze średnią o wspólnym faktorze. Na końcu udowodnimy najważniejszy wynik tego rozdziału, czyli charakteryzację sigma-ciała Pinskera w układach z działaniem grup ze średnią (niekoniecznie multiuporządkowanych) przy pomocy multiporządków.

3.1 Entropia teoriomiarowa dla działań przeliczalnych grup ze średnią

Zacznijmy od przypomnienia podstawowych definicji dotyczących entropii w układach z działaniem przeliczalnych grup ze średnią. W całym podrozdziale, (X, Σ_X, μ, G) będzie oznaczać teoriomiarowy układ dynamiczny z działaniem przeliczalnej grupy ze średnią G, a $\mathcal{P}$ oznaczać będzie skończone, Σ_X-mierzalne rozbicie przestrzeni X (rozbicie X na skończenie wiele parami rozłącznych, Σ_X-mierzalnych[1] zbiorów $P \in \mathcal{P}$). Dla $D \subset G$ kładziemy

$$\mathcal{P}^D = \bigvee_{g \in G} g^{-1}(\mathcal{P}).^2 \tag{3.1}$$

W przypadku gdy D jest zbiorem przeliczalnym, symbolem $\mathcal{P}^D$ będziemy zamiennie oznaczać zarówno rozbicie (3.1) jak i sigma-ciało $\sigma(\mathcal{P}^D)$ (najmniejsze sigma-ciało, względem którego mierzalne są wszystkie atomy $\mathcal{P}^{D}$[3]).

[1] W dalszej części pracy, tam gdzie nie będzie to powodować nieścisłości, o rozbiciach Σ_X-mierzalnych będziemy mówić krócej, że są po prostu mierzalne.

[2] Jeżeli $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ są dwoma rozbiciami X, to połączeniem $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ nazywamy rozbicie $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} = \{P \cap Q : P \in \mathcal{P},\ Q \in \mathcal{Q}\}$. Analogicznie definiujemy połączenie przeliczalnie wielu rozbić $\bigvee_i \mathcal{P}_i$.

[3] Mówimy, że rozbicie $\mathcal{P}$ jest *mierzalne* względem sigma-ciała Θ (albo, że Θ jest rozdrobnieniem $\mathcal{P}$), co oznaczamy przez $\mathcal{P} \preccurlyeq \Theta$, jeżeli dla każdego $P \in \mathcal{P}$, istnieje zbiór $A \in \Theta$, taki że $A \subset P$.

Jeżeli (X, μ, G, φ) jest układem multiuporządkowanym, którego faktorem jest multiporządek $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$, to dla zadanego $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$, sigma-ciała $\mathcal{P}_\prec^- = \mathcal{P}^{(-\infty,-1]^\prec}$ oraz $\mathcal{P}_\prec^+ = \mathcal{P}^{[1,+\infty]^\prec}$ nazywać będziemy odpowiednio *przeszłością* oraz *przyszłością* rozbicia $\mathcal{P}$ wzdłuż porządku $\prec$.

Entropią (statyczną) rozbicia $\mathcal{P}$ nazywamy liczbę

$$H(\mu, \mathcal{P}) = -\sum_{P \in \mathcal{P}} \mu(\mathcal{P}) \log \mu(\mathcal{P}).$$

Jeżeli Θ jest G-niezmienniczym pod-sigma-ciałem Σ_X, to entropią warunkową rozbicia $\mathcal{P}$ pod warunkiem Θ nazywamy liczbę

$$H(\mu, \mathcal{P}|\Theta) = \inf_{\mathcal{Q}} \big(H(\mu, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) - H(\mu, \mathcal{Q}) \big),$$

gdzie infimum jest wzięte po wszystkich skończonych rozbiciach $\mathcal{Q}$ przestrzeni X, mierzalnych względem Θ.

Niech $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie (dowolnym) ciągiem Følnera w G. Wówczas, entropia dynamiczna procesu generowanego przez rozbicie $\mathcal{P}$ zadana jest wzorem

$$h(\mu, G, \mathcal{P}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|F_n|} H(\mu, \mathcal{P}^{F_n}).$$

Podobnie, entropia warunkowa rozbicia $\mathcal{P}$ pod warunkiem sigma-ciała Θ jest zadana wzorem

$$h(\mu, G, \mathcal{P}|\Theta) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|F_n|} H(\mu, \mathcal{P}^{F_n}|\Theta).$$

Należy tu nadmienić, że wartości $h(\mu, G, \mathcal{P})$ oraz $h(\mu, G, \mathcal{P}|\Theta)$ nie zależą od wyboru ciągu Følnera $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Wreszcie, entropia dynamiczna Kołmogorowa-Sinaia układu dynamicznego (X, μ, G), oznaczana wzorem $h(\mu, G)$, jest zdefiniowana jako supremum wartości $h(\mu, G, \mathcal{P})$ wzięte po wszystkich skończonych, mierzalnych rozbiciach $\mathcal{P}$ przestrzeni X.

3.2 Entropia warunkowa wzdłuż multiporządku

Twierdzenie 3.2.1. *Niech (X, μ, G, φ) będzie multiuporządkowanym układem dynamicznym z działaniem przeliczalnej grupy ze średnią G i niech $\mathcal{P}$ będzie skończonym mierzalnym rozbiciem X. Niech $\{\mu_\prec : \prec \in \tilde{\mathcal{O}}\}$ będzie dezintegracją[4] miary μ ze względu na $\nu = \varphi(\mu)$. Niech $\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}$ będzie G-niezmienniczym pod-sigma-ciałem Σ_X uzyskanym przez podniesienie zbiorów borelowskich w $\tilde{\mathcal{O}}$ przez faktor-odwzorowanie φ. Wówczas*

$$h(\mu, G, \mathcal{P}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}) = \int_{\tilde{\mathcal{O}}} H(\mu_\prec, \mathcal{P}|\mathcal{P}_\prec^-) \mathrm{d}\nu(\prec) = \int_{\tilde{\mathcal{O}}} H(\mu_\prec, \mathcal{P}|\mathcal{P}_\prec^+) \mathrm{d}\nu(\prec).^5 \tag{3.2}$$

[4]Niech φ będzie przekształceniem mierzalnym z przestrzeni miarowej (X, Σ_X, μ) w przestrzeń (Y, Σ_Y, ν), gdzie $\nu = \varphi(\mu)$. *Dezintegracją* miary μ względem ν, nazywamy rodzinę miar probabilistycznych $\{\mu_y : y \in Y\}$ na X, taką że dla każdego zbioru mierzalnego $A \in \Sigma_X$ mamy $\mu(A) = \int_Y \mu_y(A) \mathrm{d}\nu(y)$ (patrz np. [8, III.70]).

[5]W dalszej części pracy, tam gdzie nie będzie to powodować nieścisłości, zamiast pisać $\int_{\tilde{\mathcal{O}}} \ldots \mathrm{d}\nu(\prec)$, będziemy pisać krócej $\int \ldots \mathrm{d}\nu$.

Uwaga 3.2.2. Jeżeli multiporządek $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$ ma entropię zero, to

$$h(\mu, G, \mathcal{P}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}) = h(\mu, G, \mathcal{P}).$$

W takim wypadku, wzór (3.2) może służyć do obliczania entropii bezwarunkowej rozbicia $\mathcal{P}$.

Uwaga 3.2.3. Jeżeli (X, μ, G) jest układem dynamicznym z działaniem przeliczalnej grupy ze średnią G, to dołączając do (X, μ, G) dowolny multiporządek $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$ o entropii zero, otrzymujemy układ multiuporządkowany $(X \vee \tilde{\mathcal{O}}, \mu \times \nu, G, \varphi)$ (patrz Uwaga 2.2.2) o takiej samej entropii jak (X, μ, G). Stąd, entropię dowolnego, skończonego, mierzalnego rozbicia $\mathcal{P}$ przestrzeni X możemy obliczyć ze wzoru (3.2) dla miary $\mu \times \nu$ i rozbicia $\{P \times \tilde{\mathcal{O}} : P \in \mathcal{P}\}$ (której entropia jest oczywiście równa entropii $\mathcal{P}$).

Uwaga 3.2.4. Wzór analogiczny do (3.2) zachodzi również dla losowych porządków niezmienniczych (zobacz [1, Theorem 3.1]). Mianowicie, jeżeli (X, μ, G) jest układem z działaniem przeliczalnej grupy G i jeżeli $(\mathcal{O}, \Sigma_{\mathcal{O}}, \nu)$ jest losowym porządkiem niezmienniczym na G (niezwiązanym w żaden sposób z X), to entropia dowolnego skończonego, mierzalnego rozbicia $\mathcal{P}$ przestrzeni X jest równa

$$h(\mu, \mathcal{P}, G) = \int_{\mathcal{O}} H(\mu, \mathcal{P}|\mathcal{P}^-_{\prec}) \mathrm{d}\nu(\prec).$$

W dowodzie Twierdzenia 3.2.1 wykorzystane zostaną następujące dwa lematy.

Lemat 3.2.5. *Niech G będzie przeliczalną grupą ze średnią i niech $(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem Følnera na G. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ oraz $\varepsilon > 0$. Istnieje $m_0 \in \mathbb{N}$, takie że dla każdego $m \geq m_0$ istnieje zbiór $\tilde{\mathcal{O}}'_m \subset \tilde{\mathcal{O}}$ spełniający $\nu(\tilde{\mathcal{O}}'_m) > 1 - \varepsilon$, taki że dla każdego $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$ mamy*

$$|[F_m, F_m + n]^{\prec} \setminus F_m| \leq \varepsilon|F_m| \quad \textit{oraz} \quad |[F_m - n, F_m]^{\prec} \setminus F_m| \leq \varepsilon|F_m|$$

(dla wyjaśnienia oznaczeń $[F_m, F_m + n]^{\prec}$ oraz $[F_m - n, F_m]^{\prec}$ patrz wzór (2.5)).

Dowód. Ponieważ dla każdego $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$ mamy $|[F_m, F_m+n]^{\prec}| = |[F_m-n, F_m]^{\prec}|$, więc wystarczy pokazać tylko pierwszą nierówność. Ponadto lemat wystarczy udowodnić w przypadku gdy ν jest miarą ergodyczną. Wówczas, poprzez rozkład ergodyczny, będzie on również zachodzić dla każdej miary niezmienniczej. Załóżmy zatem, że ν jest miarą ergodyczną.

Niech $\mathcal{K}$ oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów G o liczności $n + 1$, zawierających jedność e. Ustalmy $\delta = \frac{\varepsilon}{2(n+1)}$ i dla każdego $K \in \mathcal{K}$ połóżmy $\tilde{\mathcal{O}}_K = \{\prec \in \tilde{\mathcal{O}} : [0, n]^{\prec} = K\}$. Zauważmy, że zbiory $\tilde{\mathcal{O}}_K$ są parami rozłączne dla $K \in \mathcal{K}$. Zatem $\tilde{\mathcal{O}}$ można zapisać jako przeliczalną sumę zbiorów rozłącznych $\tilde{\mathcal{O}} = \bigcup_{K\in\mathcal{K}} \tilde{\mathcal{O}}_K$. Istnieje więc skończony podzbiór $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$, taki że dla $\tilde{\mathcal{O}}_{\mathcal{K}'} = \bigcup_{K\in\mathcal{K}'} \tilde{\mathcal{O}}_K$ zachodzi

$$\nu(\tilde{\mathcal{O}}_{\mathcal{K}'}) = \sum_{K\in\mathcal{K}} \nu(\tilde{\mathcal{O}}_K) > 1 - \delta.$$

Niech teraz $L = \bigcup_{K\in\mathcal{K}'} K$. Oczywiście L jest skończonym podzbiorem G. Istnieje zatem $m_0 \in \mathbb{N}$, takie że dla każdego $m \geq m_0$, zbiór F_m jest $(K, \frac{\delta}{|L|})$-niezmienniczy. Wówczas L-rdzeń zbioru F_m, czyli zbiór $(F_m)_L = \{g \in F_m : Lg \subset F_m\}$, spełnia nierówność

$$|F_m \setminus (F_m)_L| < \delta|F_m|.^6 \tag{3.3}$$

[6] Wykorzystujemy tu prosty do udowodnienia fakt, że jeżeli zbiór F jest (K, ε)-niezmienniczy, to K-rdzeń F_K ma liczność co najmniej $(1 - |K|\varepsilon)|F|$ (zob. [10, Lemat 2.6]).

Na mocy twierdzenia ergodycznego dla działań grup ze średnią, jeżeli m jest dostatecznie duże, to istnieje zbiór $\tilde{\mathcal{O}}'_m \subset \tilde{\mathcal{O}}$ spełniający $\nu(\tilde{\mathcal{O}}'_m) > 1-\varepsilon$, taki że dla każdego $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}'_m$ mamy

$$|\{g \in F_m : g(\prec) \in \tilde{\mathcal{O}}_{\mathcal{K}'}\}| > (1-\delta)|F_m|. \tag{3.4}$$

Stąd, łącząc wzory (3.4) oraz (3.3), otrzymujemy

$$\begin{aligned} &|\{g \in (F_m)_L : g(\prec) \in \tilde{\mathcal{O}}_{\mathcal{K}'}\}| = \\ &\quad |\{g \in F_m : g(\prec) \in \tilde{\mathcal{O}}_{\mathcal{K}'}\}| - |\{g \in F_m \setminus (F_m)_L : g(\prec) \in \tilde{\mathcal{O}}_{\mathcal{K}'}\}| > \\ &\qquad (1-\delta)|F_m| - |F_m \setminus (F_m)_L| > (1-\delta)|F_m| - \delta|F_m| = (1-2\delta)|F_m|. \end{aligned}$$

Kładziemy teraz $F'_m = \{g \in (F_m)_L : g(\prec) \in \tilde{\mathcal{O}}_{\mathcal{K}'}\}$. Wówczas, z powyższego wzoru wynika nierówność

$$|F_m \setminus F'_m| = |F_m| - |F'_m| < 2\delta|F_m|. \tag{3.5}$$

Zauważmy, że $g(\prec) \in \tilde{\mathcal{O}}_{\mathcal{K}'}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $[0,n]^{g(\prec)} \in \mathcal{K}'$. Stąd, stosując wzory (2.6) i (2.7), dla $g = k^{\prec}$ otrzymujemy

$$[0,n]^{g(\prec)} = [k, k+n]^{\prec} \cdot g^{-1} = [g, g+n]^{\prec} \cdot g^{-1}.$$

Ponieważ $[g, g+n]^{\prec} = Kg$ dla pewnego $K \in \mathcal{K}'$, więc $[g, g+n]^{\prec} \subset Lg$. Jeżeli ponadto $g \in (F_m)_L$, to $Lg \subset F_m$ i, w konsekwencji, $[g, g+n]^{\prec} \subset F_m$. Zatem, dla zbioru F_m zachodzą inkluzje $[F'_m, F'_m+n]^{\prec} \subset F_m$ oraz

$$\begin{aligned} [F_m, F_m+n]^{\prec} \setminus F_m \subset [F_m, F_m+n]^{\prec} \setminus [F'_m, F'_m+n]^{\prec} \subset \\ [(F_m \setminus F'_m), (F_m \setminus F'_m)+n]^{\prec}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Ostatecznie, łącząc (3.6) oraz (3.5), otrzymujemy

$$\begin{aligned} |[F_m, F_m+n]^{\prec} \setminus F_m| \le |[(F_m \setminus F'_m), (F_m \setminus F'_m)+n]^{\prec}| \le \\ (n+1)|F_m \setminus F'_m| < (n+1)2\delta|F_m| = \varepsilon|F_m|, \end{aligned}$$

co było do pokazania. ■

Lemat 3.2.6. *Niech $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$ będzie multiporządkiem na grupie ze średnią G oraz niech $J : \tilde{\mathcal{O}} \to \mathbb{R}$ będzie mierzalną funkcją ograniczoną. Wówczas, dla każdego $j \in \mathbb{Z}$ zachodzi*

$$\int J(j^{\prec}(\prec))\mathrm{d}\nu = \int J(\prec)\mathrm{d}\nu.$$

Dowód. Na mocy Twierdzenia 2.2.7, przekształcenie następnika $\tilde{S}$ na $\tilde{\mathcal{O}}$ zachowuje miarę ν. Ponadto dla każdego $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$ oraz każdego $j \in \mathbb{Z}$ mamy $\tilde{S}^j(\prec) = j^{\prec}(\prec)$. Stąd, dla dowolnego $j \in \mathbb{Z}$ zachodzi

$$\int J(j^{\prec}(\prec))\mathrm{d}\nu = \int J(\tilde{S}^j(\prec))\mathrm{d}\nu = \int J(\prec)\mathrm{d}\nu.$$

■

Dowód Twierdzenia 3.2.1. Zdefiniujemy pomocnicze wyrażenie na entropię:

$$\bar{h}(\mu, G, \mathcal{P}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \int H(\mu_{\prec}, \mathcal{P}^{[0,n]^{\prec}})\mathrm{d}\nu. \tag{3.7}$$

Najpierw pokażemy, że $\bar{h}(\mu, G, \mathcal{P}) = \int H(\mu, \mathcal{P}|\mathcal{P}_{\prec}^{-})\mathrm{d}\nu = \int H(\mu, \mathcal{P}|\mathcal{P}_{\prec}^{+})\mathrm{d}\nu$.

Ustalmy ν-typowy $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$\begin{gathered} H(\mu_{\prec}, \mathcal{P}^{[0,n]^{\prec}}) = \\ H(\mu, \mathcal{P}^{[0]^{\prec}}) + H(\mu, \mathcal{P}^{[1]^{\prec}}|\mathcal{P}^{[0]^{\prec}}) + H(\mu, \mathcal{P}^{[2]^{\prec}}|\mathcal{P}^{[0,1]^{\prec}}) + \dots \\ + H(\mu, \mathcal{P}^{[n]^{\prec}}|\mathcal{P}^{[0,n-1]^{\prec}}). \end{gathered} \tag{3.8}$$

Ustalmy chwilowo $j \in [0, n]$ i rozważmy j-ty element powyższej sumy

$$H(\mu_{\prec}, \mathcal{P}^{[j]^{\prec}}|\mathcal{P}^{[0,j-1]^{\prec}}).$$

Ponieważ μ jest miarą G-niezmienniczą, więc dezintegracja $\{\mu_{\prec} : \prec \in \tilde{\mathcal{O}}\}$ również musi być niezmiennicza w tym sensie, że dla każdego $g \in G$ i dowolnego zbioru mierzalnego $A \subset X$, zachodzi

$$\mu_{\prec}(A) = \mu_{g(\prec)}(g(A)).^{7} \tag{3.9}$$

Stąd otrzymujemy, że

$$H(\mu_{\prec}, \mathcal{P}^{[j]^{\prec}}|\mathcal{P}^{[0,j-1]^{\prec}}) = H(\mu_{g(\prec)}, g(\mathcal{P}^{[j]^{\prec}})|g(\mathcal{P}^{[0,j-1]^{\prec}})).$$

Zauważmy, że dla każdego $D \subset G$ i dowolnego $g \in G$ zachodzi

$$g(\mathcal{P}^{D}) = \bigvee_{h \in D} (gh^{-1})(\mathcal{P}) = \bigvee_{h \in D} (hg^{-1})^{-1} = \mathcal{P}^{Dg^{-1}}. \tag{3.10}$$

Zatem mamy

$$H(\mu_{\prec}, \mathcal{P}^{[j]^{\prec}}|\mathcal{P}^{[0,j-1]^{\prec}}) = H(\mu_{\prec}, \mathcal{P}^{[j]^{\prec} g^{-1}}|\mathcal{P}^{[0,j-1]^{\prec} g^{-1}}).$$

Niech teraz $g = j^{\prec}$. Na mocy (2.6) i (2.7), dla każdego $i \in [0, n]$ mamy

$$i \cdot g^{-1} = (i - j)^{g(\prec)} = (i - j)^{j^{\prec}(\prec)}.$$

Zatem

$$H(\mu_{\prec}, \mathcal{P}^{[j]^{\prec}}|\mathcal{P}^{[0,j-1]^{\prec}}) = H(\mu_{j^{\prec}(\prec)}, \mathcal{P}^{[0]^{j^{\prec}(\prec)}}|\mathcal{P}^{[-j,-1]^{j^{\prec}(\prec)}}). \tag{3.11}$$

Zdefiniujemy teraz funkcję mierzalną $J : \tilde{\mathcal{O}} \to [0, \infty)$ wzorem

$$J(\prec) = H(\mu_{\prec}, \mathcal{P}^{[0]^{\prec}}|\mathcal{P}^{[-j,-1]^{\prec}}).$$

Wówczas, wzór (3.11) możemy zapisać w postaci

$$H(\mu_{\prec}, \mathcal{P}^{[j]^{\prec}}|\mathcal{P}^{[0,j-1]^{\prec}}) = J(j^{\prec}(\prec)).$$

Oczywiście J jest ograniczona przez $\log |\mathcal{P}|$. Możemy więc skorzystać z Lematu 3.2.6, otrzymując:

$$\int H(\mu_{\prec}, \mathcal{P}^{[0]^{\prec}}|\mathcal{P}^{[-j,-1]^{\prec}})\mathrm{d}\nu = \int H(\mu_{\prec}, \mathcal{P}^{[j]^{\prec}}|\mathcal{P}^{[0,j-1]^{\prec}})\mathrm{d}\nu. \tag{3.12}$$

[7] Korzystamy tu z łatwego do udowodnienia faktu, że dezintegracja miary μ względem przekształcenia mierzalnego φ jest wyznaczona jednoznacznie . Ponieważ miara μ jest niezmiennicza, można pokazać, że dla każdego $g \in G$ odwzorowanie $\tilde{\mathcal{O}} \ni \prec \mapsto \mu_{g(\prec)} \circ g$ zadawałoby inną dezintegrację miary μ. Ponieważ jednak, z dokładnością do miary ν, dezintegracja jest wyznaczona jednoznacznie, więc dla ν-prawie każdego $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$ musi zachodzić $\mu_{\prec} = \mu_{g(\prec)} \circ g$. Skoro zaś elementów $g \in G$ jest przeliczalnie wiele, więc dla ν-prawie każdego $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$, równość $\mu_{\prec} = \mu_{g(\prec)} \circ g$ zachodzi dla wszystkich $g \in G$.

Rozwijając teraz we wzorze (3.7) entropię $H(\mu_\prec, \mathcal{P}^{[0,n]^\prec})$ według formuły (3.8) i stosując równość (3.12) oraz twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej, otrzymujemy

$$\bar{h}(\mu, \mathcal{P}, \varphi) = \int \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} H(\mu_\prec, \mathcal{P}|\mathcal{P}^{[-j,-1]^\prec})\,\mathrm{d}\nu$$

(ponieważ $0^\prec = e$, więc $\mathcal{P}^{[0]^\prec} = \mathcal{P}$). Zauważmy ponadto, że dla każdego $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$, ciąg wartości $H(\mu, \mathcal{P}|\mathcal{P}^{[-j,-1]^\prec})$, indeksowany $j \in \mathbb{N}$, jest nierosnący oraz zbiega do $H(\mu_\prec, \mathcal{P}|\mathcal{P}_\prec^-)$ (zob. [9, Lemat 1.7.11]). Zatem, z monotoniczności, ciąg średnich arytmetycznych $\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} H(\mu_\prec, \mathcal{P}|\mathcal{P}^{[-j,-1]^\prec})$ również zbiega do tej samej wartości $H(\mu_\prec, \mathcal{P}|\mathcal{P}_\prec^-)$. Otrzymujemy tym samym, że

$$\bar{h}(\mu, G, \mathcal{P}) = \int H(\mu_\prec, \mathcal{P}|\mathcal{P}_\prec^-)\mathrm{d}\nu. \tag{3.13}$$

W identyczny sposób dowodzi się, że zachodzi równość

$$\bar{h}(\mu, G, \mathcal{P}) = \int H(\mu_\prec, \mathcal{P}|\mathcal{P}_\prec^+)\mathrm{d}\nu. \tag{3.14}$$

Pozostaje nam pokazać, że $\bar{h}(\mu, G, \mathcal{P}) = h(\mu, G, \mathcal{P}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}})$. Udowodnimy osobno dwie nierówności.

Ustalmy ciąg Følnera $(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ oraz ciąg liczb dodatnich $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ zbieżny do 0. Ustalmy również $m \in \mathbb{N}$. Oznaczmy przez K zbiór F_m^{-1} oraz przez ε liczbę ε_m. Z własności Følnera multiporządku $\tilde{\mathcal{O}}$ wynika, że istnieją zbiór $\tilde{\mathcal{O}}' \subset \tilde{\mathcal{O}}$ spełniający $\nu(\tilde{\mathcal{O}}') > 1 - \varepsilon$, oraz $n_0 \in \mathbb{N}$, takie że dla każdego $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}'$ i każdego $n \geq n_0$ odcinek $[0, n]^\prec$ jest $(K, \frac{\varepsilon}{|K|})$)-niezmienniczy. Wówczas K-rdzeń $([0,n]^\prec)_K$ ma liczność co najmniej $(1-\varepsilon)(n+1)$. Zatem dla każdego $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}'$ mamy

$$H(\mu_\prec, \mathcal{P}^{[0,n]^\prec}) \leq H(\mu_\prec, \mathcal{P}^{([0,n]^\prec)_K}) + \varepsilon_m(n+1)\log|\mathcal{P}|. \tag{3.15}$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int H(\mu_\prec, \mathcal{P}^{[0,n]^\prec})\mathrm{d}\nu = \int_{\tilde{\mathcal{O}}'} H(\mu_\prec, \mathcal{P}^{[0,n]^\prec})\mathrm{d}\nu + \int_{\tilde{\mathcal{O}}\setminus\tilde{\mathcal{O}}'} H(\mu_\prec, \mathcal{P}^{[0,n]^\prec})\mathrm{d}\nu \leq \\ \int_{\tilde{\mathcal{O}}'} H(\mu_\prec, \mathcal{P}^{[0,n]^\prec})\mathrm{d}\nu + \varepsilon(n+1)\log|\mathcal{P}| \leq \\ \int H(\mu_\prec, \mathcal{P}^{([0,n]^\prec)_K})\mathrm{d}\nu + 2\varepsilon(n+1)\log|\mathcal{P}|.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Zauważmy, że dla każdego $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$ element $h \in ([0,n]^\prec)_K$ należy do zbioru Kg^{-1} dla pewnego $g \in [0,n]^\prec$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g \in Kh$. Ponieważ zaś $Kh \subset [0,n]^\prec$, więc takich elementów $g \in [0,n]^\prec$ jest dokładnie $|K|$. Zatem rodzina $\{K^{-1}g : g \in [0,n]^\prec\}$ jest tak zwanym $|K|$-pokryciem zbioru $([0,n]^\prec)_K$. Stosując Nierówność Shearera (zob. [11, Sekcja 2]), otrzymujemy następujące oszacowanie

$$H(\mu_\prec, \mathcal{P}^{([0,n]^\prec)_K}) \leq \frac{1}{|K|} \sum_{g\in[0,n]^\prec} H(\mu_\prec, \mathcal{P}^{K^{-1}g}). \tag{3.17}$$

Wstawiając (3.17) do (3.16), dostajemy

$$\int H(\mu_\prec, \mathcal{P}^{[0,n]^\prec})\mathrm{d}\nu \leq \int \frac{1}{|K|} \sum_{g\in[0,n]^\prec} H(\mu_\prec, \mathcal{P}^{K^{-1}g})\mathrm{d}\nu + 2\varepsilon(n+1)\log|\mathcal{P}|. \tag{3.18}$$

Z niezmienniczości dezintegracji (3.9) mamy

$$H(\mu_\prec, \mathcal{P}^{K^{-1}g}) = H(\mu_{g(\prec)}, g(\mathcal{P}^{K^{-1}g})).$$

Na mocy (3.10) zachodzi ponadto równość $g(\mathcal{P}^{K^{-1}g}) = \mathcal{P}^{K^{-1}}$. Oznaczywszy $g \in [0,n]^\prec$ przez $j^\prec$, gdzie $j \in [0,n]$, możemy nierówność (3.18) zapisać w postaci

$$\int H(\mu_\prec, \mathcal{P}^{[0,n]^\prec})\mathrm{d}\nu \le \frac{1}{|K|}\sum_{j\in[0,n]}\int H(\mu_{j^\prec(\prec)}, j^\prec(\mathcal{P}^{K^{-1}}))\mathrm{d}\nu + 2\varepsilon(n+1)\log|\mathcal{P}|. \tag{3.19}$$

Stosując teraz Lemat 3.2.6 dla funkcji $J(\prec) = H(\mu_\prec, \mathcal{P}^{K^{-1}})$, otrzymujemy

$$\int H(\mu_{j^\prec(\prec)}, j^\prec(\mathcal{P}^{K^{-1}}))\mathrm{d}\nu = \int H(\mu_\prec, \mathcal{P}^{K^{-1}})\mathrm{d}\nu,$$

gdzie wyrażenie po prawej stronie równości nie zależy od j. Sumowanie po $j \in [0,n]$ w (3.19) można więc zastąpić mnożeniem przez $(n+1)$. Podzieliwszy obie strony nierówności (3.19) przez $(n+1)$, dostajemy

$$\frac{1}{n+1}\int H(\mu_\prec, \mathcal{P}^{[0,n]^\prec})\mathrm{d}\nu \le \frac{1}{|K|}\int H(\mu_\prec, \mathcal{P}^{K^{-1}})\mathrm{d}\nu + 2\varepsilon\log|\mathcal{P}| =$$
$$\frac{1}{|K|}H(\mu, \mathcal{P}^{K^{-1}}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}) + 2\varepsilon\log|\mathcal{P}|,$$

gdzie ostatnia równość wynika ze wzoru na entropię warunkową (pod warunkiem podsigma-ciała niezmienniczego) obliczaną przez dezintegrację miary (zob. na przykład [9, wzór (1.5.4)]). Zastąpiwszy teraz z powrotem K przez F_m oraz ε przez ε_m otrzymujemy

$$\frac{1}{n+1}\int H(\mu_\prec, \mathcal{P}^{[0,n]^\prec})\mathrm{d}\nu \le \frac{1}{|F_m|}H(\mu, \mathcal{P}^{F_m}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}) + 2\varepsilon_m\log|\mathcal{P}|. \tag{3.20}$$

Przechodząc teraz po lewej stronie nierówności (3.20) do granicy z $n \to \infty$ oraz po prawej stronie do granicy z $m \to \infty$ otrzymujemy

$$\bar{h}(\mu, G, \mathcal{P}) \le h(\mu, G, \mathcal{P}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}). \tag{3.21}$$

Udowodnimy teraz przeciwną nierówność. Niech $(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem Følera na G. Ustalmy $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ oraz $\varepsilon > 0$. Dla każdego $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$, rodzina zbiorów

$$\{[g, g+n]^\prec : g \in [F_m - n, F_m]^\prec\}$$

jest $(n+1)$-pokryciem zbioru F_m. Możemy więc, i w tym przypadku, skorzystać z Nierówności Shearera, otrzymując

$$H(\mu_\prec, \mathcal{P}^{F_m}) \le \frac{1}{n+1}\sum_{g\in[F_m-n,F_m]^\prec} H(\mu_\prec, \mathcal{P}^{[g,g+n]^\prec}).$$

Na mocy Lematu 3.2.5, jeżeli m jest dostatecznie duże, to istnieje zbiór $\tilde{\mathcal{O}}'_m \subset \tilde{\mathcal{O}}$ spełniający $\nu(\tilde{\mathcal{O}}'_m) > 1 - \varepsilon$, taki że dla każdego $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}'_m$ zachodzi

$$|[F_m - n, F_m]^\prec \setminus F_m| \le \varepsilon|F_m|.$$

Zatem,

$$\begin{gathered}
H(\mu_{\prec}, \mathcal{P}^{F_m}) \leq \\
\frac{1}{n+1}\Big(\sum_{g\in F_m} H(\mu_{\prec}, \mathcal{P}^{[g,g+n]^{\prec}}) + \sum_{g\in[F_m-n,F_m]^{\prec}\setminus F_m} H(\mu_{\prec}, \mathcal{P}^{[g,g+n]^{\prec}})\Big) \leq \\
\frac{1}{n+1}\sum_{g\in F_m} H(\mu_{\prec}, \mathcal{P}^{[g,g+n]^{\prec}}) + \varepsilon|F_m|\log|\mathcal{P}|.
\end{gathered}$$

Ze wzorów (3.9) oraz (3.10) mamy, że dla każdego $g \in G$ zachodzi

$$H(\mu_{\prec}, \mathcal{P}^{[g,g+n]^{\prec}}) = H(\mu_{g(\prec)}, g(\mathcal{P}^{[g,g+n]^{\prec}})) = H(\mu_{g(\prec)}, \mathcal{P}^{[g,g+n]^{\prec}\cdot g^{-1}}).$$

Stosując wzory (2.6) i (2.7), dostajemy ponadto, że $[g, g+n]^{\prec} \cdot g^{-1} = [0, n]^{g(\prec)}$. Stąd otrzymujemy nierówność

$$H(\mu_{\prec}, \mathcal{P}^{F_m}) \leq \frac{1}{n+1}\sum_{g\in F_m} H(\mu_{g(\prec)}, \mathcal{P}^{[0,n]^{g(\prec)}}) + \varepsilon|F_m|\log|\mathcal{P}|. \tag{3.22}$$

Korzystając ponownie ze wzoru na entropię warunkową liczoną przez dezintegrację miary, otrzymujemy

$$\begin{gathered}
H(\mu, \mathcal{P}^{F_m}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}) = \int H(\mu_{\prec}, \mathcal{P}^{F_m})\mathrm{d}\nu = \\
\int_{\tilde{\mathcal{O}}'_m} H(\mu_{\prec}, \mathcal{P}^{F_m})\mathrm{d}\nu + \int_{\tilde{\mathcal{O}}\setminus\tilde{\mathcal{O}}'_m} H(\mu_{\prec}, \mathcal{P}^{F_m})\mathrm{d}\nu \leq \\
\int_{\tilde{\mathcal{O}}'_m} H(\mu_{\prec}, \mathcal{P}^{F_m})\mathrm{d}\nu + \varepsilon|F_m|\log|\mathcal{P}|.
\end{gathered} \tag{3.23}$$

Ze wzoru (3.22) oraz G-niezmienniczości miary ν mamy ponadto

$$\begin{gathered}
\int_{\tilde{\mathcal{O}}'_m} H(\mu_{\prec}, \mathcal{P}^{F_m})\mathrm{d}\nu \leq \int_{\tilde{\mathcal{O}}'_m} \frac{1}{n+1}\sum_{g\in F_m} H(\mu_{g(\prec)}, \mathcal{P}^{[0,n]^{g(\prec)}}) + \varepsilon|F_m|\log|\mathcal{P}| = \\
\frac{1}{n+1}\sum_{g\in F_m}\int_{\tilde{\mathcal{O}}'_m} H(\mu_{\prec}, \mathcal{P}^{[0,n]^{\prec}}) + \varepsilon|F_m|\log|\mathcal{P}| \leq \\
\frac{|F_m|}{n+1}\int H(\mu_{\prec}, \mathcal{P}^{[0,n]^{\prec}}) + \varepsilon|F_m|\log|\mathcal{P}|.
\end{gathered} \tag{3.24}$$

Wstawiając (3.2) do wzoru (3.23), dostajemy

$$H(\mu, \mathcal{P}^{F_m}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}) \leq \frac{|F_m|}{n+1}\int H(\mu_{\prec}, \mathcal{P}^{[0,n]^{\prec}}) + 2\varepsilon|F_m|\log|\mathcal{P}|. \tag{3.25}$$

Po podzieleniu obu stron nierówności (3.25) przez $|F_m|$ i przejściu do granicy z $m \to \infty$, otrzymujemy ostatecznie

$$h(\mu, \mathcal{P}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}) \leq \bar{h}(\mu, G, \mathcal{P}) + 2\varepsilon\log|\mathcal{P}|. \tag{3.26}$$

Ponieważ jednak $\varepsilon > 0$ był dowolny, więc wyrażenie $2\varepsilon\log|\mathcal{P}|$ po prawej stronie nierówności może zostać pominięte. Pokazaliśmy tym samym, że $h(\mu, \mathcal{P}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}) \leq \bar{h}(\mu, G, \mathcal{P})$, co kończy dowód. ■

3.3 Zachowywanie entropii warunkowej przez orbitalną równoważność zadaną przez multiporządek

Podrozdział ten jest poświęcony dowodowi twierdzenia mówiącego, że w układzie multiuporządkowanym, orbitalna równoważność z działaniem $\mathbb{Z}$ zadanym przez iteracje przekształcenia następnika S, która została omówiona w podrozdziale 2.2, zachowuje entropię warunkową pod warunkiem wspólnego faktora będącego multiporządkiem. W dowodzie twierdzenia wykorzystamy udowodniony w poprzednim podrozdziale wzór na entropię warunkową obliczaną wzdłuż multiporządku. Twierdzenie to jest szczególnym przypadkiem znanego twierdzenia udowodnionego przez D. Rudolpha i B. Weissa [27, Twierdzenie 2.6]. Jak się jednak okazuje, przy pewnej (nieznacznej) modyfikacji założeń oba twierdzenia są równoważne, co zostanie pokazane w kolejnym podrozdziale.

Twierdzenie 3.3.1. *Niech (X, μ, G, φ) będzie układem multiuporządkowanym z multiporządkiem $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$ będącym faktorem (X, μ, G). Niech S będzie przekształceniem następnika zdefiniowanym wzorem* (2.11). *Dla każdego skończonego, mierzalnego rozbicia $\mathcal{P}$ przestrzeni X zachodzi wzór*

$$h(\mu, G, \mathcal{P}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}) = h(\mu, \mathbb{Z}, \mathcal{P}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}), \tag{3.27}$$

gdzie $h(\mu, G, \mathcal{P}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}})$ jest entropią warunkową (pod warunkiem $\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}$) procesu $(X, \mu, \mathcal{P}, G)$ generowanego przez rozbicie $\mathcal{P}$ pod działaniem grupy G, a $h(\mu, \mathbb{Z}, \mathcal{P}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}})$ jest entropią warunkową procesu $(X, \mu, \mathcal{P}, S)$ generowanego przez rozbicie $\mathcal{P}$ pod działaniem $\mathbb{Z}$ zadanym przez iteracje przekształcenia S.

Dowód. Niech $\mathcal{P}$ będzie skończonym mierzalnym rozbiciem przestrzeni X. Dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ symbolem $\mathcal{P}^{(-\infty,-n]^S}$ oznaczać będziemy połączenie $\bigvee_{k\geq n} S^k(\mathcal{P})$. Rozpoczniemy od pokazania, że dla ν-prawie każdego $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$ zachodzi równość

$$\mathcal{P}^{(-\infty,-n]^S}|_{\varphi^{-1}(\prec)} = \mathcal{P}^{(-\infty,-n]^\prec}|_{\varphi^{-1}(\prec)}. \tag{3.28}$$

Ustalmy $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$ oraz $k \in \mathbb{Z}$. Dla każdego zbioru mierzalnego $A \subset X$, na mocy wzoru (2.12), mamy

$$S^k(A) \cap \varphi^{-1}(\prec) = S^k\big(\bigcup_{\prec' \in \tilde{\mathcal{O}}} A \cap \varphi^{-1}(\prec')\big) \cap \varphi^{-1}(\prec) =$$
$$\Big(\bigcup_{\prec' \in \tilde{\mathcal{O}}} S^k(A \cap \varphi^{-1}(\prec'))\Big) \cap \varphi^{-1}(\prec) = \Big(\bigcup_{\prec' \in \tilde{\mathcal{O}}} k^{\prec'}(A \cap \varphi^{-1}(\prec'))\Big) \cap \varphi^{-1}(\prec) =$$
$$\Big(\bigcup_{\prec' \in \tilde{\mathcal{O}}} \big(k^{\prec'}(A) \cap \varphi^{-1}(k^{\prec'}(\prec'))\big)\Big) \cap \varphi^{-1}(\prec).$$

Jedynym porządkiem $\prec' \in \tilde{\mathcal{O}}$, dla którego wyrażenie $k^{\prec'}(A) \cap \varphi^{-1}(k^{\prec'}(\prec'))$ ma niepusty przekrój z $\varphi^{-1}(\prec)$ jest ten, dla którego $k^{\prec'}(\prec') = \prec$. Na mocy wzoru (2.12) (zastosowanego dla przekształcenia następnika $\tilde{S}$ zdefiniowanego dla multiporządku traktowanego jako swoje własne rozszerzenie) mamy $k^{\prec'}(\prec') = \tilde{S}^k(\prec')$. Zatem równość $k^{\prec'}(\prec') = \prec$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\prec' = \tilde{S}^{-k}(\prec) = (-k)^\prec(\prec)$ (ponownie użyliśmy wzoru (2.12) dla $\tilde{S}$). Stosując wzór (2.6), dla $g = (-k)^\prec$, otrzymujemy ponadto, że

$$k^{\prec'} = k^{(-k)^\prec(\prec)} = (k-k)^\prec \cdot \big((-k)^\prec\big)^{-1} = \big((-k)^\prec\big)^{-1}.$$

Ostatecznie zachodzi więc równość

$$S^k(A) \cap \varphi^{-1}(\prec) = \left((-k)^{\prec}\right)^{-1}(A) \cap \varphi^{-1}(A). \tag{3.29}$$

Wynika stąd, że $S^k(\mathcal{P})|_{\varphi^{-1}(\mathcal{P})} = \left((-k)^{\prec}\right)^{-1}|_{\varphi^{-1}(\prec)}$ oraz, że dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ zachodzi

$$\mathcal{P}^{(-\infty,-n]^S}|_{\varphi^{-1}(\prec)} = \bigvee_{k \geq n} \mathcal{S}^k(\mathcal{P})|_{\varphi^{-1}(\prec)} =$$

$$\bigvee_{k \geq n} \left((-k)^{\prec}\right)^{-1}(\mathcal{P})|_{\varphi^{-1}(\prec)} = \mathcal{P}^{(-\infty,-n]^{\prec}}|_{\varphi^{-1}(\prec)}.$$

W szczególności

$$\mathcal{P}^{(-\infty,-1]^S}|_{\varphi^{-1}(\prec)} = \mathcal{P}^{-}_{\prec}|_{\varphi^{-1}(\prec)}. \tag{3.30}$$

Stosując równość (3.30) we wzorze (3.2) na entropię warunkową z Twierdzenia 3.2.1, otrzymujemy

$$h(\mu, G, \mathcal{P}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}) = \int H(\mu_{\prec}, \mathcal{P}|\mathcal{P}^{-}_{\prec})\mathrm{d}\nu = \int H(\mu_{\prec}, \mathcal{P}|\mathcal{P}^{(-\infty,-1]^S})\mathrm{d}\nu.$$

Ze wzoru na entropię warunkową obliczaną przez dezintegrację miary μ[8] mamy natomiast

$$\int H(\mu_{\prec}, \mathcal{P}|\mathcal{P}^{(-\infty,-1]^S})\mathrm{d}\nu = H(\mu, \mathcal{P}|\mathcal{P}^{(-\infty,-1]^S}) = h(\mu, \mathbb{Z}, \mathcal{P}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}).$$

Ostatecznie więc, otrzymaliśmy, że $h(\mu, G, \mathcal{P}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}) = h(\mu, \mathbb{Z}, \mathcal{P}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}})$. ■

Wniosek 3.3.2. *Niech (X, μ, G, φ) będzie układem multiuporządkowanym z multiporządkiem $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$ będącym faktorem (X, μ, G) przez odwzorowanie φ. Na mocy twierdzenia 2.2.7, układ (X, μ, G) jest orbitalnie równoważny z układem (X, μ, S), gdzie S jest przekształceniem następnika zdefiniowanym wzorem (2.11). Z Twierdzenia 2.2.7 wynika również, że multiporządek $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu)$, rozważany teraz jako układ z działaniem $\mathbb{Z}$ zadanym przez iteracje przekształcenia $\tilde{S}$ zdefiniowanego wzorem 2.13, także jest faktorem (X, μ, S) poprzez to samo odwzorowanie φ. Wiadomym jest, że dwa układy orbitalnie równoważne mogą mieć różne entropie. Jednakże, w tym przypadku, jeżeli $h(\mu, S) < \infty$ (wówczas mamy również $h(\nu, \tilde{S}) < \infty$), to z Twierdzenia 3.3.1 wynika, że*

$$h(\mu, G) - h(\mu, S) = h(\nu, G) - h(\nu, \tilde{S}),. \tag{3.31}$$

Innymi słowy, to multiporządek będący wspólnym faktorem układów (X, μ, G) i (X, μ, S) jest odpowiedzialny za różnicę ich entropii.

Przykład 3.3.3. W ogólności nie zachodzi równość pomiędzy $h(\mu, G)$ oraz $h(\mu, S)$. W istocie, niech (X_1, μ_1, T_1) oraz (X_2, μ_2, T_2) będą dwoma układami z działaniami $\mathbb{Z}$ zadanymi przez iteracje odpowiednio T_1 i T_2, gdzie miary μ_1 i μ_2 są ergodyczne i bezatomowe. Załóżmy ponadto, że $h(\mu_1, T_1) < h(\mu_2, T_2)$. Na mocy Twierdzenia Dye'a [15, Twierdzenie 9] oba układy są orbitalnie równoważne. Możemy ponadto założyć, że $X_1 = X_2 := X$ oraz że $\mu_1 = \mu_2 := \mu$ oraz że orbitalna równoważność jest zadana przez odwzorowanie identycznościowe (patrz komentarz pod Definicją 2.8). Na mocy Wniosku 2.2.10, układ (X, μ, T_1) posiada faktor będący multiporządkiem oraz związane z nim przekształcenie następnika S jest równe T_2. Zachodzi więc $h(\mu_1, T_1) > h(\mu_1, S)$.

[8] Zobacz na przykład [26, strona 255]. Zaprezentowany tam dowód stosuje się bez zmian dla przypadku warunkowania dodatkowym sigma-ciałem niezmienniczym.

3.4 Dowód Twierdzenia Rudolpha-Weissa przy użyciu multiporządków

Jak wspomnieliśmy w poprzednim podrozdziale, Twierdzenie 3.3.1 wynika z ogólniejszego twierdzenia udowodnionego przez D. Rudolpha i B. Weissa, którego treść podajemy poniżej.

Twierdzenie 3.4.1. *[27, Twierdzenie 2.6] Niech (X, μ, G) oraz (X, μ, Γ) będą dwoma orbitalnie równoważnymi układami dynamicznymi z wolnymi działaniami grup ze średnią G oraz Γ. Niech (Y, ν, G) będzie faktorem (X, μ, G) i niech Σ_Y będzie związanym z nim G-niezmienniczym sigma-ciałem na X. Załóżmy, że zmiana orbit między działaniami G na X oraz Γ na X jest Σ_Y-mierzalna, tzn. że dla dowolnych $\gamma \in \Gamma$ oraz $g \in G$, zbiór $\{x \in X : g(x) = \gamma(x)\}$ należy do Σ_Y. Wówczas Σ_Y jest Γ-niezmiennicze oraz zachodzi*

$$h(\mu, G|\Sigma_Y) = h(\mu, \Gamma|\Sigma_Y). \tag{3.32}$$

Sformułujemy teraz nieco zmodyfikowaną wersję Twierdzenia 3.4.1, którą udowodnimy wykorzystując nasze Twierdzenie 3.3.1.

Twierdzenie 3.4.2. *Niech (X, μ, G) oraz (X, μ, Γ) będą dwoma orbitalnie równoważnymi układami dynamicznymi z działaniem grup ze średnią G oraz Γ. Niech Σ_Y będzie pod-sigma-ciałem na X, niezmienniczym na działania obu grup G oraz Γ i niech (Y, ν) będzie odpowiadającym mu faktorem. Załóżmy ponadto, że działania obu grup na (Y, ν) są wolne. Zachodzi wówczas równość*

$$h(\mu, G|\Sigma_Y) = h(\mu, \Gamma|\Sigma_Y). \tag{3.33}$$

Względem Twierdzenia 3.4.1, w Twierdzeniu 3.4.2 wprowadzono dwie modyfikacje w założeniach.

(i) W Twierdzeniu 3.4.1 zakładamy, że działania obu grup G i Γ na (X, μ) są wolne. Natomiast, w Twierdzeniu 3.4.2 zakładamy, że wolne są działania grup G i Γ na wspólnym faktorze (Y, ν) układów (X, μ, G) i (X, μ, Γ). Jest to oczywiście mocniejsze założenie.

(ii) Założenie o Σ_Y-mierzalności zmiany orbit występujące w Twierdzeniu 3.4.1 zastępujemy w Twierdzeniu 3.4.2, założeniem, że Σ_Y jest niezmiennicze względem działań obu grup G i Γ. Na pierwszy rzut oka drugie założenie jest słabsze.

Kolejny lemat pokazuje, że choć w świetle zmiany ii, założenia w Twierdzeniu 3.4.2 są słabsze, to w połączeniu ze zmianą (i), ostatecznie tak nie jest.

Lemat 3.4.3. *Niech (X, μ, G) oraz (X, μ, Γ) będą dwoma orbitalnie równoważnymi układami dynamicznymi z działaniami grup ze średnią G oraz Γ. Zachodzą wówczas poniższe implikacje.*

a) Jeżeli (Y, ν, G) jest faktorem (X, μ, G) (czyli związane z nim sigma-ciało Σ_Y jest G-niezmienniczym pod-sigma-ciałem na X) i zmiana orbit między działaniami G oraz Γ jest Σ_Y-mierzalna, to wówczas Σ_Y jest Γ-niezmiennicze (czyli (Y, ν, Γ) jest faktorem (X, μ, Γ)).

b) Jeżeli Σ_Y jest pod-sigma-ciałem na X, niezmienniczym względem działań obu grup G i Γ, takim że działanie przynajmniej jednej z tych grup, na związanym z Σ_Y faktorze (Y, ν) jest wolne, to wówczas zmiana orbit między (X, μ, G) i (X, μ, Γ) jest Σ_Y-mierzalna.

Dowód. a) Ustalmy dowolne $A \in \Sigma_Y$ oraz $\gamma \in \Gamma$. Jeżeli (Y, ν, G) jest faktorem (X, μ, G), to prawdziwa jest równość

$$\gamma^{-1}(A) = \{x \in X : \gamma(x) \in A\} = \bigcup_{g \in G} \big(\{x \in X : \gamma(x) = g(x)\} \cap g^{-1}(A)\big).$$

Z założenia zmiana orbit jest Σ_Y-mierzalna, więc $\{x \in X : \gamma(x) = g(x)\}$ należy do Σ_Y. Z G-niezmienniczości Σ_Y, również $g^{-1}(A)$ należy do Σ_Y. Zatem $\gamma^{-1}(A) \in \Sigma_Y$. Z dowolności A oraz $\gamma \in \Gamma$ mamy więc, że Σ_Y jest Γ-niezmiennicze.

b) Załóżmy, że Σ_Y jest pod-sigma-ciałem na X, które jest jednocześnie G-niezmiennicze oraz Γ-niezmiennicze. Niech π będzie faktor-odwzorowaniem z (X, μ) w (Y, ν) (zauważmy, że jest ono takie samo dla działań obu grup). Załóżmy, że działanie jednej z grup (niech będzie to G) na (Y, ν) jest wolne. Ustalmy $\gamma \in \Gamma$ oraz $y \in Y$. Niech x oraz x' będą dwoma punktami należącymi do tego samego włókna $\pi^{-1}(y)$. Załóżmy ponadto, że pewne dwa elementy $g, g' \in G$ spełniają jednocześnie $g(x) = \gamma(x)$ oraz $g'(x') = \gamma(x')$. Pokażemy, że w takiej sytuacji musi zachodzić $g = g'$. Oznaczać to będzie, że zmiana orbit jest stała na włóknach π, czyli że jest Σ_Y-mierzalna. W istocie, mamy (wielokrotnie użyjemy tu własności faktor-odwzorowania π)

$$\begin{gathered} g'(y) = g'(\pi(x')) = \pi(g'(x')) = \pi(\gamma(x')) = \gamma(\pi(x')) = \gamma(y) = \\ \gamma(\pi(x)) = \pi(\gamma(x)) = \pi(g(x)) = g(\pi(x)) = g(y). \end{gathered}$$

Ponieważ działanie G na (Y, ν) jest wolne, więc z powyższych równości wynika, że $g = g'$.

■

Z podpunktu a) Lematu 3.4.3 wynika, że Twierdzenie 3.4.2 jest szczególnym przypadkiem Twierdzenia 3.4.1, gdyż Σ_Y-mierzalność zmiany orbit oraz niezmienniczość Σ_Y względem działania jednej z grup implikują niezmienniczość tego sigma-ciała względem działania drugiej grupy. Do zachodzenia przeciwnej implikacji, jak w podpunkcie b), konieczne jest jednak dodatkowe założenie, że działanie przynajmniej jednej grupy na faktorze (Y, ν) jest wolne, co pokazuje poniższy przykład.

Przykład 3.4.4. Niech (X, μ, T) będzie dowolnym układem dynamicznym z wolnym działaniem $\mathbb{Z}$ (danym przez iteracje przekształcenia T) i niech układ (Y, ν, ϕ) będzie zadany następująco: $Y = \{0, 1\}$, $\nu(\{0\}) = \nu(\{1\}) = \frac{1}{2}$ i $\phi(y) = 1 - y$. Na $Y \times X$ rozważmy następujące przekształcenie (produkt skośny):

$$T_\phi(y, x) = \begin{cases} (\phi(y), x), & \text{gdy } y = 0, \\ (\phi(y), T(x)), & \text{gdy } y = 1, \end{cases}$$

które zadaje działanie grupy $\mathbb{Z}$ na $Y \times X$. Rozważmy również działanie grupy produktowej $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ na tej samej przestrzeni $Y \times X$, zadane wzorem

$$(m, n)(y, x) = (\phi^m(y), T^n(x)), \quad m \in \mathbb{Z}_2, \; n \in \mathbb{Z}.$$

Oba podane działania są wolne oraz mają takie same orbity. Na $\{0\} \times X$ mamy $T_\phi(y, x) = (1, 0)(y, x)$, podczas gdy na $\{1\} \times X$ mamy $T_\phi(y, x) = (1, 1)(y, x)$. Trywialne sigma-ciało Σ_{triv} na $Y \times X$ jest oczywiście niezmiennicze względem obu podanych działań, jednakże oba zbiory $\{0\} \times X$ oraz $\{1\} \times X$ nie są Σ_{triv}-mierzalne, więc zmiana orbit nie jest Σ_{triv}-mierzalna. Oczywiście żadne z wymienionych działań nie jest wolne na jednopunktowym faktorze generowanym przez sigma-ciało Σ_{triv}

Twierdzenie 3.4.1 jest zatem bardziej ogólne niż Twierdzenie 3.4.2. Przykład (bardzo prosty) układów, które spełniają założenia Twierdzenia 3.4.1, lecz nie spełniają założeń Twierdzenia 3.4.2 podany jest poniżej.

Przykład 3.4.5. Rozważmy dwie kopie tego samego układu (X, μ, G) z wolnym działaniem przeliczalnej grupy ze średnią G (czyli dwa układy (X, μ, G) oraz (X, μ, Γ), gdzie $G = \Gamma$ i oba działania są takie same). Niech $\Sigma_Y = \{X, \varnothing\}$ będzie trywialnym sigma-ciałem (które oczywiście generuje trywialny faktor (Y, Σ_Y, ν) obu zadanych układów). Oczywiście, w tym przypadku zbiory $\{x \in X : g(x) = g'(x)\}$ są albo równe X (gdy $g = g'$), albo $\varnothing$ (gdy $g \neq g'$). Zatem zmiana orbit jest Σ_Y-mierzalna i spełnione są założenia Twierdzenia 3.4.1. Nie są spełnione jednak założenia Twierdzenia 3.4.2, gdyż żadne działanie nietrywialnej grupy na (Y, Σ_Y, ν) nie jest wolne.

Udowodnimy teraz Twierdzenie 3.4.2 przy pomocy multiporządków. W dowodzie posłużymy się następującym lematem.

Lemat 3.4.6. *Niech (X, μ, G) będzie układem dynamicznym z działaniem przeliczalnej grupy ze średnią G. Niech (Y, ν, G) będzie faktorem (X, μ, G) przez przekształcenie $\pi : X \to Y$. Załóżmy też, że działanie G na (Y, ν) jest wolne. Niech (Y, ν, Γ) będzie układem z działaniem przeliczalnej grupy ze średnią Γ na (Y, ν), które ma takie same orbity co (Y, ν, G). Wówczas istnieje jednoznacznie wyznaczony układ (X, μ, Γ), który jest rozszerzeniem (Y, ν, Γ) przez przekształcenie π i mający takie same orbity co (X, μ, G). Działanie Γ na tym rozszerzeniu zadane jest wzorem*

$$\gamma(x) = g(x), \tag{3.34}$$

gdzie g jest (unikalnym) elementem G, takim że $g(\pi(x)) = \gamma(\pi(x))$.

Dowód. Oczywiście wzór (3.34) definiuje poprawne działanie grupy Γ na (X, μ). Ponadto układ (X, μ, Γ), z tym działaniem, jest rozszerzeniem układu (Y, ν, Γ) przez π i ma takie same orbity co (X, μ, G). Ponieważ działanie G na (Y, ν) jest wolne, więc na mocy Lematu 3.4.3, zmiana orbit między (X, μ, Γ) i (X, μ, G) jest Σ_Y-mierzalna (Σ_Y, podobnie jak wcześniej, jest pod-sigma-ciałem niezmienniczym związanym z faktorem (Y, ν)). Oznacza to, że dla każdego $\gamma \in \Gamma$ oraz każdego $x \in X$ zachodzi $\gamma(x) = g(x)$, gdzie g jest (unikalnym) elementem G spełniającym $\gamma(\pi(x)) = g(\pi(x))$. ∎

Dowód Twierdzenia 3.4.2. Załóżmy, że działania grup G oraz Γ na (Y, ν) są wolne. Jeżeli ν jest miarą niezmienniczą, lecz nie jest miarą ergodyczną, to jej rozkład ergodyczny nie zależy od działania grupy. Ponieważ działania obu grup są wolne względem ν, więc muszą być wolne względem prawie każdej miary ergodycznej ξ występującej w rozkładzie ergodycznym ν. Wystarczy więc założyć, że ν jest ergodyczna.

Na mocy Twierdzenia Ornsteina-Weissa [25, Twierdzenie 6] oraz Twierdzenia Dye'a [15, Twierdzenie 9], istnieje układ (Y, ν, T) z działaniem $\mathbb{Z}$ zadanym przez iteracje T, o entropii zero i takich samych orbitach co (Y, ν, G) (a zatem ma również takie same orbity co (Y, ν, Γ)).

Ponieważ działanie G na (Y,ν) jest wolne, więc na mocy Wniosku 2.2.10 istnieje multiporządek $(\tilde{\mathcal{O}}_G,\nu_G,G)$ będący faktorem (Y,ν,G) przez odwzorowanie φ_G, dla którego T jest równe przekształceniu następnika S_G związanym z multiporządkiem $\tilde{\mathcal{O}}_G$. Analogicznie, istnieje multiporządek $(\tilde{\mathcal{O}}_\Gamma,\nu_\Gamma,\Gamma)$, będący faktorem (Y,ν,Γ) przez przekształcenie φ_Γ, dla którego $T=S_\Gamma$, gdzie S_Γ jest przekształceniem następnika związanym z $\tilde{\mathcal{O}}_\Gamma$. Oba te multiporządki są faktorami odpowiednio (X,μ,G) oraz (X,μ,Γ) przez przekształcenia odpowiednio $\varphi_G\circ\pi$ oraz $\varphi_\Gamma\circ\pi$. Z multiporządkami tymi są związane (a priori różne) przekształcenia następnika na (X,μ,G) oraz (X,μ,Γ), które oznaczymy symbolami $\bar{S}_G$ oraz $\bar{S}_\Gamma$. Działania $\mathbb{Z}$ na (X,μ), zadane przez iteracje $\bar{S}_G$ oraz $\bar{S}_\Gamma$, mają takie same orbity co odpowiednio (X,μ,G) oraz (X,μ,Γ). Na mocy Lematu 3.4.6 istnieje jednoznacznie wyznaczone rozszerzenie $(X,\mu,\bar{T})$ układu (X,μ,T), które ma takie same orbity co (X,μ,G) oraz (X,μ,Γ). Naszym celem jest pokazanie, że $\bar{S}_G=\bar{S}_\Gamma$. W tym celu wystarczy pokazać, że oba te przekształcenia są równe $\bar{T}$.

Ustalmy dowolny $x\in X$. Przypomnijmy, że z definicji przekształcenia następnika $\bar{S}_G(x)=1^{\prec}(x)$, gdzie $\prec=(\varphi_G\circ\pi)(x)$. Kładąc $y=\pi(x)$, możemy napisać $\prec=\varphi_G(y)$. Z drugiej strony, stosując wzór (3.34) dla $1\in\mathbb{Z}$, otrzymujemy, że $\bar{T}(x)=g(x)$, gdzie g jest jednoznacznie wyznaczonym elementem G, takim że $g(y)=T(y)$. Skoro zaś $T=S_G$, to zachodzi $g(y)=S_G(y)=1^{\prec}(y)$. Ponieważ działanie G na (Y,ν) jest wolne, więc mamy $g=1^{\prec}$. Stąd, $\bar{T}(x)=1^{\prec}(x)=\bar{S}_G(x)$. Czyli, z dowolności $x\in X$, zachodzi równość $\bar{S}_G=\bar{T}$. Stosując analogiczne rozumowanie, można pokazać, że $\bar{S}_\Gamma=\bar{T}$. Stąd, ostatecznie, $\bar{S}_G=\bar{S}_\Gamma$.

Możemy teraz użyć Twierdzenia 3.3.1 dla czterech układów multiuporządkowanych (Y,ν,G,φ_G), $(Y,\nu,\Gamma,\varphi_\Gamma)$, $(X,\mu,G,\varphi_G\circ\pi)$ oraz $(X,\mu,\Gamma,\varphi_\Gamma\circ\pi)$. W rezultacie otrzymujemy następujące równości

$$\begin{aligned}
h(\nu,G|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}_G}) &= h(\nu,T|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}_G})=0,\\
h(\nu,\Gamma|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}_\Gamma}) &= h(\nu,T|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}_\Gamma})=0,\\
h(\mu,G|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}_G}) &= h(\mu,\bar{T}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}_G}),\\
h(\mu,\Gamma|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}_\Gamma}) &= h(\mu,\bar{T}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}_\Gamma}).
\end{aligned}$$

Stąd mamy również

$$\begin{aligned}
h(\mu,G|\Sigma_Y) &= h(\mu,G|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}_G})-h(\nu,G|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}_G})=h(\mu,G|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}_G})-0=h(\mu,\bar{T}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}_G}),\\
h(\mu,\Gamma|\Sigma_Y) &= h(\mu,\Gamma|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}_\Gamma})-h(\nu,\Gamma|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}_\Gamma})=h(\mu,\Gamma|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}_\Gamma})-0=h(\mu,\bar{T}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}_\Gamma}).
\end{aligned}$$

Ponieważ sigma-ciała $\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}_G}$ oraz $\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}_\Gamma}$ są T-niezmienniczymi pod-sigma-ciałami na Y, więc odpowiadające im faktory mają entropię zero (ponieważ (Y,ν,T) ma entropię zero). Oczywiście są one również faktorami układu $(X,\mu,\bar{T})$, zatem zachodzi

$$h(\mu,\bar{T}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}_G})=h(\mu,\bar{T}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}_\Gamma})=h(\mu,\bar{T}).$$

Stąd otrzymujemy żądaną równość

$$h(\mu,G|\Sigma_Y)=h(\mu,\Gamma|\Sigma_Y)\quad(=h(\mu,\bar{T})).$$

■

Uwaga 3.4.7. Wartym wspomnienia jest, że oba twierdzenia 3.4.1 oraz 3.4.2 są szczególnymi przypadkami ogólniejszego twierdzenia udowodnionego przez A. Danilenkę [7, Twierdzenie 0.3]

3.5 Charakteryzacja sigma-ciała Pinskera procesu przy pomocy multiporządku

Przypomnijmy, że jeżeli (X, μ, T) jest układem dynamicznym z działaniem $\mathbb{Z}$ (danym przez iteracje T), to *sigma-ciałem Pinskera* układu (X, μ, T) nazywamy najmniejsze sigma-ciało zawierające wszystkie mierzalne zbiory $A \subset X$, dla których zachodzi $h(\mu, T, \{A, A^c\}) = 0$. Sigma-ciało to oznaczać będziemy symbolem $\Pi_T(X)$. Możemy też zdefiniować warunkowe sigma-ciało Pinskera, warunkowane pewnym T-niezmienniczym pod-sigma-ciałem Θ na X, czyli najmniejsze sigma-ciało zawierające wszystkie mierzalne zbiory $A \subset X$, które spełniają warunek $h(\mu, T, \{A, A^c\}|\Theta) = 0$. Warunkowe sigma-ciało Pinskera oznaczać będziemy przez $\Pi_T(X|\Theta)$. Jeżeli Σ_Y jest T-niezmienniczym pod-sigma-ciałem na X, a (Y, ν, S) związanym z nim faktorem układu (X, μ, T), to zachodzi $\Pi_S(Y) = \Pi_T(X) \cap \Sigma_Y$ (oraz analogicznie $\Pi_S(Y|\Theta) = \Pi_T(X|\Theta) \cap \Sigma_Y$).[9] W przypadku, gdy (Y, ν, S) jest procesem generowanym przez pewne skończone mierzalne rozbicie $\mathcal{P}$ przestrzeni X pod przekształceniem T, to zamiast $\Pi_S(Y)$ będziemy pisać $\Pi_T(\mathcal{P})$ (i analogicznie zamiast $\Pi_S(Y|\Theta)$ będziemy pisać $\Pi_T(\mathcal{P}|\Theta)$).

Dla tradycyjnych układów dynamicznych (z działaniem $\mathbb{Z}$) znana jest następująca charakteryzacja sigma-ciała Pinskera procesu generowanego przez $\mathcal{P}$.

Twierdzenie 3.5.1 (Rokhlin-Sinai). *Sigma-ciało Pinskera procesu generowanego przez skończone mierzalne rozbicie $\mathcal{P}$ spełnia równości*

$$\Pi_T(\mathcal{P}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}^{(-\infty,-n]} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}^{[n,\infty)}, \tag{3.35}$$

gdzie $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}^{(-\infty,-n]}$ określa się mianem odległej przeszłości *procesu generowanego przez $\mathcal{P}$ a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}^{[n,\infty)}$ określa się mianem* odległej przyszłości *tego procesu.*

Głównym celem tego podrozdziału jest udowodnienie analogicznej charakteryzacji sigma-ciała Pinskera w przypadku układów z działaniami przeliczalnych grup ze średnią. Podobnie jak dla tradycyjnych układów dynamicznych, sigma-ciało Pinskera układu teoriomiarowego (X, μ, G) z działaniem grupy G oznaczać będziemy symbolem $\Pi_G(X)$, natomiast sigma-ciało Pinskera warunkowane G-niezmienniczym pod-sigma-ciałem Θ na X, symbolem $\Pi_G(X|\Theta)$. Analogicznie, sigma-ciało Pinskera procesu generowanego przez skończone mierzalne rozbicie $\mathcal{P}$ oznaczać będziemy symbolem $\Pi_G(\mathcal{P})$ (bądź $\Pi_G(\mathcal{P}|\Theta)$ dla warunkowego sigma-ciała Pinskera).

Rozpoczniemy od udowodnienia, że w układzie multiuporządkowanym, orbitalna równoważność z działaniem $\mathbb{Z}$ danym przez iteracje przekształcenia następnika S, zachowuje warunkowe sigma-ciało Pinskera względem faktora będącego multiporządkiem.

Twierdzenie 3.5.2. *Niech (X, μ, G, φ) będzie multiuporządkowanym układem dynamicznym z działaniem przeliczalnej grupy ze średnią G i niech $\tilde{\mathcal{O}}$ będzie multiporządkiem będącym faktorem (X, μ, G). Wówczas zachodzi równość*

$$\Pi_G(X|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}) = \Pi_S(X|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}), \tag{3.36}$$

gdzie $\Pi_G(X|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}})$ jest sigma-ciałem Pinskera układu (X, μ, G) (z działaniem G) warunkowanym multiporządkiem $\tilde{\mathcal{O}}$, a $\Pi_S(X|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}})$ jest sigma-ciałem Pinskera układu (X, μ, S) (z działaniem $\mathbb{Z}$ danym przez iteracje przekształcenia następnika S) warunkowanym tym samym multiporządkiem.

[9] Oczywiście w tej równości utożsamiamy $\Pi_S(Y)$, które jest pod-sigma-ciałem na Y, z pod-sigma-ciałem na X uzyskanym przez podniesienie $\Pi_S(Y)$ przez faktor-odwzorowanie.

Dowód. Niech $\mathcal{P}$ będzie skończonym mierzalnym rozbiciem przestrzeni X. Wówczas $\mathcal{P}$ jest mierzalna względem $\Pi_G(X|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(\mu, G, \mathcal{P}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}) = 0$, co na mocy Twierdzenia 3.3.1 zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $h(\mu, S, \mathcal{P}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}) = 0$, a z definicji sigma-ciała Pinskera, jest to równoważne temu, że $\mathcal{P}$ jest mierzalna względem $\Pi_S(X|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}})$. ∎

Wniosek 3.5.3. *Jeżeli (X, μ, G, φ) jest układem multiuporządkowanym z działaniem przeliczalnej grupy ze średnią G, takim że multiporządek $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$, będący jego faktorem, ma entropię zero, to sigma-ciało Pinskera (bezwarunkowe) $\Pi_G(X)$ układu (X, μ, G) jest równe $\Pi_S(X|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}})$.*

Uwaga 3.5.4. W ogólności nie mamy żadnego związku między entropią multiporządku jako układu z działaniem G oraz entropią multiporządku jako układu z działaniem $\mathbb{Z}$ danym przez iteracje $\tilde{S}$. Stąd równość $\Pi_G(X) = \Pi_S(X)$ nie musi zachodzić dla każdego układu multiuporządkowanego. Równość ta zachodzi jednak gdy multiporządek $\tilde{\mathcal{O}}$ będący faktorem (X, μ, G) ma „podwójną entropię zero" (istnienie takiego multiporządku dla dowolnej grupy ze średnią uzasadniono we Wniosku 2.2.11).

Udowodnimy teraz najważniejsze twierdzenie tego podrozdziału, mówiące, że sigma-ciało Pinskera procesu w dowolnym układzie z działaniem przeliczalnej grupy ze średnią G (niekoniecznie multiuporządkowanym) można scharakteryzować przy pomocy odległej przeszłości tego procesu wyznaczonej wzdłuż prawie każdego porządku należącego do dowolnego multiporządku na G. Jest to tym samym odpowiednik przytoczonego wcześniej Twierdzenia Rokhlina-Sinaia (Twierdzenie 3.5.1). Wynik ten rzuca również nowe światło na przypadek tradycyjnych układów dynamicznych (z działaniem $\mathbb{Z}$). Okazuje się bowiem, że sigma-ciało Pinskera procesu może być nie tylko wyznaczone jako jego odległa przeszłość bądź przyszłość (wzdłuż naturalnego porządku na $\mathbb{Z}$), ale również jako odpowiednio rozumiana przeszłość bądź przyszłość wzdłuż wielu innych, niestandardowych porządków na $\mathbb{Z}$. Przykład takiego niestandardowego porządku zostanie podany w rozdziale 5, przy okazji konstrukcji multiporządku z systemu tilingów.

Twierdzenie 3.5.5. *Niech (X, Σ_X, μ, G) będzie teoriomiarowym układem dynamicznym z działaniem przeliczalnej grupy ze średnią G. Niech $\mathcal{P}$ będzie skończonym mierzalnym rozbiciem przestrzeni X. Niech $(\tilde{\mathcal{O}}, \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}, \nu, G)$ będzie dowolnym multiporządkiem na G. Wówczas zbiór $A \subset X$ należy do sigma-ciała Pinskera $\Pi_G(\mathcal{P})$ procesu generowanego przez rozbicie $\mathcal{P}$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$A \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}^{(-\infty, -n]^{\prec}} \tag{3.37}$$

dla ν-prawie każdego $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$. Równoważnie, dla ν-prawie każdego $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$ mamy

$$\Pi_G(\mathcal{P}) = \bigcap_{g \in G} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}^{(-\infty, -n]^{g(\prec)}}. \tag{3.38}$$

Dowód. Niech (Y, Σ_Y, ν_Y, G) będzie faktorem symbolicznym (X, Σ_X, μ, G) generowanym przez skończone mierzalne rozbicie $\mathcal{P}$ przestrzeni X i niech $(\tilde{\mathcal{O}}, \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}, \nu, G)$ będzie dowolnym multiporządkiem na G. Rozważmy układ produktowy $(Y \times \tilde{\mathcal{O}}, \Sigma_Y \otimes \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}, \mu_Y \times \nu, G)$. Jest to oczywiście układ multiuporządkowany, gdzie rolę faktor-odwzorowania φ pełni rzut $\pi_{\tilde{\mathcal{O}}}$ na współrzędną będącą multiporządkiem. Łatwo można sprawdzić, że prawdziwa jest zależność

$$\Pi_G(\mathcal{P}) \otimes \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}} \preccurlyeq \Pi_G(Y \times \tilde{\mathcal{O}}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}). \tag{3.39}$$

W istocie, jeżeli $A \in \Pi_G(\mathcal{P}) \otimes \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}$, to oczywiście $A \in \Sigma_X \otimes \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}$ oraz

$$h(\mu \times \nu, G, \{A, A^c\}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}) = h(\mu, G, \pi_X(\{A, A^c\}) = 0.$$ [10]

Na mocy Twierdzenia 3.5.2 zachodzi równość

$$\Pi_G(Y \times \tilde{\mathcal{O}}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}) = \Pi_S(Y \times \tilde{\mathcal{O}}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}), \tag{3.40}$$

gdzie S jest przekształceniem następnika na $Y \times \tilde{\mathcal{O}}$, związanym z multiporządkiem $\tilde{\mathcal{O}}$. Oczywiście możemy $\mathcal{P}$ oraz $\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}$ utożsamić odpowiednio z: rozbiciem oraz sigma-ciałem na $Y \times \tilde{\mathcal{O}}$, uzyskanymi przez podniesienie $\mathcal{P}$ oraz $\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}$ przez faktor-odwzorowanie φ. Zauważmy, że $\mathcal{P} \vee \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}$[11]. generuje $\Sigma_Y \otimes \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}$ nie tylko pod działaniem G, lecz także pod działaniem S. Rozważmy dwie różne pary punktów $(y, \prec)$ i $(y, \prec')$ należące do $Y \times \tilde{\mathcal{O}}$. Wówczas albo $\prec \neq \prec'$ i wtedy $\mathcal{P} \vee \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}$ rozdziela zadane pary, albo $\prec = \prec'$ i $y \neq y'$. W drugim przypadku, ponieważ $\prec = \prec'$, więc iteracje przekształcenia następnika S^n działają na tych parach poprzez te same elementy $g \in G$, konkretnie poprzez $g = n^{\prec} = n^{\prec'}$. Ponadto, jeżeli n przebiegać będzie całą grupę $\mathbb{Z}$, to elementy $n^{\prec}$ również wyczerpią całą grupę G. Zatem, dla odpowiednio dużych n, rozbicia $\mathcal{P}^{[-n,n]^S}$ będą rozdzielać pary $(y, \prec)$ i $(y', \prec')$. Czyli w istocie $\mathcal{P} \vee \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}$ generuje $\Sigma_Y \otimes \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}$ pod działaniem S. Stąd zachodzi wzór (zob. na przykład [31])

$$\Pi_S(Y \times \tilde{\mathcal{O}}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \big(\mathcal{P}^{(-\infty,-n]^S} \vee \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}\big). \tag{3.41}$$

Łącząc wzory (3.39), (3.40) oraz (3.41), otrzymujemy, że

$$\Pi_G(\mathcal{P}) \otimes \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}} \preccurlyeq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \big(\mathcal{P}^{(-\infty,-n]^S} \vee \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}\big). \tag{3.42}$$

Ustalmy teraz dowolny zbiór $A \in \Pi_G(\mathcal{P})$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $A \times \tilde{\mathcal{O}} \in \mathcal{P}^{(-\infty,-n]^S} \vee \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}$, co implikuje, że dla ν-prawie każdego $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$, zbiór $(A \times \tilde{\mathcal{O}}) \cap \varphi^{-1}(\prec)$ należy do $\mathcal{P}^{(-\infty,-n]^S}|_{\varphi^{-1}(\prec)} = \mathcal{P}^{(-\infty,-n]^{\prec}}|_{\varphi^{-1}(\prec)}$ (równość tę pokazaliśmy w dowodzie Twierdzenia 3.3.1 - wzór (3.28)). Ponieważ jednak $\mathcal{P}^{(-\infty,-n]^{\prec}}$ zależy wyłącznie od działania G na X, więc dla ν-prawie każdego $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$, A musi być mierzalne względem $\mathcal{P}^{(-\infty,-n]^{\prec}}$. Skoro zaś zachodzi to dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, więc $A \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}^{(-\infty,-n]^{\prec}}$ dla ν-prawie każdego $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$.

Udowodnimy teraz przeciwną implikację. Niech $A \subset Y$ będzie zbiorem mierzalnym względem $\bigcap_{n \geq 1} \mathcal{P}^{(-\infty,-n]^{\prec}}$ dla ν-prawie każdego $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$. Połóżmy $C = A \times \tilde{\mathcal{O}}$. Przekrój $C \cap \varphi^{-1}(\prec)$ jest mierzalny względem $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}^{(-\infty,-n]^{\prec}}|_{\varphi^{-1}(\prec)} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}^{(-\infty,-n]^S}|_{\varphi^{-1}(\prec)}$ dla ν-prawie każdego $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$. Czyli C jest mierzalny względem $\big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}^{(-\infty,-n]^S}\big) \vee \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}$ (oczywiście C jest mierzalny względem $\Sigma_Y \otimes \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}$). Łatwo sprawdzić, że sigma-ciało $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \big(\mathcal{P}^{(-\infty,-n]^S} \vee \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}\big)$[12] jest drobniejsze niż sigma-ciało $\big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}^{(-\infty,-n]^S}\big) \vee \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}$ (w ogólności nie są one jednak równe). Zatem C jest mierzalny względem sigma-ciała $\Pi_S(Y \times \tilde{\mathcal{O}}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}})$, które, na mocy wzoru (3.40) jest równe $\Pi_G(Y \times \tilde{\mathcal{O}}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}})$. Niech teraz $\mathcal{Q} = \{C, C^c\} = \{A \times \tilde{\mathcal{O}}, A^c \times \tilde{\mathcal{O}}\}$. Mamy wówczas $h(\mu_Y \times \nu, G, \mathcal{Q}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}) = 0$. Ponieważ G działa niezależnie

[10] Przypomnijmy, że na mocy Twierdzenia 2.1.13, $\tilde{\mathcal{O}}$ może być traktowany jako przestrzeń Polska z sigma-ciałem borelowskim $\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}$, więc rzut każdego zbioru $A \in \Sigma_X \otimes \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}$ na współrzędną X jest uniwersalnie mierzalny (patrz np. [18, Twierdzenie (21.10)]).

[11] Połączenie $\mathcal{P} \vee \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}$ oznacza tu rodzinę $\{P \times A : P \in \mathcal{P}, A \in \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}\}$.

[12] Jeżeli Θ_1 i Θ_2 są dwoma sigma-ciałami to połączeniem $\Theta_1 \vee \Theta_2$ nazywamy najmniejsze sigma-ciało, które zawiera zarówno Θ_1 jak i Θ_2. Analogicznie definiujemy połączenie przeliczalnej rodziny sigma-ciał.

na każdej osi $Y \times \tilde{\mathcal{O}}$, więc rozbicie $\mathcal{R} = \{A, A^c\}$ przestrzeni Y spełnia $h(\mu_Y, G, \mathcal{R}) = 0$. W konsekwencji $A \in \Pi_G(\mathcal{P})$, co kończy dowód równoważności (3.37).

Dla każdego $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$ wprowadźmy oznaczenie

$$\mathcal{A}_\prec = \bigcap_{g \in G} \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{P}^{(-\infty,-n]^{g(\prec)}}.$$

Z (3.37) wynika od razu, że dla ν-prawie każdego $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$ zachodzi $\Pi_G(\mathcal{P}) \preccurlyeq \mathcal{A}_\prec$. Pozostaje więc pokazać przeciwną relację. Wystarczy ją udowodnić w przypadku, gdy miara ν jest ergodyczna (podobnie jak we wcześniej dowodzonych twierdzeniach, wykorzystując rozkład ergodyczny można stąd wywnioskować, że teza zachodzi dla dowolnej miary niezmienniczej). Jak łatwo można sprawdzić, dla ν-prawie każdego $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$ oraz dla dowolnego $g \in G$ zachodzi $\mathcal{A}_{g(\prec)} = \mathcal{A}_\prec$. Z ergodyczności ν wynika więc, że dla ν-prawie wszystkich $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$, $\mathcal{A}_\prec$ jest jednakowe. Oznaczać je będziemy zatem przez $\mathcal{A}$. Ponieważ dla ν-prawie każdego $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$ mamy $\mathcal{A} \preccurlyeq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}^{(-\infty,-n]^\prec}$, więc na mocy (3.37) zachodzi $\mathcal{A} \preccurlyeq \Pi_G(\mathcal{P})$. Skąd wynika oczywiście, że $\mathcal{A}_\prec \preccurlyeq \Pi_G(\mathcal{P})$ dla ν-prawie każdego $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$. ∎

Rozdział 4

Pary asymptotyczne w układach z działaniem przeliczalnych grup ze średnią

Głównym celem tego rozdziału jest udowodnienie twierdzenia uogólniającego Twierdzenia Blancharda-Hosta-Ruette (Twierdzenie 1.1.2) o istnieniu par asymptotycznych w topologicznych układach dynamicznych o dodatniej entropii, na przypadek układów z działaniami przeliczalnych grup ze średnią. Oczywiście wymaga to wprowadzenia odpowiedniej definicji pary asymptotycznej, dającej się zastosować w dużo ogólniejszym kontekście.

Definicja 4.0.1. *Niech (X, G) będzie topologicznym układem dynamicznym z działaniem przeliczalnej grupy G. Niech $\prec$ będzie porządkiem typu $\mathbb{Z}$ na G. Parę różnych punktów $x, x' \in X$ nazywamy* $\prec$-asymptotyczną *jeżeli zachodzi zbieżność*

$$\lim_{k\to\infty} d_X(k^{\prec}(x), k^{\prec'}(x')) = 0. \tag{4.1}$$

Definicja 4.0.2. *Niech (X, G) będzie topologicznym układem dynamicznym z działaniem przeliczalnej grupy G, dla którego istnieje multiporządek $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$ na G będący jego faktorem teoriomiarowym przez przekształcenie φ (czyli (X, μ, G, φ) jest układem multiuporządkowanym), gdzie μ jest pewną G-niezmienniczą borelowską miarą probabilistyczną na X. Jeżeli para różnych punktów $x, x' \in X$ spełnia $\varphi(x) = \varphi(x') = \prec$ oraz jeżeli (x, x') jest parą $\prec$-asymptotyczną, to powiemy, że x, x' tworzą parę* φ-asymptotyczną.

Zauważmy, że w przypadku klasycznych układów, z działaniem grupy $\mathbb{Z}$, na której rozważamy naturalny porządek $<$, każda G-niezmiennicza miara borelowska μ na X tworzy układ multiuporządkowany (X, μ, φ), którego faktorem jest jednoelementowy multiporządek złożony z porządku $<$ (patrz Przykład 2.1.3). W takim wypadku, dla μ-prawie każdego $x \in X$ mamy $\varphi(x) = \varphi'(x) = <$. Zatem Definicja 4.0.2 uogólnia klasyczną definicję pary asymptotycznej.

4.1 Entropia topologiczna dla działań przeliczalnych grup ze średnią

Od tej chwili odnosić się będziemy zarówno do entropii teoriomiarowej, jak i do entropii topologicznej oraz często będziemy wykorzystywać związki między tymi obiektami (w szczególności zasady wariacyjne). By nie doprowadzać do nieporozumień, entropię topologiczną układu (X, G) oznaczać będziemy symbolem $h_{\mathsf{top}}(X, G)$ a entropię teoriomiarową (Kołmogorowa-Sinaia) układu (X, μ, G), tak jak dotychczas, będziemy oznaczać symbolem $h(\mu, G)$.

Przypomnijmy teraz definicję entropii topologicznej w układzie z działaniem przeliczalnej grupy ze średnią.

Niech (X, G) będzie topologicznym układem dynamicznym z działaniem przeliczalnej grupy ze średnią G. Rodzinę $\mathcal{U}$ otwartych podzbiorów $U \subset X$, taką że $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X$ nazywamy pokryciem otwartym X. Połączeniem $\mathcal{U} \vee \mathcal{V}$ dwóch pokryć otwartych $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ przestrzeni X, nazywamy rodzinę $\{U \cap V : U \in \mathcal{U},\ V \in \mathcal{V}\}$. Analogicznie definiujemy połączenie przeliczalnej rodziny pokryć $\{\mathcal{U}_k : k \in \mathbb{N}\}$. Ponadto, dla każdego $K \subset G$, przez $\mathcal{U}^K$ oznaczać będziemy połączenie $\bigvee_{g \in K} g^{-1}(\mathcal{U})$, gdzie $g^{-1}(\mathcal{U}) = \{g^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$ (jest to oczywiście pokrycie otwarte X, gdyż dla każdego $g \in G$ transformacja $x \mapsto g(x)$ jest homeomorfizmem). Podpokryciem pokrycia $\mathcal{U}$ nazywamy dowolną rodzinę $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, która sama jest pokryciem X. Ponadto, dla każdego otwartego pokrycia $\mathcal{U}$, symbolem $N(\mathcal{U})$ oznaczamy minimum liczności jego podpokryć (ze zwartości X, każde pokrycie otwarte X posiada podpokrycie skończone, więc takie minimum istnieje). Kładziemy następnie $H(\mathcal{U}) = \log N(\mathcal{U})$.

Niech teraz $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem Følnera w G. Entropia topologiczna pokrycia otwartego $\mathcal{U}$ przestrzeni X zadana jest wzorem

$$h_{\mathsf{top}}(\mathcal{U}, G) \lim_{n \to \infty} \frac{1}{|F_n|} H(\mathcal{U}^{F_n}).$$

Podkreślmy, że wartość $h_{\mathsf{top}}(\mathcal{U}, G)$ nie zależy od wyboru ciągu Følnera w G.

Wreszcie, entropia topologiczna układu (X, G), oznaczana symbolem $h_{\mathsf{top}}(X, G)$, zdefiniowana jest jako supremum wartości $h_{\mathsf{top}}(\mathcal{U}, G)$ po wszystkich otwartych pokryciach $\mathcal{U}$ przestrzeni X.

Rozważać będziemy ponadto topologiczną entropię warunkową układu (X, G) pod warunkiem układu (Y, G), będącego faktorem (X, G), zdefiniowaną jak w [30, Sekcja 4.2]. Definicję tej entropii podajemy poniżej.

Dla każdego otwartego pokrycia X i dowolnego zbioru $K \subset X$, symbolem $N(\mathcal{U}|K)$ oznaczamy minimum liczności podpokryć $\mathcal{V}$ pokrycia $\mathcal{U}$, które pokrywają K (czyli $K \subset \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$). Jeżeli teraz π jest faktor-odwzorowaniem z układu (X, G) w układ (Y, G), to definiujemy

$$N(\mathcal{U}|Y) = \sup_{y \in Y} N(\mathcal{U}|\pi^{-1}(y)),$$
$$H(\mathcal{U}|Y) = \log N(\mathcal{U}|Y),$$
$$h_{\mathsf{top}}(\mathcal{U}|Y) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{|F_n|} h(\mathcal{U}^{F_n}|Y),$$

gdzie $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest dowolnym ciągiem Følnera w G. Podkreślamy, że wartość $h_{\mathsf{top}}(\mathcal{U}|Y)$ nie zależy przy tym od wyboru ciągu Følnera $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Topologiczną entropię warunkową układu (X, G) pod warunkiem jego faktora (Y, G) definiujemy wówczas jako supremum wartości $h_{\mathsf{top}}(\mathcal{U}, G|Y)$ po wszystkich otwartych pokryciach $\mathcal{U}$ przestrzeni X.

4.2 Uogólnienie Twierdzenia Blancharda-Hosta-Ruette na działania przeliczalnych grup ze średnią

Zanim przejdziemy do sformułowania głównych twierdzeń tego rozdziału, przytoczymy jeszcze lemat podany przez G. Zhanga, istotny z punktu widzenia dalszych rozważań. Stanowi on uogólnienie Lematu 4 z [2], będącego istotnym elementem oryginalnego dowodu Twierdzenia Blancharda-Hosta-Ruette.

Lemat 4.2.1. *[31, Lemat 3.7] Niech (X, T) będzie topologicznym układem dynamicznym (z działaniem $\mathbb{Z}$ danym przez iteracje homeomorfizmu T), niech Σ_X będzie sigma-ciałem borelowskim na X i niech μ będzie T-niezmienniczą, borelowską miarą probabilistyczną na X oraz niech Ξ będzie T-niezmienniczym pod-sigma-ciałem Σ_X. Wówczas:*

(i) Istnieje sigma-ciało $\Theta \succcurlyeq \Xi$, takie że

- $\bigvee_{n\in\mathbb{Z}} T^{-n}(\Theta) \overset{\mu}{=} \Sigma_X$,
- $\Pi_T(X|\Xi) \overset{\mu}{=} \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}(\Theta^+)$,[1] *gdzie $\Pi_T(X|\Xi)$ oznacza warunkowe sigma-ciało Pinskera układu teoriomiarowego (X, Σ_X, μ, T), warunkowane sigma-ciałem Ξ,*
- *każde dwa różne punkty należące do tego samego atomu Θ^+ tworzą parę asymptotyczną.*

(ii) Jeżeli $h(\mu, T|\Xi) > 0$, to nie zachodzi równość $\Theta^+ \overset{\mu}{=} \Sigma_X$.

Uwaga 4.2.2. Lemat 4.2.1 został sformułowany przy założeniach, że X jest przestrzenią zwartą a przekształcenie T jest homeomorfizmem. Jednakże, w dowodzie lematu (zawartym w [31]), ciągłość przekształcenia T nie jest wykorzystana. Natomiast zwartość przestrzeni X jest potrzebna jedynie do zagwarantowania istnienia ciągu rozbić mierzalnych $(\mathcal{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, który spełnia warunki: $\mathcal{Q}_n \preccurlyeq \mathcal{Q}_{n+1}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz że średnice tych rozbić zbiegają do zera gdy $n \to \infty$. Należy zaznaczyć, że do istnienia takiego ciągu rozbić wystarczy słabsze założenie, iż przestrzeń X jest całkowicie ograniczona.

Sformułujemy teraz i udowodnimy dwa twierdzenia dotyczące istnienia par asymptotycznych w topologicznych układach dynamicznych o dodatniej entropii. Drugie z nich, będące uogólnieniem Twierdzenia Blancharda-Hosta-Ruette, jest jednym z najważniejszych twierdzeń w tej pracy.

Twierdzenie 4.2.3. *Niech (X, G) będzie topologicznym układem dynamicznym. Niech μ będzie G-niezmienniczą, borelowską miarą probabilistyczną na X, dla której istnieje faktor-odwzorowanie φ z układu (X, μ, G) w pewien multiporządek $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$ (innymi słowy (X, μ, G, φ) jest układem multiuporządkowanym). Załóżmy ponadto, że $h(\mu, G|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}) > 0$. Wówczas w X istnieje para φ-asymptotyczna. Co więcej, zbiór punktów $x \in X$, które należą do par φ-asymptotycznych jest miary μ dodatniej.*

Dowód. Niech Σ_X będzie sigma-ciałem borelowskim na X. Z Twierdzenia 2.2.7 wynika, że układ (X, Σ_X, μ, G) ma takie same orbity co układ (X, Σ_X, μ, S) z działaniem $\mathbb{Z}$ zadanym przez iteracje przekształcenia następnika S. Na mocy Twierdzenia 3.3.1 mamy $h(\mu, S|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}) = h(\mu, G|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}) > 0$. Zatem, z Lematu 4.2.1[2] wynika istnienie sigma-ciała

[1] Jeżeli (X, Σ_X, μ, T) jest teoriomiarowym układem dynamicznym z działaniem $\mathbb{Z}$ danym przez iteracje T, a Θ jest pod-sigma-ciałem Σ_X, to symbolem Θ^+ nazywamy sigma-ciało $\bigvee_{k\geq 1} T^{-k}(\Theta)$ - patrz przypis 12 na poprzedniej stronie.

[2] W ogólności, przekształcenie S nie musi być ciągłe. Jednakże, jak zaznaczono w Uwadze 4.2.2, Lemat 4.2.1 zachodzi również dla borelowskich bijekcji, które nie są ciągłe.

$\Theta \succcurlyeq \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}$, takiego że każda para różnych punktów należących do tego samego atomu Θ^+ jest asymptotyczna (względem przekształcenia S). Ponadto, ponieważ $h(\mu, G|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}) > 0$, więc Θ^+ jest właściwym pod-sigma-ciałem Σ_X. Skoro Θ jest rozdrobnieniem $\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}$, to oczywiście również Θ^+ jest rozdrobnieniem $\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}$. Zatem atomy Θ^+ są podzbiorami atomów $\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}$, którymi są dokładnie włókna przekształcenia φ. Stąd, dla każdej pary punktów x, x' należących do tego samego atomu Θ^+ musi zachodzić $\varphi(x) = \varphi(x')$.

Rozważmy zbiór $A \subset X \times X$ złożony ze wszystkich par (x, x'), które są asymptotyczne względem przekształcenia S. Zauważmy, że

$$A = \bigcap_{l\geq 1} \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} (S \times S)^{-k}(\{(x, x') \in X \times X : d_X(x, x') < \tfrac{1}{l}\}).$$

Ponieważ S jest oczywiście przekształceniem borelowskim, więc A jest zbiorem borelowskim. Ustalmy teraz dowolną parę $(x, x') \in A$, czyli spełniającą

$$\lim_{k\to\infty} d_X(S^k(x), S^k(x')) = 0. \tag{4.2}$$

Na mocy Twierdzenia 2.2.7 zachodzą równości $S^k(x) = k^{\varphi(x)}(x)$ oraz $S^k(x') = k^{\varphi(x')}(x')$. Zatem wzór (4.2) można zapisać w postaci

$$\lim_{k\to\infty} d_X(k^{\varphi(x)}(x), k^{\varphi(x')(x')}) = 0. \tag{4.3}$$

Stąd wynika, że para (x, x') jest φ-asymptotyczna wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona asymptotyczna względem przekształcenia następnika S oraz $\varphi(x) = \varphi(x')$. Zatem zbiór $\tilde{A} \subset X \times X$, złożony ze wszystkich par φ-asymptotycznych, jest równy

$$\tilde{A} = A \cap \{(x, x') \in X \times X : \varphi(x) = \varphi(x')\}.$$

Zauważmy, że zbiór $\{(x, x') \in X \times X : \varphi(x) = \varphi(x')\}$ jest dokładnie przeciwobrazem przekątnej $\triangle_{\tilde{\mathcal{O}}} = \{(\prec, \prec) : \prec \in \tilde{\mathcal{O}}\}$ (która jest domkniętym podzbiorem $X \times X$) przez przekształcenie $\varphi \times \varphi$. Jest to zatem zbiór Borelowski. W konsekwencji $\tilde{A}$ jest również zbiorem borelowskim. Stąd, zbiór A_φ złożony ze wszystkich punktów $x \in X$, które należą do pary φ-asymptotycznej, będący rzutem $\tilde{A}$ na współrzędną X, jest zbiorem analitycznym. Jest on więc mierzalny względem każdej borelowskiej miary probabilistycznej na X (patrz np. [19]), w szczególności względem μ.

Przypuśćmy, że $\mu(A_\varphi) = 0$. Wówczas, μ-prawie każdy punkt $x \in X$ nie należy do żadnej pary φ-asymptotycznej. Stąd, dla μ-prawie każdego $x \in X$, atom sigma-ciała Θ^+, do którego należy x, musiałby być singletonem. W konsekwencji, ponieważ X jest przestrzenią Lebesgue'a, musiałoby zachodzić $\Theta^+ \overset{\mu}{=} \Sigma_X$, co przeczyłoby temu, że Θ^+ jest właściwym pod-sigma-ciałem Σ_X. Z tej sprzeczności wynika więc, że musi zachodzić $\mu(A_\varphi) > 0$, co kończy dowód. ■

Uwaga 4.2.4. Twierdzenie 4.2.3 pozostaje w mocy również w przypadku gdy przestrzeń X jest całkowicie ograniczoną przestrzenią metryczną, niekoniecznie zwartą.

W przypadku gdy $h(\nu, G) = 0$, mamy $h(\mu, G|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}) = h(\mu, G) > 0$. Zatem, z Twierdzenia 4.2.3 wynika następujący wniosek.

Wniosek 4.2.5. *Niech (X, G) będzie topologicznym układem dynamicznym. Niech μ będzie G-niezmienniczą, borelowską miarą probabilistyczną na X, taką że układ (X, μ, G) ma dodatnią entropię oraz istnieje multiporządek $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$ o entropii zero, będący faktorem (X, μ, G) przez odwzorowanie φ. Wówczas, zbiór tych punktów $x \in X$, które należą do par φ-asymptotycznych, ma dodatnią miarę μ.*

Stosując Twierdzenie 4.2.3 dla szczególnego układu multiuporządkowanego na przestrzeni produktowej $X \times \tilde{\mathcal{O}}$, udowodnimy najważniejsze twierdzenie tego rozdziału, czyli Twierdzenie 4.2.6. W przypadku gdy w miejsce $\tilde{\mathcal{O}}$ weźmiemy jednoelementowy multiporządek na $\mathbb{Z}$, złożony jedynie z naturalnego porządku $<$ (patrz Przykład 2.1.3), twierdzenie owo sprowadza się do Twierdzenia Blancharda-Hosta-Ruette. Ponadto z naszego twierdzenia wynika, że w każdym układzie dynamicznym z działaniem $\mathbb{Z}$ o dodatniej entropii, istnieją pary asymptotyczne nie tylko wzdłuż naturalnego porządku $<$, lecz również wzdłuż wielu innych niestandardowych porządków na $\mathbb{Z}$ (przykłady takich porządków zostaną podane w Rozdziale 5).

Twierdzenie 4.2.6. *Niech (X, G) będzie topologicznym układem dynamicznym z działaniem przeliczalnej grupy ze średnią G, takim że $h_{\mathsf{top}}(X, G) > 0$. Dla dowolnego multiporządku $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$ na G oraz ν-prawie każdego $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$, istnieje w X para $\prec$-asymptotyczna.*

Dowód. Na mocy zasady wariacyjnej dla działań grup ze średnią [23, Zasada Wariacyjna 5.2.7], istnieje miara ergodyczna μ na X o dodatniej entropii (teoriomiarowej) $h(\mu, G)$. Na mocy Twierdzenia 2.1.13 $\tilde{\mathcal{O}}$ może być utożsamione (z teoriomiarowego punktu widzenia) z całkowicie ograniczoną, ośrodkową przestrzenią polską $\mathbf{Bi}(\mathbb{Z}, G)$.

Ustalmy multiporządek $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$ na G. Wystarczy udowodnić twierdzenie w przypadku gdy miara ν jest ergodyczna (tak jak we wcześniej dowodzonych twierdzeniach, stosując rozkład ergodyczny, łatwo można wówczas wywnioskować tezę dla dowolnej miary niezmienniczej). Załóżmy więc, że ν jest miarą ergodyczną.

Rozważmy przestrzeń produktową $(X \times \tilde{\mathcal{O}}, \Sigma_X \otimes \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}})$, gdzie Σ_X oraz $\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}$ są sigma-ciałami borelowskimi odpowiednio na przestrzeniach X oraz $\tilde{\mathcal{O}}$. Zauważmy, że $\Sigma_X \otimes \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}$ jest również sigma-ciałem borelowskim (wynika to z faktu, że X oraz $\tilde{\mathcal{O}}$ są ośrodkowymi przestrzeniami metrycznymi). Teoriomiarowy układ dynamiczny $(X \times \tilde{\mathcal{O}}, \Sigma_X \otimes \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}, \mu \times \nu, \varphi)$ jest multiuporządkowany a rolę faktor-odwzorowania φ pełni rzut na współrzędną $\tilde{\mathcal{O}}$. Ponadto, ponieważ Σ_X oraz $\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}$ są niezależne, to zachodzi

$$h(\mu \times \nu, G | \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}) = h(\mu, G) > 0.$$

Możemy zatem zastosować Twierdzenie 4.2.3 dla układu multiuporządkowanego $(X \times \tilde{\mathcal{O}}, \Sigma_X \otimes \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}, \mu \times \nu, \varphi)$ (przestrzeń $X \times \tilde{\mathcal{O}}$ nie jest zwarta, lecz jest całkowicie ograniczona, co wystarcza do zachodzenia Twierdzenia 4.2.3 - patrz Uwaga 4.2.4). Wynika z niego, że zbiór A_φ, zawierający wszystkie punkty z $X \times \tilde{\mathcal{O}}$, które należą do par φ-asymptotycznych, ma dodatnią miarę $\mu \times \nu$. Zauważmy, że różne punkty $(x, \prec)$ i $(x', \prec')$ tworzą parę φ-asymptotyczną w $X \times \tilde{\mathcal{O}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\prec = \prec'$, $x \neq x'$ oraz (x, x') jest parą $\prec$-asymptotyczną w X.

Ponieważ A_φ jest zbiorem analitycznym, więc rzut $\varphi(A_\varphi)$ jest analitycznym podzbiorem przestrzeni polskiej $\tilde{\mathcal{O}}$ i, w konsekwencji, jest on mierzalny względem każdej borelowskiej miary probabilistycznej na $\tilde{\mathcal{O}}$ (patrz [19]), w szczególności względem ν. Ponadto mamy oczywiście $\nu(\varphi(A_\varphi)) > 0$. Pokażemy, że zbiór $\varphi(A_\varphi)$ jest G-niezmienniczy. Ustalmy dowolne $\prec \in \varphi(A_\varphi)$ oraz $g \in G$. Niech $j \in \mathbb{Z}$ będzie liczbą spełniającą $j^{\prec} = g$. Niech ponadto (x, x') będzie parą $\prec$-asymptotyczną w X. Wówczas, dla każdego $k \in \mathbb{Z}$, na mocy wzoru 2.6, zachodzi

$$k^{g(\prec)}(g(x)) = ((k + j)^{\prec} \cdot g^{-1} \cdot g)(x) = (k + j)^{\prec}(x).$$

Analogicznie, zachodzi również $k^{g(\prec)}(g(x')) = (k + j)^{\prec}(x')$. Stąd wynika, że

$$\lim_{k \to \infty} d_x(k^{g(\prec)}(g(x)), k^{g(\prec)}(g(x'))) = d_X((k + j)^{\prec}(x), (k + j)^{\prec}(x')) = 0.$$

Zatem $(g(x), g(x'))$ jest parą $g(\prec)$-asymptotyczną oraz $g(\prec) \in \varphi(A_\varphi)$. Zatem A_φ jest w istocie zbiorem G-niezmienniczym. Skoro zaś $\nu(\varphi(A_\varphi)) > 0$, więc z ergodyczności ν wynika, że $\nu(\varphi(A_\varphi)) = 1$, co kończy dowód. ∎

Rozdział 5

Multiporządki pochodzące od systemów tilingów

Twierdzenie 4.2.6 udowodnione w poprzednim rozdziale gwarantuje, że jeżeli topologiczny układ dynamiczny z działaniem przeliczalnej grupy ze średnią G nie posiada par $\prec$-asymptotycznych dla żadnego porządku $\prec$ należącego do pewnego multiporządku na G, to układ ten ma entropię zero. Do pełnej charakteryzacji układów o entropii zero przez kryterium istnienia par asymptotycznych potrzebujemy udowodnić jeszcze twierdzenie analogiczne do Twierdzenia Downarowicza-Lacroix. Mianowicie musimy pokazać, że każdy topologiczny układ dynamiczny o entropii zero jest faktorem układu, który nie posiada par asymptotycznych dla żadnego porządku z pewnego multiporządku. Wymaga to skonstruowania, dla dowolnego układu o entropii zero, specyficznego rozszerzenia, co zostanie przedstawione w Rozdziale 6. Rozszerzenie to zbudowane zostanie z wykorzystaniem multiporządku o lepszych własnościach topologicznych (dotychczas wymagaliśmy jedynie by multiporządek $\tilde{\mathcal{O}}$ posiadał strukturę borelowską). Multiporządek taki pochodzić będzie z tzw. systemu tilingów. Rozdział ten poświęcony jest właśnie konstrukcji takiego multiporządku oraz udowodnieniu pewnych jego własności, istotnych z punktu widzenia dalszych rozważań.

5.1 Tilingi i systemy tilingów

Rozpoczniemy od przybliżenia samej teorii tilingów oraz systemów tilingów na grupach ze średnią. Większość sformułowanych w tym podrozdziale twierdzeń podajemy bez dowodów, które można znaleźć np. w [10]. W dalszej części, G będzie oznaczać grupę przeliczalną.

Definicja 5.1.1. Tilingiem *(bądź* pokafelkowaniem*) grupy G nazywamy rozbicie $\mathcal{T}$ grupy G na (przeliczalnie wiele) parami rozłącznych zbiorów skończonych (nazywanych* kafelkami*).*

Definicja 5.1.2. *Tiling $\mathcal{T}$ nazywamy* właściwym *jeżeli istnieje skończona rodzina $\mathcal{S}$ zbiorów skończonych $S \in \mathcal{S}$ (niekoniecznie różnych), taka że każdy ze zbiorów S zawiera jedność e grupy G oraz dla każdego kafelka $T \in \mathcal{T}$ istnieje zbiór $S \in \mathcal{S}$ spełniający $T = Sc$ dla pewnego $c \in T$. Taką rodzinę zbiorów $\mathcal{S}$ nazywać będziemy* kształtami *tilingu $\mathcal{T}$.*

W dalszej części pracy, o wszystkich tilingach będziemy zakładać, że są właściwe. Stąd też, zadając tiling, pomijać będziemy ów przymiotnik. Dla tilingu zawsze będziemy również ustalać jedną rodzinę kształtów $\mathcal{S}$ oraz jedną reprezentację $T \mapsto (S, c)$, gdzie $S \in \mathcal{S}$ i $c \in T$ spełniają $T = Sc$ (należy tu zaznaczyć, że na ogół taka reprezentacja nie jest zadana jednoznacznie, nawet jeżeli rodzina $\mathcal{S}$ jest ustalona i wszystkie jej elementy są różne). Wówczas takie S i c będziemy nazywać odpowiednio *kształtem* oraz *środkiem* kafelka T. Dla zadanego $S \in \mathcal{S}$, symbolem $C_S(\mathcal{T})$ oznaczać będziemy zbiór środków wszystkich kafelków, które mają kształt S. Symbolem $C(\mathcal{T}) = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} C_S(\mathcal{T})$ oznaczać będziemy zbiór środków wszystkich kafelków z $\mathcal{T}$.

Niech teraz $\mathcal{T}$ będzie tilingiem o rodzinie kształtów $\mathcal{S}$. Przez V oznaczać będziemy skończony alfabet (czyli skończoną przestrzeń dyskretną) zawierający symbole „S" odpowiadające konkretnym kafelkom $S \in \mathcal{S}$ (przy czym odwzorowanie $S \mapsto$ „S" jest bijekcją) i jeden dodatkowy symbol „0". Mamy zatem

$$V = \{\text{„}S\text{"} : S \in \mathcal{S}\} \cup \{\text{„}0\text{"}\}. \tag{5.1}$$

Wówczas każdy tiling $\mathcal{T}$ może być utożsamiony z elementem symbolicznym (oznaczanym tym samym symbolem) $\mathcal{T} \in V^G$, zdefiniowanym następująco

$$\mathcal{T}(g) = \begin{cases} \text{„}S\text{"}, & \text{jeżeli } g \in C_S(\mathcal{T}), \\ \text{„}0\text{"}, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases} \tag{5.2}$$

Definicja 5.1.3. *Niech $\mathcal{S}$ będzie pewną skończoną rodziną kształtów i niech V będzie alfabetem otrzymanym z $\mathcal{S}$ według formuły* (5.1). *Niech $\mathsf{T} \subset V^G$ będzie podukładem V^G, którego każdy element $\mathcal{T} \in \mathsf{T}$ reprezentuje tiling $\mathcal{T}$ na G, o rodzinie kształtów $\mathcal{S}$ (jak we wzorze* (5.2)*). Wówczas T nazywamy* tilingiem dynamicznym *o* rodzinie kształtów $\mathcal{S}$.

Oczywiście najprostszym przykładem tilingu dynamicznego jest domknięcie orbity (pod działaniem G zadanym przez przesunięcia[1]) dowolnego tilingu $\mathcal{T}$ na G.

Definicja 5.1.4. *Rozważmy ciąg tilingów dynamicznych* $(\mathsf{T}_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Układem tilingów *(generowanym przez ciąg tilingów $(\mathsf{T}_k)_{k \in \mathbb{N}}$) nazywamy dowolne połączenie topologiczne*[2] $\boldsymbol{\mathsf{T}} = \bigvee_{k \in \mathbb{N}} \mathsf{T}_k$.

Elementy układu tilingów $\boldsymbol{\mathsf{T}}$ mają formę ciągów tilingów $\boldsymbol{\mathcal{T}} = (\mathcal{T}_k)_{k \in \mathbb{N}}$, gdzie $\mathcal{T}_k \in \mathsf{T}_k$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$.

Definicja 5.1.5. *Niech $\boldsymbol{\mathsf{T}} = \bigvee_{k \in \mathbb{N}} \mathsf{T}_k$ będzie układem tilingów i niech $\mathcal{S}_k$ oznacza rodzinę kształtów tilingu dynamicznego T_k. Mówimy, że układ $\boldsymbol{\mathsf{T}}$ jest:*

- kongruentny, *jeżeli dla każdego $\boldsymbol{\mathcal{T}} = (\mathcal{T}_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \boldsymbol{\mathsf{T}}$ i każdego $k \in \mathbb{N}$, każdy kafelek tilingu $\mathcal{T}_{k+1}$ jest sumą kafelków tilingu $\mathcal{T}_k$,*

- deterministyczny, *jeżeli jest on kongruentny, a także spełnia warunki, że dla każdego $k \geq 1$ i każdego $S' \in \mathcal{S}_{k+1}$, istnieją zbiory $C_S(S') \subset S'$, indeksowane kształtami $S \in \mathcal{S}_k$, dla których zachodzi*

$$S' = \bigcup_{S \in \mathcal{S}_k} \bigcup_{c \in C_S(S')} Sc$$

[1]Patrz przypis 4 we Wstępie

[2]Połączeniem topologicznym ciągu układów dynamicznych (X_k, G), $k \in \mathbb{N}$ (oznaczanym symbolem $\bigvee_{k \in \mathbb{N}} X_k$) nazywamy dowolny domknięty podzbiór produktu $\prod_{k \in \mathbb{N}} X_k$, mający pełne rzuty na każdą ze współrzędnych (tzn. dla każdego $k \in \mathbb{N}$ rzut na współrzędną k jest równy X_k), niezmienniczy na działanie produktowe grupy G zadane wzorem $g(x_1, x_2, \dots) = (g(x_1), g(x_2), \dots)$. (Zauważmy, że symbol $\bigvee_{k \in \mathbb{N}} X_k$ może oznaczać wiele różnych połączeń.)

oraz że dla każdego $\boldsymbol{\mathcal{T}} = (\mathcal{T}_i)_{i\in\mathbb{N}}$, jeżeli $T = S'c'$ jest kafelkiem tilingu $\mathcal{T}_{k+1}$, to

$$T = S'c' = \bigcup_{S\in\mathcal{S}_k} \bigcup_{c\in C_S(S')} Scc'$$

jest rozbiciem T na kafelki tilingu $\mathcal{T}_k$.

Uwaga 5.1.6. W deterministycznym układzie tilingów, dla każdego $\boldsymbol{\mathcal{T}} = (\mathcal{T}_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbf{T}$, tiling $\mathcal{T}_{k'}$ *determinuje* wszystkie tilingi $\mathcal{T}_k$ dla $k < k'$, a przyporządkowanie $\mathcal{T}_{k'} \mapsto \mathcal{T}_k$ jest faktorem topologicznym z $\mathsf{T}_{k'}$ w T_k. Zatem połączenie $\mathbf{T}$ jest granicą wsteczną

$$\mathbf{T} = \overleftarrow{\lim_{k\to\infty}} \mathsf{T}_k.$$

Należy tu podkreślić, że granica wsteczna nie zmieni się, jeżeli w miejsce ciągu $(\mathsf{T}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ weźmiemy jakiś jego podciąg, co będziemy wykorzystywać w dalszej części rozdziału. Uzyskane w ten sposób połączenie oznaczać będziemy tym samym symbolem $\mathbf{T}$ co pierwotnie ustalony system tilingów

Poniższe dwie definicje odnoszą się jedynie do grup ze średnią.

Definicja 5.1.7. *Układ tilingów $\mathbf{T}$ nazywamy* følnerowskim*, jeżeli suma rodzin kształtów $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{S}_k$ (ułożona w ciąg) tworzy ciąg Følnera w G.*

Definicja 5.1.8. Systemem tilingów *nazywamy układ tilingów $\mathbf{T}$, który jest følnerowski, deterministyczny oraz minimalny*[3]*. Pragniemy w ten sposób wyróżnić znacznie bardziej „uporządkowane”* systemy tilingów *na tle pozostałych* układów tilingów.

Poniższe twierdzenie odgrywać będzie niezwykle istotną rolę w dalszych rozważaniach dotyczących systemów tilingów.

Twierdzenie 5.1.9. *([10, Twierdzenie 5.2]) Dla każdej przeliczalnej grupy ze średnią G istnieje system tilingów na G, którego entropia topologiczna wynosi zero.*

Uwaga 5.1.10. Twierdzenie 5.2 z pracy [10] gwarantuje istnienie følnerowskiego i deterministycznego systemu tilingów $\mathbf{T}$ o topologicznej entropii zero (niekoniecznie minimalnego). W przypadku jednak gdy $\mathbf{T}$ nie jest minimalny, to oczywiście zawiera on minimalny podukład, który również ma wymagane własności.

5.2 Multiporządki pochodzące od tilingów

W każdym systemie tilingów można zadać porządek częściowy w następujący sposób. Przypomnijmy, że dla każdego $k \geq 2$, każdy kształt $S \in \mathcal{S}_k$ może być podzielony na podkafelki z poziomu $k-1$:

$$S = \bigcup_{S'\in\mathcal{S}_{k-1}} \bigcup_{c'\in C_{S'}(S)} S'c'. \tag{5.3}$$

Uwaga 5.2.1. By powyższa równość miała sens również dla $k = 1$, ustalamy dodatkowo jednoelementową rodzinę kształtów $\mathcal{S}_0 = \{\{e\}\}$, czyli do systemu tilingów $\mathbf{T}$ dokładamy zerowy poziom T_0 składający się z jednego tilingu $\mathcal{T}_0$, którego wszystkie kafelki są singletonami (jak łatwo sprawdzić tiling ten jest punktem stałym działania G zadanego przez przesunięcia).

[3] Układ (X, G) dynamiczny nazywamy *minimalnym*, jeżeli nie ma on właściwych, domkniętych podzbiorów G-niezmienniczych.

Niech $S \in \mathcal{S}_k$. Symbolem $C(S)$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich środków podkafelków $S' \in \mathcal{S}_{k-1}$ kształtu S, innymi słowy $C(S) = \bigcup_{S' \in \mathcal{S}_{k-1}} C_{S'}(S)$. Ustalamy w zbiorze $C(S)$ pewien porządek:

$$C(S) = \{c_1^S, c_2^S, \dots, c_{l(S)}^S\},$$

gdzie $l(S) = |C(S)|$. Porządek ten będziemy określać mianem „porządku podkafelków”, zamiast „porządku środków podkafelków” (choć ta druga nazwa, z formalnego punktu widzenia, jest właściwsza). Wzór (5.3) można zapisać w postaci

$$S = \bigcup_{i=1}^{l(S)} S_i' c_i^S, \tag{5.4}$$

gdzie $S_i' \in \mathcal{S}_{k-1}$ oraz $c_i^S \in C_{S_i'}(S)$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, l(S)$.

Zauważmy, że porządek podkafelków każdego kształtu $S \in \mathcal{S}_k$ determinuje również uporządkowanie podkafelków każdego kafelka $T \in \mathcal{T}_k$, gdzie $\mathcal{T}_k \in \mathsf{T}_k$. W istocie, jeżeli kafelek T ma postać $T = Sc$, gdzie $S \in S_k$, to jego rozkład na podkafelki z poziomu $k-1$ przyjmuje postać

$$T = \bigcup_{i=1}^{l(S)} S_i' c_i^S c. \tag{5.5}$$

Wprowadzamy zatem następującą definicję.

Definicja 5.2.2. Uporządkowanym systemem tilingów *nazywamy system tilingów* T*, w którym dla wszystkich* $k \in \mathbb{N}$ *zadany jest porządek podkafelków każdego kształtu* $S \in \mathcal{S}_k$.

Zauważmy, że dla każdego $k' > k$ oraz $T' \in \mathcal{T}_{k'}$, gdzie $\mathcal{T}_{k'} \in \mathsf{T}_{k'}$, porządek (5.5) podkafelków kształtu T' zadaje również porządek (leksykograficzny) wszystkich podkafelków $T \in \mathcal{T}_k$ kafelka T', gdzie $\mathcal{T}_k \in \mathsf{T}_k$. Stosując prostą indukcję, można pokazać, że dla każdego $\boldsymbol{\mathcal{T}} = (\mathcal{T}_k)_{k \geq 0} \in \mathsf{T}$, $k \in \mathbb{N}$ oraz $T \in \mathcal{T}_k$, uporządkowanie (5.5) zadaje porządek liniowy $\prec_T$ w kafelku T, w taki sposób, że jeżeli T' jest podkafelkiem T, to porządek $\prec_T$ pokrywa się z porządkiem $\prec_{T'}$ na zbiorze T'. Porządek $\prec_T$ możemy ponadto związać z bijekcją między odcinkiem $[1, |T|] \subset \mathbb{N}$ a T, którą będziemy zapisywać w postaci:

$$i \mapsto i^{\prec_T} \quad (i \in [1, |T|], i^{\prec_T} \in T).$$

Wprowadzamy dodatkowo następujące oznaczenia. Dla $1 \leq i \leq j \leq |T|$, symbolem $[i, j]^{\prec_T}$ oznaczać będziemy zbiór $\{i^{\prec_T}, (i+1)^{\prec_T}, \dots, j^{\prec_T}\}$ i nazywać go będziemy *odcinkiem porządkowym wewnątrz* T. Zbiór wszystkich odcinków porządkowych wewnątrz T (o długościach z przedziału $[1, |T|]$) oznaczać będziemy symbolem $\mathcal{I}^T$.

Nie wszystkie ciągi tilingów $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ z uporządkowanego systemu tilingów T mogą posłużyć do zadania na G porządku liniowego , a tym bardziej do zadania porządku typu $\mathbb{Z}$. Musimy więc zawęzić rozważania do tych $\boldsymbol{\mathcal{T}}$, które spełniają pewne dodatkowe warunki.

Definicja 5.2.3. *Niech* T *będzie systemem tilingów i niech* $\boldsymbol{\mathcal{T}} = (\mathcal{T}_k)_{k \geq 0} \in \mathsf{T}$*. Mówimy, że* $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ *jest* w pozycji ogólnej *jeżeli spełnia*

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k^e = G,$$

gdzie T_k^e *oznacza* centralny kafelek *tilingu* $\mathcal{T}_k$*, czyli unikalny kafelek* $T \in \mathcal{T}_k$ *zawierający jedność* e.

Zauważmy, że w każdym kongruentnym systemie tilingów kafelki centralne zawsze tworzą ciąg wstępujący zbiorów, zatem powyższa suma jest również zawsze sumą wstępującą.

Niech teraz $\mathbf{T}$ będzie uporządkowanym systemem tilingów i niech $\boldsymbol{\mathcal{T}} = (\mathcal{T}_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbf{T}$ będzie ciągiem tilingów w pozycji ogólnej. Wówczas $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ wyznacza porządek liniowy $\prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$ na grupie G w następujący sposób: Niech $a, b \in G$ będą różne. Istnieje liczba $k \geq 1$, taka że oba elementy a, b należą do tego samego kafelka $T \in \mathcal{T}_k$ (ponieważ $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ jest w pozycji ogólnej, więc w ostateczności muszą one należeć do któregoś z centralnych kafelków T_k^e). Wówczas $a \prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}} b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \prec_T b$. Zauważmy, że porządek ten jest poprawnie zdefiniowany, gdyż nie zależy on od indeksu k tilingu $\mathcal{T}_k$, w którym ów wspólny kafelek T został znaleziony.

Jak łatwo można sprawdzić, dla dowolnych dwóch różnych elementów $a, b \in G$ tylko skończenie wiele elementów $g \in G$ może spełniać $a \prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}} g \prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}} b$. Zatem każdy ciąg tilingów $\boldsymbol{\mathcal{T}} \in \mathbf{T}$ w pozycji ogólnej zadaje porządek $(G, \prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}})$ izomorficzny z którymś z porządków $(\mathbb{Z}, <)$, $(\mathbb{N}, <)$ bądź $(-\mathbb{N}, <)$, przy czym dwa ostatnie przypadki zachodzą jedynie wówczas, gdy kafelki centralne T_{k-1}^e ciągu $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ mają, od pewnego miejsca $k \in \mathbb{N}$, zawsze najmniejszy bądź zawsze największy indeks spośród podkafelków T_k^e (centralnego kafelka z wyższego poziomu). By zbudować multiporządek musimy więc jeszcze bardziej zawęzić zbiór rozważanych ciągów $\boldsymbol{\mathcal{T}}$, tak by otrzymać wyłącznie te, które zadają porządki izomorficzne z $(\mathbb{Z}, <)$.

Definicja 5.2.4. *Niech* $\mathbf{T}$ *będzie uporządkowanym systemem tilingów. Mówimy, że ciąg tilingów* $\boldsymbol{\mathcal{T}} \in \mathcal{T}$ *jest* wyprostowany*, jeżeli porządek* $(G, \prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}})$ *jest izomorficzny z* $(\mathbb{Z}, <)$ *(innymi słowy* $\prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$ *jest porządkiem typu* $\mathbb{Z}$*). Ponadto wprowadzamy oznaczenie:*

$$\mathbf{T}_{\mathsf{STR}} = \{\boldsymbol{\mathcal{T}} \in \mathbf{T} : \boldsymbol{\mathcal{T}} \text{ jest wyprostowany}\}.$$

Ograniczenie się do ciągów tilingów, które są wyprostowane nie jest aż tak restrykcyjne jak by się mogło wydawać. Zbiór $\mathbf{T}_{\mathsf{STR}}$ jest bowiem „odpowiednio dużym” podzbiorem $\mathbf{T}$ zarówno w sensie topologicznym jak i teoriomiarowym, co pokazuje kolejny lemat.

Lemat 5.2.5. *Niech* $\mathbf{T}$ *będzie uporządkowanym systemem tilingów. Wówczas zbiór* $\mathbf{T}_{\mathsf{STR}}$ *jest rezydualny oraz jest pełnej miary dla każdej* G*-niezmienniczej, borelowskiej miary probabilistycznej na* $\mathbf{T}$*.*

Dowód. Zbiór tych $\boldsymbol{\mathcal{T}} = (\mathcal{T}_k)_{k\geq 0}$, które są w pozycji ogólnej jest równy

$$\bigcap_{g\in G} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{\boldsymbol{\mathcal{T}} \in \mathbf{T} : g \in T_k^e\}$$

(przypominamy, że ponieważ $\mathbf{T}$ jest deterministyczny, więc kafelki centralne każdego $\boldsymbol{\mathcal{T}} \in \mathbf{T}$ tworzą ciąg wstępujący). Jak łatwo sprawdzić, jest to zbiór typu G_δ. Ponadto $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ nie jest wyprostowany wtedy i tylko wtedy, kiedy albo nie jest w pozycji ogólnej, albo gdy, począwszy od pewnego miejsca $k \in \mathbb{N}$, każdy środkowy kafelek T_{k-1}^e ma zawsze najmniejszy bądź zawsze największy indeks spośród podkafelków T_k^e. Stąd dopełnienie $(\mathbf{T}_{\mathsf{STR}})^c$ zbioru $\mathbf{T}_{\mathsf{STR}}$ można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}_{\mathsf{STR}})^c &= \bigcup_{g\in G} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \{\boldsymbol{\mathcal{T}} \in \mathbf{T} : g \notin T_k^e\} \\ &\cup \bigcup_{k_0\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq k_0} \bigcup_{S\in\mathcal{S}_{k-1}} \bigcup_{c\in S^{-1}} \{\boldsymbol{\mathcal{T}} \in \mathbf{T} : T_{k-1}^e = S_1' c_1^S c\} \\ &\cup \bigcup_{k_0\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq k_0} \bigcup_{S\in\mathcal{S}_{k-1}} \bigcup_{c\in S^{-1}} \{\boldsymbol{\mathcal{T}} \in \mathbf{T} : T_{k-1}^e = S_{l(S)}' c_{l(S)}^S c\}, \end{aligned} \tag{5.6}$$

gdzie $T_k^e = Sc = \bigcup_{i=1}^{l(S)} S_i' c_i^S c$ jest podziałem centralnego kafelka tilingu $\mathcal{T}_k$ na podkafelki z poziomu $k-1$ jak we wzorze (5.5). Zbiory

$$\{\boldsymbol{\mathcal{T}} \in \mathbf{T} : T_{k-1}^e = S_1' c_1^S c\},$$
$$\{\boldsymbol{\mathcal{T}} \in \mathbf{T} : T_{k-1}^e = S_{l(S)}' c_{l(S)}^S c\}$$

są oczywiście otwarto-domknięte, podobnie jak skończone sumy tych zbiorów (po S oraz po c) w wyrażeniu (5.6) na $(\mathbf{T}_{\mathsf{STR}})^c$. Czyli ostatecznie zbiór $(\mathbf{T}_{\mathsf{STR}})^c$ jest typu F_σ, a jego dopełnienie $\mathbf{T}_{\mathsf{STR}}$ jest typu G_δ.

Pokażemy teraz, że $\mathbf{T}_{\mathsf{STR}}$ jest zbiorem miary pełnej dla każdej G-niezmienniczej, borelowskiej miary probabilistycznej ν na $\mathbf{T}$. Niech $(K_k)_{k\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem zbiorów wstępujących, takim że $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} K_k = G$. Zauważmy, że jeżeli ciąg $\boldsymbol{\mathcal{T}} = (\mathcal{T}_k)_{k\geq 0}$ spełnia warunek, że dla nieskończenie wielu $k \in \mathbb{N}$, K_k-rdzeń (pojęcie rdzenia zostało wyjaśnione w dowodzie Lematu 3.2.5) centralnego kafelka T_k^e zawiera jedność e, to wówczas $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ jest w pozycji ogólnej. W istocie, w takim przypadku inkluzja $T_k^e \supset K_k$ zachodzi dla nieskończenie wielu $k \in \mathbb{N}$, zatem suma $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} T_k^e$ jest równa G.

Zauważmy, że jeżeli ciąg $(\mathsf{T}_k)_{k\geq 0}$ w połączeniu $\mathbf{T} = \bigvee_{k\geq 0} \mathsf{T}_k$ zastąpimy jakimś jego podciągiem, to zbiór $\mathbf{T}_{\mathsf{STR}}$ nie ulegnie zmianie. Możemy więc wybrać taki podciąg $(\mathsf{T}_k)_{k\geq 0}$ by spełniony był warunek: dla każdego $k \in \mathbb{N}$ i każdego $S \in \mathcal{S}_k$ suma następujących podkafelków kształtu S:

- pierwszego i ostatniego (tzn. $S_1' c_1^S$ oraz $S_{l(S)}' c_{l(S)}^S$ w notacji przyjętej w (5.4)),
- tych podkafelków, które nie są zawarte w K_k-rdzeniu S,

ma liczność nie większą niż $\frac{|S|}{2^k}$. Gdy $\mathbf{T}$ spełnia ten warunek, to dla każdego $k \in \mathbb{N}$ suma tych podkafelków każdego kafelka $T \in \mathcal{T}_k$, które nie są ani pierwszym, ani ostatnim (w numeracji zadanej przez porządek podkafelków) oraz nie są zawarte w K_k-rdzeniu kafelka T, ma górną gęstość Banacha[4] co najwyżej 2^{-k} (patrz np. [14, Lemma 4.15]). To zaś implikuje, że dla każdej G-niezmienniczej, borelowskiej miary probabilistycznej ν na $\mathbf{T}$, zbiór tych ciągów $\boldsymbol{\mathcal{T}} \in \mathbf{T}$, dla których e należy do pierwszego bądź ostatniego podkafelka T_k^e albo do podkafelka, który nie jest zawarty w K_k-rdzeniu T_k^e, ma miarę ν nie większą niż 2^{-k}. Na mocy Lematu Borela-Cantellego, zbiór tych $\boldsymbol{\mathcal{T}}$, dla których zachodzi to dla nieskończenie wielu $k \in \mathbb{N}$, ma miarę ν równą zero. Zauważmy, że wspomniany zbiór jest nadzbiorem zbioru $\mathbf{T}_{\mathsf{STR}}^c$ (patrz wzór (5.6)). Zatem zbiór $\mathbf{T}_{\mathsf{STR}}^c$ również jest miary ν zero. Zatem jego dopełnienie $\mathbf{T}_{\mathsf{STR}}$ jest pełnej miary ν.

Stąd też wynika, że zbiór $\mathbf{T}_{\mathsf{STR}}$ jest gęsty w $\mathbf{T}$.[5] Zatem $\mathbf{T}_{\mathsf{STR}}$, będąc gęstym zbiorem typu G_δ, jest zbiorem rezydualnym. ■

Jesteśmy wreszcie przygotowani do wprowadzenia kluczowej definicji tego rozdziału.

Definicja 5.2.6. *Niech* $\mathbf{T}$ *będzie uporządkowanym systemem tilingów.* Multiporządkiem pochodzącym od systemu tilingów $\mathbf{T}$ *nazywamy zbiór*

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\mathbf{T}} = \{\prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}} : \ \boldsymbol{\mathcal{T}} \in \mathbf{T}_{\mathsf{STR}}\}.$$

[4]Jeżeli G jest grupą przeliczalną, to *górną gęstością Banacha* zbioru $D \subset G$ nazywamy liczbę $\inf_F \sup_{g\in G} \frac{|D\cap Fg|}{|F|}$, gdzie infimum jest wzięte po wszystkich skończonych podzbiorach $F \subset G$. Więcej informacji na temat górnej gęstości Banacha oraz jej związkach z miarami niezmienniczymi można znaleźć np. w [14, Sekcja 6.2] oraz [13, Sekcja 4].

[5]W minimalnym układzie dynamicznym (X, G), każdy zbiór, który jest miary pełnej dla przynajmniej jednej G-niezmienniczej, borelowskiej miary probabilistycznej, jest gęsty w X

Uwaga 5.2.7. Zauważmy, że odwzorowanie $\mathbf{T}_{\mathsf{STR}} \ni \boldsymbol{\mathcal{T}} \mapsto \prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}} \in \tilde{\mathcal{O}}_{\mathbf{T}}$ jest borelowskie oraz że spełnia ono zależność $g(\boldsymbol{\mathcal{T}}) \mapsto g(\prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}})$. W istocie, dla każdego $g \in G$ porządek $\prec_{g(\boldsymbol{\mathcal{T}})}$ zadany przez przesunięty ciąg tilingów $g(\boldsymbol{\mathcal{T}})$ spełnia

$$a \prec_{g(\boldsymbol{\mathcal{T}})} b \iff ag \prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}} bg.$$

Zatem $\prec_{g(\boldsymbol{\mathcal{T}})} = g(\prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}})$ jak we wzorze (2.1). Ponieważ $\mathbf{T}$ jest zwartą przestrzenią metryczną, na której grupa G działa przez homeomorfizmy, więc na $\mathbf{T}$ istnieje G-niezmiennicza, borelowska miara probabilistyczna μ. Z Lematu 5.2.5 wynika, że $\mathbf{T}_{\mathsf{STR}}$ jest zbiorem G-niezmienniczym oraz że jest zbiorem miary pełnej dla każdej G-niezmienniczej, borelowskiej miary probabilistycznej na $\mathbf{T}$. Zatem $\tilde{\mathcal{O}}_{\mathbf{T}}$ jest również nośnikiem miary ν będącej obrazem μ przez odwzorowanie $\boldsymbol{\mathcal{T}} \mapsto \prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$. Ostatecznie więc, $(\tilde{\mathcal{O}}_{\mathbf{T}}, \nu, G)$ jest multiporządkiem w myśl Definicji 2.1.2.

Istotną własnością posiadaną przez multiporządki pochodzące od systemów tilingów jest tak zwana jednostajna własność Følnera, stanowiąca wzmocnienie zwykłej własności Følnera (patrz Definicja 2.1.7), posiadanej przez każdy multiporządek.

Definicja 5.2.8. *Mówimy, że multiporządek $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$ ma* jednostajną własność Følnera *bądź że jest* jednostajnie følnerowski*, jeżeli dla każdego skończonego zbioru $K \subset G$ oraz dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $n \in \mathbb{N}$, taka że dla ν-prawie każdego porządku $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$, każdy odcinek porządkowy $[a, b]^{\prec}$ o długości co najmniej n, jest (K, ε)-niezmienniczy.*

Twierdzenie 5.2.9. *Każdy multiporządek $(\tilde{\mathcal{O}}_{\mathbf{T}}, \nu, G)$ pochodzący od uporządkowanego systemu tilingów $\mathbf{T}$ ma jednostajną własność Følnera.*

Dowód. Niech $\tilde{\mathcal{O}}_{\mathbf{T}}$ będzie multiporządkiem pochodzącym od uporządkowanego systemu tilingów $\mathbf{T}$. Ustalmy zbiór skończony $K \subset G$ oraz $\varepsilon > 0$. Niech $k \in \mathbb{N}$ będzie liczbą, taką że każdy kształt $S \in \mathcal{S}_k$ jest $(K, \frac{\varepsilon}{2})$-niezmienniczy. Położżmy $N = \max\{|S| : S \in \mathcal{S}_k\}$ oraz $n = \lceil \frac{2N}{\delta} \rceil$, gdzie $\delta = \frac{\varepsilon}{2|K|+1}$. Z definicji $\prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$, każdy odcinek porządkowy $[a, b]^{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$ o długości co najmniej n, jest sumą (całych) kafelków tilingu $\mathcal{T}_k$ oraz, być może, fragmentów dwóch dodatkowych tilingów, których elementy znajdują się na początku i na końcu przedziału $[a, b]^{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$. Sumaryczna długość tych fragmentów nie przekracza jednak $2N$, więc zajmują one nie więcej niż $\frac{\varepsilon}{2}$ długości całego odcinka. Skoro każdy z kafelków $\mathcal{T}_k$ jest $(K, \frac{\varepsilon}{2})$-niezmienniczy, więc suma kafelków, które są całkowicie zawarte w $[a, b]^{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$, również jest $(K, \frac{\varepsilon}{2})$-niezmiennicza. Ostatecznie więc, cały odcinek $[a, b]^{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$ jest (K, ε)-niezmienniczy. ■

Jak się okazuje, jednostajna własność Følnera multiporządku pochodzącego od systemu tilingu jest nie tyle własnością samego multiporządku, co właśnie uporządkowanego systemu tilingu od którego pochodzi, co pokazuje poniższy lemat.

Lemat 5.2.10. *Niech $\mathbf{T}$ będzie uporządkowanym systemem tilingów. Dla każdego skończonego zbioru $K \subset G$ i każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba l_0, taka że dla każdego $\boldsymbol{\mathcal{T}} = (\mathcal{T}_k)_{k \geq 0} \in \mathbf{T}$, każdego $k \in \mathbb{N}$ oraz $T \in \mathcal{T}_k$ spełniającego $|T| \geq l_0$, każdy odcinek porządkowy $I \in \mathcal{I}^T$ (zawarty w T) o długości co najmniej l_0, jest (K, ε)-niezmienniczy.*

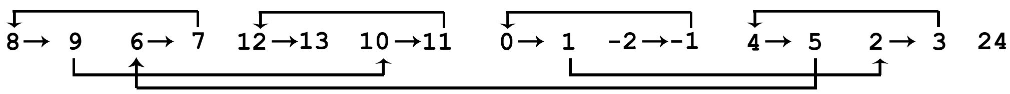
Dowód. Na mocy Twierdzenia 5.2.9 istnieje liczba l_0, taka że dla każdego $\boldsymbol{\mathcal{T}} \in \mathbf{T}_{\mathsf{STR}}$, każdy odcinek porządkowy I w porządku $\prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$, o długości co najmniej l_0, jest (K, ε)-niezmienniczy. Ponadto, na mocy Lematu 5.2.5, $\mathbf{T}_{\mathsf{STR}}$ jest gęsty w $\mathbf{T}$, więc każdy odcinek $I \in \mathcal{I}^T$ jest odcinkiem porządkowym w pewnym porządku $\prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$, gdzie $\boldsymbol{\mathcal{T}} \in \mathbf{T}_{\mathsf{STR}}$. Stąd wynika teza. ■

Podrozdział ten zakończymy trzema przykładami multiporządków pochodzących od uporządkowanych systemów tilingów. Szczególnie interesujący jest Przykład 5.2.12. Pokazuje on bowiem, że na $\mathbb{Z}$ można zadać wiele niestandardowych porządków istotnie różnych od standardowego porządku $<$.

Przykład 5.2.11. Niech $G = \mathbb{Z}$ i niech $\mathbf{T}$ składa się z ciągów tilingów $\boldsymbol{\mathcal{T}} = (\mathcal{T}_k)_{k\geq 0}$, takich że każdy tiling $\mathcal{T}_k$ jest rozbiciem $\mathbb{Z}$ na odcinki o jednakowej długości 2^k (czyli każda rodzina kształtów $\mathcal{S}_k$ składa się z jednego elementu będącego jakimś odcinkiem w $\mathbb{Z}$ o długości 2^k, który zawiera 0). Na każdym poziomie k numerujemy podkafelki każdego kafelka T od lewej do prawej. Wówczas każdy ciąg tilingów $\boldsymbol{\mathcal{T}} \in \mathbf{T}_{\mathsf{STR}}$ zadaje porządek $\prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$, który zgadza się z naturalnym porządkiem $<$ na $\mathbb{Z}$.

Zauważmy, że w powyższym przykładzie, w $\mathbf{T}$ jest przeliczalnie wiele ciągów tilingów $\boldsymbol{\mathcal{T}} = (\mathcal{T}_k)_{k\geq 0}$, które nie są w pozycji ogólnej. Są to dokładnie takie ciągi tilingów, dla których istnieje element $n \in \mathbb{Z}$, taki że od pewnego miejsca $k \in \mathbb{N}$, n jest krańcem jakiegoś odcinka (kafelka) $T \in \mathcal{T}_k$. Każdy z tych ciągów zadaje naturalny porządek na odcinkach $(-\infty, n]$ oraz $[n+1, \infty)$, lecz elementy n oraz $n+1$ nie są ze sobą porównywalne.

Przykład 5.2.12. Niech G oraz $\mathbf{T}$ będą jak w Przykładzie 5.2.11, lecz tym razem inaczej numerujemy podkafelki na poziomach $k \in \mathbb{N}$. Dla k parzystych, podkafelki numerujemy od lewej do prawej, a dla k nieparzystych od prawej do lewej. W ten sposób otrzymujemy multiporządek na $\mathbb{Z}$ złożony z niestandardowych porządków (mających „nieograniczone skoki”), takich jak na Rysunku 5.1.



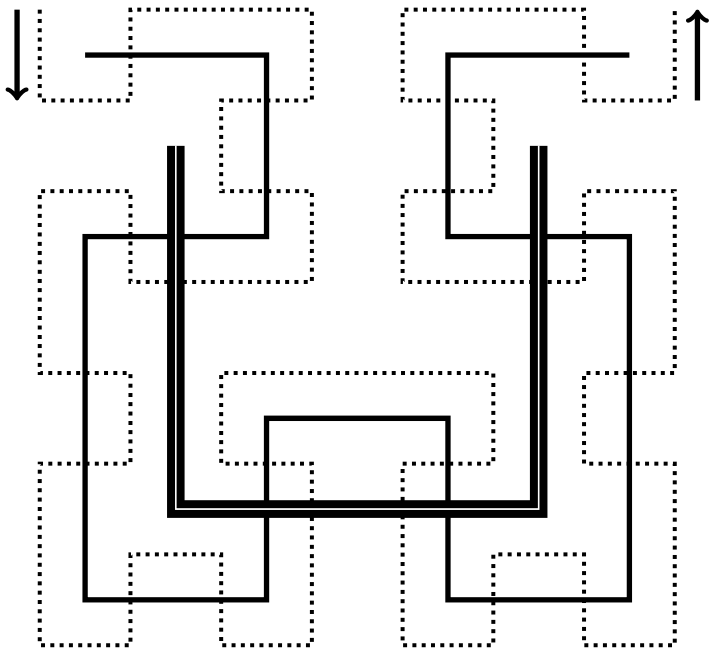
Rysunek 5.1. Przykład niestandardowego porządku na $\mathbb{Z}$

Przykład 5.2.13. Rozważmy teraz grupę $G = \mathbb{Z}^2$ z dodawaniem po współrzędnych. Niech $\mathbf{T}$ będzie systemem tilingów, takim że dla każdego $k \in \mathbb{N}$, rodzina kształtów $\mathcal{S}_{k+1}$ składa się z czterech jednakowych kwadratów o rozmiarze $2^{k+1}\times 2^{k+1}$, którym nadajemy jednak różne symbole, na przykład $\sqcup_{k+1}$, $\sqsubset_{k+1}$, $\sqsupset_{k+1}$ i $\sqcap_{k+1}$. Każdy z tych kształtów dzielimy na cztery podkafelki będące identycznymi kwadratami (oznaczonymi jednak różnymi symbolami) o rozmiarze $2^n \times 2^n$, wykorzystując trzy z czterech dostępnych kształtów $\sqcup_k$, $\sqsubset_k$, $\sqsupset_k$ i $\sqcap_k$ (dwa z podkafelków mają ten sam kształt). Kształty dzielone są według schematu (numery w macierzach odpowiadają numeracji podkształtów):

$$\sqcup_{k+1} = \begin{bmatrix} \sqsupset_k & \sqsubset_k \\ \sqcup_k & \sqcup_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \ \sqsubset_{k+1} = \begin{bmatrix} \sqsubset_k & \sqcup_k \\ \sqsubset_k & \sqcap_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\sqsupset_{k+1} = \begin{bmatrix} \sqcup_k & \sqsupset_k \\ \sqcap_k & \sqsupset_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \ \sqcap_{k+1} = \begin{bmatrix} \sqcap_k & \sqcap_k \\ \sqsupset_k & \sqsubset_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sposób, w jaki numerowane są podkształty przypomina konstrukcję tzw. krzywej Hilberta, z tą różnicą, że zamiast otrzymywać coraz gęstszą krzywą w każdym kolejnym kroku, odwracamy proces. Rozpoczynamy od łamanej, w której wierzchołkach są wszystkie punkty z $\mathbb{Z}^2$ i w każdym kroku konstruujemy krzywą zbudowaną z coraz większych kwadratów, tak jak na Rysunku 5.2 (krzywe o różnym stylu i grubości linii odpowiadają kolejnym poziomom tilingów a krzywa o cienkiej linii przerywanej odpowiada poziomowi najniższemu). Jak można łatwo sprawdzić, każdy $\boldsymbol{\mathcal{T}} \in \mathbf{T}_{\mathsf{STR}}$ generuje inną krzywą Hilberta.



Rysunek 5.2. Krzywa Hilberta na $\mathbb{Z}^2$

5.3 Wyśrodkowane oraz hodometryczne systemy tilingów

W podrozdziale tym zdefiniujemy dwie nowe klasy uporządkowanych systemów tilingów - wyśrodkowane oraz hodometryczne. Wykorzystane one zostaną w kolejnym rozdziale do konstrukcji rozszerzenia bez par asymptotycznych.

Definicja 5.3.1. *Uporządkowany system tilingów* $\mathbf{T} = \bigvee_{k\geq 0} \mathsf{T}_k$ *nazywamy* wyśrodkowanym*, jeżeli dla każdego* $\boldsymbol{\mathcal{T}} = (\mathcal{T}_k)_{k\geq 0} \in \mathbf{T}$*, każdego* $k \in \mathbb{N}$ *oraz każdego* $T \in \mathcal{T}_k$*, środek kafelka* T *jest elementem minimalnym porządku* $\prec_T$ *(porządek* $\prec_T$ *zdefiniowany został pod Definicją 5.2.2).*

Uwaga 5.3.2. Każdy uporządkowany system tilingów $\mathbf{T}$ posiada faktor topologiczny będący wyśrodkowanym systemem tilingów $\tilde{\mathbf{T}}$. W istocie, wymagany faktor tworzymy, przesuwając odpowiednio środek każdego kafelka w $\mathbf{T}$. Dokładniej, w miejsce każdego kształtu $S \in \mathcal{S}_k$ kładziemy nowy kształt $\tilde{S} = S \cdot g^{-1}$, gdzie g jest elementem minimalnym w porządku na S. Porządek elementów na $\tilde{S}$ ustalamy jako obraz porządku na S przez przesunnięcie o g^{-1}. W ten sposób jedność e jest zawsze minimalnym elementem kształtu $\tilde{S}$ i, w konsekwencji, środek każdego kafelka $\tilde{T}$ o kształcie $\tilde{S}$ jest minimalnym elementem w porządku na $\tilde{T}$ (wynikającym z porządku na $\tilde{S}$ według reguły (5.5)). Przekształcenie z $\mathbf{T}$ na $\tilde{\mathbf{T}}$ polega na przekodowaniu każdego ciągu elementów symbolicznych $\boldsymbol{\mathcal{T}} \in \mathbf{T}$ reprezentującego ciąg tilingów na ciąg elementów symbolicznych $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{T}}} \in \tilde{\mathbf{T}}$ dla nowych rodzin kształtów $\tilde{\mathcal{S}}_k = \{\tilde{S} : S \in \mathcal{S}_k\}$. Zauważmy, że w ten sposób, w żadnym z tilingów nie modyfikujemy żadnego kafelka (jako zbioru), a jedynie jego reprezentację (S, c), gdzie S przechodzi na $\tilde{S} = S \cdot g^{-1}$ a c przechodzi na $\tilde{c} = g \cdot c$. Oczywiście $\tilde{\mathbf{T}}$ jest deterministyczny, gdyż $\mathbf{T}$ taki był. Łatwo sprawdzić ponadto, że jeżeli $\boldsymbol{\mathcal{T}} \in \mathbf{T}$ jest wyprostowanym ciągiem tilingów, to jego obraz $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$ w $\tilde{\mathbf{T}}$ również jest ciągiem wyprostowanym i zachodzi $\prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}} = \prec_{\tilde{\boldsymbol{\mathcal{T}}}}$.

Definicja 5.3.3. *Niech $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ będzie ściśle rosnącym ciągiem liczb naturalnych, takim że $p_{k-1}|p_k$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Uporządkowany system tilingów $\mathsf{T} = \bigvee_{k\geq 0} \mathsf{T}_k$ o rodzinach kształtów $\mathcal{S}_k$, $k \geq 0$, nazywamy* hodometrycznym *(z bazą $(p_k)_{k\geq 0}$) jeżeli dla każdego $\boldsymbol{\mathcal{T}} = (\mathcal{T}_k)_{k\geq 0} \in \mathsf{T}$, każdego $k \in \mathbb{N}$ oraz każdego $T \in \mathcal{T}_k$, środki podkafelków $T' \in \mathcal{T}_{k-1}$ kafelka T spełniają zależność*

$$j_{T'} \equiv j_T \mod p_{k-1}, \tag{5.7}$$

gdzie $j_{T'}$ oraz j_T są pozycjami środków kafelków odpowiednio T' oraz T, licząc wzdłuż porządku $\prec_T$.[6]

Uwaga 5.3.4. Jeżeli T jest hodometryczny, to dla każdego $\boldsymbol{\mathcal{T}} = (\mathcal{T}_k)_{k\geq 0} \in \mathsf{T}_{\mathsf{STR}}$ i każdego $k \in \mathbb{N}$, pozycje środków wszystkich kafelków $T \in \mathcal{T}_k$ w porządku $\prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$ przystają do siebie modulo p_k.

Poniższy lemat pokazuje, że dla każdego systemu tilingów T można skonstruować system tilingów T', hodometryczny z dowolną zadaną bazą $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$, który jest rozszerzeniem pryncypialnym[7] T.

Lemat 5.3.5. *Niech $\mathsf{T} = \bigvee_{k\geq 0} \mathsf{T}_k$ będzie wyśrodkowanym systemem tilingów na G i niech $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ będzie jak Definicji 5.3.3. Wówczas istnieje system tilingów T' na G, hodometryczny z bazą $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$, będący pryncypialnym rozszerzeniem T. Ponadto, dla każdego $\boldsymbol{\mathcal{T}} \in \mathsf{T}_{\mathsf{STR}}$, każdy $\boldsymbol{\mathcal{T}}' \in \mathsf{T}'$ należący do włókna $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ jest wyprostowanym ciągiem tilingów w T' oraz spełnia $\prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}'} = \prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$.*

Dowód. Tradycyjnie przez $\mathcal{S}_k$ oznaczać będziemy rodzinę kształtów tilingu dynamicznego T_k. Przechodząc do podciągu $(T_k)_{k\geq 0}$, możemy założyć, że $p_k \leq \min\{|S| : S \in \mathcal{S}_k\}$. System T' konstruujemy według poniższego schematu.

W początkowym kroku, dla każdego $k \in \mathbb{N}$ oraz $\mathcal{T}_k \in \mathsf{T}_k$, przesuwamy środek każdego kafelka $T \in \mathcal{T}_k$ na jedną z p_k początkowych pozycji w T (licząc wzdłuż $\prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$). Czynimy to na wszystkie możliwe sposoby, niezależnie dla każdego kafelka. W ten sposób tworzymy kongruentny (lecz nie deterministyczny) układ tilingów $\mathsf{T}^{(0)}$, który jest oczywiście rozszerzeniem topologicznym systemu T. Każdy kształt $S \in \mathcal{S}_k$ zastępujemy w T^0 p_k nowymi kształtami, w zależności od pozycji środka S. Entropia topologiczna k-tego poziomu tego rozszerzenia zostaje więc zwiększona o nie więcej niż $\delta_k = \frac{\log p_k}{\min\{|S|:S\in\mathcal{S}_k\}} < \frac{\log p_k}{p_k}$ względem entropii T_k. Ponieważ liczby p_k rosną podwykładniczo, więc $\sum_{k\in\mathbb{N}} \delta_k < \infty$.

Następnie, w każdym kroku $n \geq 1$ konstruujemy $\mathsf{T}^{(n)}$, zachowując jedynie te ciągi $(\mathcal{T}_k^{(0)})_{k\geq 0} \in \mathsf{T}^{(0)}$, które spełniają warunek, że dla każdego $n \geq k$, każdego kafelka $T \in \mathcal{T}_n^{(0)}$ oraz każdego podkafelka $T' \in \mathcal{T}_k^{(0)}$ kafelka T, zachodzi $j_{T'} \equiv j_T \mod p_k$, gdzie $j_{T'}$ oraz j_T są pozycjami środków odpowiednio T' oraz T, licząc wzdłuż porządku $\prec_T$. Entropia warunkowa układu $(\mathsf{T}^{(n)}, G)$ pod warunkiem (T, G) jest ograniczona przez $\Sigma_{k\geq n}\delta_k$ (która to liczba zbiega do 0, gdy $n \to \infty$). Układ tilingów T' definiujemy jako przekrój (po n) kongruentnych układów tilingów $\mathsf{T}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że T' jest już deterministyczny, gdyż środek każdego kafelka determinuje pozycje środków wszystkich jego podkafelków. Zatem T' jest systemem tilingów rozszerzającym T. Ze sposobu w jaki konstruowaliśmy

[6]Przez pozycję elementu $g \in T$ w porządku $\prec_T$, gdzie T jest kafelkiem pewnego tilingu, rozumiemy liczbę $j \in [1, |T|]$, taką że $j^{\prec_T} = g$. Analogicznie, przez pozycję elementu $g \in G$ w porządku $\prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$, gdzie $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ jest wyprostowanym ciągiem tilingów, rozumiemy liczbę $j \in \mathbb{Z}$, taką że $j^{\prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}}} = g$.

[7]*Rozszerzeniem pryncypialnym* topologicznego układu dynamicznego (X, G) nazywamy układ topologiczny $(\hat{X}, G)$, taki że dla każdej G-niezmienniczej, borelowskiej miary probabilistycznej ν na $\hat{X}$ zachodzi $h(\nu, G|\Sigma_X)$, gdzie Σ_X jest sigma-ciałem borelowskim na X.

układy $\mathbf{T}^{(n)}$ wynika wprost, że $\mathbf{T}$ jest również hodometryczny z bazą $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Łatwo również sprawdzić, że dla każdego $\mathcal{T} \in \mathbf{T}_{\mathsf{STR}}$, wszystkie $\mathcal{T}'$ należące do włókna $\mathcal{T}$ są wyprostowane oraz spełniają $\prec_{\mathcal{T}'} = \prec_{\mathcal{T}}$. Warunkowa entropia topologiczna układu $(\mathbf{T}', G)$ pod warunkiem faktora $(\mathbf{T}, G)$ wynosi zero, gdyż $\mathbf{T}'$ jest zdefiniowany jako przekrój układów $\mathbf{T}^{(n)}$, gdzie ciąg entropii warunkowych $\lim\limits_{n\to\infty} h_{\mathsf{top}}(\mathbf{T}^{(n)}, G|\mathbf{T})$. Stąd, na mocy zasady wariacyjnej dla entropii warunkowej (zob. np. [30, Twierdzenie 5.1]), dla każdej G-niezmienniczej, borelowskiej miary probabilistycznej ν na $\mathbf{T}'$ mamy $h(\nu, G|\Sigma_{\mathbf{T}}) = 0$, gdzie $\Sigma_{\mathbf{T}}$ jest sigma-ciałem borelowskim na $\mathbf{T}$. Zatem $(\mathbf{T}', G)$ jest rozszerzeniem pryncypialnym $(\mathbf{T}, G)$. ■

Rozdział 6

Uogólnienie Twierdzenia Downarowicza-Lacroix na działania przeliczalnych grup ze średnią

Rozdział ten poświęcony jest udowodnieniu Twierdzenia 6.2.3 głoszącego, że każdy topologiczny układ dynamiczny (X, G) o entropii zero posiada rozszerzenie (Y, G), które nie ma par asymptotycznych wzdłuż żadnego porządku z pewnego multiporządku pochodzącego od systemu tilingów. Razem z Twierdzeniem 4.2.6 daje ono pełną charakteryzację układów o entropii zero jako faktorów układów bez par asymptotycznych, analogiczną do Twierdzenia [12, Twierdzenie 4.1].

Podobnie jak w przypadku Twierdzenia 4.2.6, dotyczącego istnienia par asymptotycznych w układach o dodatniej entropii, wpierw udowodnimy wersję twierdzenia dla tzw. układów topologicznie multiuporządkowanych, czyli układów topologicznych (X, G) posiadających faktor T będący systemem tilingów. Dodatkowo będziemy zakładać, że ów system tilingów T jest hodometryczny oraz że przeciwobraz zbioru ciągów wyprostowanych $\mathsf{T}_{\mathsf{STR}}$ jest gęsty w X. Następnie rozszerzymy to twierdzenie na dowolne układy topologiczne z działaniem grup ze średnią. Rozpoczynamy więc od wprowadzenia formalnej definicji układu topologicznie multiuporządkowanego oraz pary φ-asymptotycznej w takim układzie.

Definicja 6.0.1. *Niech (X, G) będzie topologicznym układem dynamicznym, takim że istnieje uporządkowany system tilingów (T, G), będący faktorem (X, G) przez odwzorowanie $\phi : X \to \mathsf{T}$ i niech $\tilde{X} = \phi^{-1}(\mathsf{T}_{\mathsf{STR}})$. Niech $\varphi : \tilde{X} \to \tilde{\mathcal{O}}_{\mathsf{T}}$ będzie dane przez $x \mapsto \prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$, gdzie $\boldsymbol{\mathcal{T}} = \phi(x)$. Wówczas czwórkę (X, G, ϕ, φ) będziemy nazywać* topologicznie multouporządkowanym układem dynamicznym. *Parę (x, x') różnych punktów z X będziemy nazywać φ-asymptotyczną, jeżeli $x, x' \in \tilde{X}$, $\varphi(x) = \varphi(x')$ (lecz niekoniecznie $\phi(x) = \phi(x')$) oraz jeżeli punkty te tworzą parę $\prec$-asymptotyczną, gdzie $\prec = \varphi(x)$.*

Uwaga 6.0.2. Zauważmy, że jeżeli (X, G, ϕ, φ) jest topologicznie multiuporządkowanym układem dynamicznym oraz μ jest G-niezmienniczą, borelowską miarą probabilistyczną na X, to (X, μ, G, φ) jest układem multiuporządkowanym w myśl Definicji 2.2.1 (patrz Uwaga 5.2.7). Co więcej, każda para (x, x') punktów z X, która jest φ-asymptotyczna w sensie Definicji 6.0.1, jest również φ-asymptotyczna w myśl Definicji 4.0.2.

6.1 Rozszerzenia zerowymiarowe

W konstrukcji rozszerzenia bez par asymptotycznych posłużymy się teorią rozszerzeń zerowymiarowych. Ten krótki podrozdział poświęcony jest zaznajomieniu czytelnika z kilkoma elementami tej teorii oraz wprowadzeniu pewnych przydatnych oznaczeń. Oczywiście sama teoria rozszerzeń zerowymiarowych jest niezwykle bogata, my ograniczymy się jedynie do przytoczenia kilku faktów, istotnych z punktu widzenia dalszych rozważań.

Układ dynamiczny (X, G) nazywamy *zerowymiarowym*, jeżeli sama przestrzeń X jest zerowymiarowa (tzn. istnieje baza topologii X, która składa się wyłącznie ze zbiorów otwarto-domkniętych). Każdy zerowymiarowy układ (X, G) może być reprezentowany przez podukład $(\prod_{n\in\mathbb{N}}\{0,1\}^G, G)$, którego elementy mają postać „tablic binarnych" $(x_{n,g})_{n\in\mathbb{N},g\in G}$, gdzie $x_{n,g} \in \{0,1\}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i $g \in G$, a na którym G działa poprzez przesunięcia (na każdym poziomie n), tzn. $(h(x))_{n,g} = x_{n,gh}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i $g, h \in G$. Czyli, innymi słowy, na każdy układ zerowymiarowy możemy patrzeć jak na przeliczalne połączenie binarnych układów symbolicznych (nad G). Od tej pory, mówiąc o układzie zerowymiarowym, zawsze będziemy mieć już na myśli właśnie powyższą jego reprezentację.

Uwaga 6.1.1. Ponieważ układ tilingów T jest definiowany jako połączenie przeliczalnie wielu układów symbolicznych T_k, $k \geq 0$, więc jest on oczywiście sam w sobie układem zerowymiarowym.

Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ oraz zbiór skończony $F \subset G$. *Blokiem n-piętrowym o dziedzinie F* nazywać będziemy skończoną „tablicę" $B = (b_{i,g})_{i\in[1,n],g\in F} \in \prod_{i=1}^{n}\{0,1\}^F$. Dla bloków B i B' będziemy ponadto pisać $B \approx B'$, jeżeli mają one tę samą liczbę pięter n oraz, z dokładnością do przesunięcia, mają jednakowe dziedziny, tzn. jeżeli F jest dziedziną B to istnieje element $h \in G$, taki że Fh jest dziedziną B', i dla każdego $i \in [1, n]$ oraz każdego $g \in F$ mamy $b_{i,g} = b'_{i,gh}$. Powiemy również, że blok B o n piętrach i dziedzinie F, *występuje* w X, jeżeli istnieje punkt $x \in X$, taki że dla każdego $i \in [1, n]$ oraz każdego $g \in F$ zachodzi $x_{i,g} = b_{i,g}$. W takiej sytuacji będziemy pisać $x|_{[1,n]\times F} = B$. Rodzinę wszystkich bloków o n piętrach i dziedzinie F, które występują w X, będziemy oznaczać symbolem $\mathcal{B}_n(F)$. Zauważmy, że ponieważ X jest niezmienniczy na działanie G dane przez przesunięcia, to blok B występuje w X razem ze wszystkimi swoimi przesunięciami, tzn. blokami B', takimi że $B \approx B'$. W przypadku, gdy $G = \mathbb{Z}$ i $F \subset \mathbb{Z}$ jest odcinkiem o długości l, zamiast mówić, że blok B ma dziedzinę F, powiemy, że blok B ma długość l (z niezmienniczości na przesunięcia, każdy blok B' o tej samej liczbie pięter co B, dziedzinie będącej odcinkiem o długości l oraz takich samych symbolach występujących w takiej samej kolejności, spełnia $B \approx B'$).

Każdy topologiczny układ dynamiczny (X, G) z działaniem grupy ze średnią G, posiada rozszerzenie zerowymiarowe $(\hat{X}, G)$, które jest pryncypialne, czyli dla każdej G-niezminniczej, borelowskiej miary probabilistycznej ν na $\hat{X}$ zachodzi $h(\nu, G|\Sigma_X) = 0$, gdzie Σ_X jest sigma-ciałem borelowskim na X – zob. [17, Twierdzenie 3.2]. Jeżeli ponadto $h_{\mathsf{top}}(X, G) = 0$, to na mocy zasady wariacyjnej dla działań grup ze średnią, zachodzi również $h_{\mathsf{top}}(\hat{X}, G) = 0$.

Podrozdział ten zakończymy prostym lematem dotyczącym układów zerowymiarowych o entropii zero, który wynika z Lematu 5.2.10.

Lemat 6.1.2. *Niech $\mathsf{T} = \bigvee_{k\geq 0} \mathsf{T}_k$ będzie uporządkowanym systemem tilingów na przeliczalnej grupie ze średnią G i niech $\mathcal{S}_k$ oznacza rodzinę kształtów tilingu T_k. Niech (X, G) będzie układem zerowymiarowym, takim że $h_{\mathsf{top}}(X, G) = 0$. Wówczas, dla każdego $\varepsilon > 0$*

oraz każdego $n \in \mathbb{N}$, *istnieje liczba* l_0, *taka że dla każdego* $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_k)_{k\geq 0} \in \mathbf{T}$, *każdego* $k \in \mathbb{N}$ *i dowolnego* $T \in \mathcal{T}_k$ *o liczności* $|T| \geq l_0$ *oraz każdego odcinka* $I \in \mathcal{I}^T$ *(zawartego w* T*) o długości* $l \geq l_0$, *zachodzi*

$$\#\mathcal{B}_n(I) < 2^{\lfloor l\cdot\varepsilon\rfloor}. \tag{6.1}$$

Dowód. Przypuśćmy, że teza lematu nie jest prawdziwa. Wówczas istnieją liczby $\varepsilon > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ oraz rosnący ciąg liczb naturalnych $(l_m)_{m\in\mathbb{N}}$ i ciąg kafelków $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$, takich że każdy T_m jest kafelkiem jakiegoś tilingu $\mathcal{T}_{k_m}$ z ciągu $\mathcal{T} \in \mathbf{T}$ oraz spełnia $|T_m| \geq l_m$. Istnieje również ciąg odcinków $(I_m)_{m\in\mathbb{N}}$, takich że dla każdego $m \in \mathbb{N}$ mamy $I_m \in \mathcal{I}^{T_m}$ oraz $|I_m| = l_m$ oraz dla którego zachodzi

$$\#\mathcal{B}_n(I_m) \geq 2^{\lfloor l_m\cdot\varepsilon\rfloor}.$$

Z Lematu 5.2.10 wynika, że ciąg $(I_m)_{m\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Følnera w G. Stąd, powyższa równość implikuje, że $h_{\mathsf{top}}(X,G) \geq \varepsilon$. Otrzymaliśmy więc sprzeczność. ■

6.2 Rozszerzenie topologicznego układu dynamicznego o entropii zero bez par asymptotycznych

Twierdzenie 6.2.1. *Niech* G *będzie przeliczalną grupą ze średnią i niech* (X, G, ϕ, φ) *będzie zerowymiariowym, topologicznie multiuporządkowanym układem dynamicznym, którego faktorem jest uporządkowany system tilingów* $\mathbf{T}$. *Jeżeli dodatkowo* $\tilde{X} = \phi^{-1}(\mathbf{T}_{\mathsf{STR}})$ *jest gęstym podzbiorem* X *oraz* $h_{\mathsf{top}}(X,G) = 0$, *to istnieje topologicznie multiuporządkowany układ* $(Y, G, \tilde{\phi}, \tilde{\varphi})$ *będący rozszerzeniem* (X,G) *przez odwzorowanie* π, *gdzie* $\tilde{\phi} = \phi \circ \pi$ *i* $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \pi$. *Ponadto układ* (Y,G) *również jest zerowymiarowy, ma entropię zero oraz* $\tilde{\phi}^{-1}(\mathbf{T}_{\mathsf{STR}})$ *jest gęstym podzbiorem* Y, *a odwzorowanie* π skleja *pary* $\tilde{\varphi}$*-asymptotyczne (tzn. jeżeli* (y, y') *jest parą* $\tilde{\varphi}$*-asymptotyczną w* Y, *to* $\pi(y) = \pi(y')$*).*

Dowód. Na mocy Uwagi 5.3.2 możemy założyć, że $\mathbf{T} = \phi(X)$ jest systemem wyśrodkowanym. Ponieważ X ma entropię topologiczną zero, więc $\mathbf{T}$, jako faktor X, również ma entropię zero. Na mocy Lematu 5.3.5 istnieje system tilingów $\mathbf{T}'$, hodometryczny z jakąś bazą $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$, będący rozszerzeniem pryncypialnym $\mathbf{T}$. Stąd, z zasady wariacyjnej dla działań grup ze średnią, wynika że $h_{\mathsf{top}}(\mathbf{T}', G) = 0$. Niech $(\hat{X}, G)$ będzie produktem włóknistym[1] układów (X,G) oraz $(\mathbf{T}', G)$ nad wspólnym faktorem $(\mathbf{T}, G)$. Oczywiście mamy wówczas $h_{\mathsf{top}}(\hat{X}, G) = 0$. Ponieważ $(\hat{X}, G)$ jest rozszerzeniem zerowymiarowym układu (X,G) (jest to produkt dwóch układów zerowymiarowych), więc wymagane rozszerzenie sklejające pary asymptotyczne będziemy konstruować już dla układu $(\hat{X}, G)$. Zauważmy przy tym, że układ $(\hat{X}, G)$ faktoryzuje się oczywiście na oba układy (X,G) oraz $(\mathbf{T}', G)$ poprzez rzuty na odpowiednie współrzędne, które będziemy oznaczać symbolami $\hat{\pi} : \hat{X} \to X$ i $\hat{\phi}' : \hat{X} \to \mathbf{T}'$ odpowiednio. Kładziemy ponadto $\hat{\phi} = \phi \circ \hat{\pi}$. Wówczas przekształcenia $\hat{\phi}$ i $\hat{\phi}'$ są faktor-odwzorowaniami z $(\hat{X}, G)$ w $(\mathbf{T}, G)$ i $(\mathbf{T}', G)$ odpowiednio, przy czym przekształcenia $\hat{\varphi}(x) = \prec_{\mathcal{T}}$, gdzie $\mathcal{T} = \hat{\phi}(x)$ oraz $\hat{\varphi}'(x) = \prec_{\mathcal{T}'}$, gdzie $\mathcal{T}' = \hat{\phi}'(x)$ zgadzają się gdyż $\hat{X}$ jest produktem włóknistym, a na na mocy Lematu 5.3.5, każdy ciąg tilingów $\mathcal{T}' \in \mathbf{T}'$ należący do włókna wyprostowanego ciągu $\mathcal{T} \in \mathbf{T}_{\mathsf{STR}}$ sam jest wyprostowany

[1] Jeżeli (X_1, G) oraz (X_2, G) są dwoma topologicznymi układami dynamicznymi, mającymi wspólny faktor (Y, G) odpowiednio przez przekształcenia $\pi_1 : X_1 \to Y$ oraz $\pi_2 : X_2 \to Y$, to *produktem włóknistym* układów (X_1, G) i (X_2, G) nad wspólnym faktorem (Y, G) nazywamy układ $(\hat{X}, G)$, gdzie $\hat{X} = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 : \pi_1(x_1) = \pi_2(x_2)\}$, z działaniem produktowym G.

oraz zadaje ten sam porządek na G co $\boldsymbol{\mathcal{T}}$, czyli $\prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}'} = \prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$. Ponadto $\hat{\phi}^{-1}(\mathbf{T}_{\mathsf{STR}})$ jest gęstym podzbiorem $\hat{X}$. W dalszej części będziemy się jednak zawsze odnosić do hodometrycznego systemu tilingów $\mathbf{T}'$ oraz topologicznie multiuporządkowanego układu $(\hat{X}, G, \hat{\phi}', \hat{\varphi}')$, lecz dla uproszczenia zapisu będziemy je oznaczać symbolami odpowiednio $\mathbf{T}$ oraz (X, G, ϕ, φ) tak jak pierwotnie zadany system tilingów i układ topologicznie multiuporządkowany.

Niech $\mathcal{I}$ oznacza rodzinę wszystkich odcinków porządkowych leżących wewnątrz kafelków z systemu tilingów $\mathbf{T}$ (z pominięciem kafelków poziomu zero będącymi singletonami), czyli

$$\mathcal{I} = \bigcup_{\boldsymbol{\mathcal{T}}=(\mathcal{T}_k)_{k\geq 0}\in\mathbf{T}} \ \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{T\in\mathcal{T}_k} \mathcal{I}^T.$$

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ kładziemy $\varepsilon_n = 2^{-n}$. Ponieważ $h_{\mathsf{top}}(X, G) = 0$, więc na mocy Lematu 6.1.2, dla każdego $n \in \mathbb{N}$, istnieje liczba k_n, taka że dla każdego odcinka $I \in \mathcal{I}$ o długości p_{k_n}, liczność rodziny $\mathcal{B}_n(I)$ bloków o n piętrach i dziedzinie I, które występują w X, spełnia nierówność

$$\#\mathcal{B}_n(I) < 2^{\frac{p_{k_n}}{2^n}}. \tag{6.2}$$

Zatem dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje injekcja (kodowanie) ψ_n^I z rodziny $\mathcal{B}_n(I)$ w rodzinę wszystkich binarnych bloków o długości $\frac{p_{k_n}}{2^n}$ (bez utraty ogólności możemy przyjąć, że $2^n | p_{k_n}$). Dla uproszczenia zapisu, od tej chwili, w miejsce p_{k_n} oraz $\mathcal{T}_{k_n}$ będziemy pisać odpowiednio p_n oraz $\mathcal{T}_n$.

Dla $\tilde{X} = \phi^{-1}(\mathbf{T}_{\mathsf{STR}})$, ustalmy $x \in \tilde{X}$ i połóżmy $\boldsymbol{\mathcal{T}} = (\mathcal{T}_k)_{k\geq 0} = \phi(x)$. Skonstruujemy teraz element symboliczny (binarny) y_x, który będzie częścią przeciwobrazu $\pi^{-1}(x)$.

W pierwszym kroku analizować będziemy jedynie pierwsze piętro x. Ponieważ $\mathbf{T}$ jest hodometryczny oraz $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ jest ciągiem wyprostowanym, pozycje środków wszystkich kafelków $T \in \mathcal{T}_1$, w porządku $\prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$, przystają do siebie modulo p_1. Oznacza to, że możemy podzielić całą grupę G na rozłączne odcinki wzdłuż porządku $\prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$: $\dots, I^1_{-2}, I^1_{-1}, I^1_0, I^1_1, I^1_2, \dots$, tak że każdy z odcinków I^1_i ma długość równą p_1 oraz że środek każdego z kafelków $T \in \mathcal{T}_1$ zajmuje zawsze początkową pozycję w odcinku I^1_i, do którego należy (by ustalić numerację odcinków, ustalamy, że I^1_0 jest odcinkiem, do którego należy jedność e).

Dla każdego $i \in \mathbb{Z}$, patrzymy na blok $B = x|_{\{1\}\times I^1_i}$ i znajdujemy jego obraz $\hat{B} = \psi_1^{I^1_i}(B)$ (wówczas $|\hat{B}| = \frac{p_1}{2}$). Niech R oznacza początkową połowę odcinka I^1_{i+1} – następnego w kolei (wówczas $|R| = |\hat{B}|$). Teraz definiujemy y_x obcięty do zbioru R, wpisując symbole z bloku binarnego $\hat{B}$ na pozycjach $y_x|_R$, zachowując kolejność symboli jak w bloku $\hat{B}$. Po tym kroku y_x pozostaje niezdefiniowany na dokładnie połowie każdego odcinka o długości p_1 wzdłuż porządku $\prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$. Czyli y_x pozostaje niezdefiniowany na podzbiorze G o górnej gęstości Banacha[2] $\frac{1}{2}$.

Dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$ załóżmy, że po n krokach konstrukcji, dla każdego odcinka porządkowego długości p_n wzdłuż $\prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$, element symboliczny y_x pozostaje niezdefiniowany na fragmencie tego odcinka o liczności dokładnie $(\frac{1}{2})^n p_n$. W kroku $n+1$ patrzymy na początkowych $n+1$ pięter x. Podobnie jak w kroku 1, dzielimy grupę G na rozłączne odcinki porządkowe wzdłuż $\prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$: $\dots, I^{n+1}_{-2}, I^{n+1}_{-1}, I^{n+1}_0, I^{n+1}_1, I^{n+1}_2, \dots$, tak że każdy z odcinków I^{n+1}_i ma długość równą p_{n+1} oraz że środek każdego kafelka $T \in \mathcal{T}_{n+1}$ zajmuje zawsze początkową pozycję w odcinku I^{n+1}_i, do którego należy.

Dla każdego $i \in \mathbb{Z}$ patrzymy teraz na blok $B = x|_{[1,n+1]\times I^{n+1}_i}$ i znajdujemy jego obraz $\hat{B} = \psi_{n+1}^{I^{n+1}_i}(B)$ (wówczas $|\hat{B}| = \frac{p_{n+1}}{2^{n+1}}$). Niech R oznacza zbiór złożony z dokładnie połowy początkowych elementów odcinka I^{n+1}_{i+1}, na których y_x wciąż nie jest jeszcze zdefiniowany

[2]Patrz przypis 4 w podrozdziale 5.2.

(wówczas $|R| = |\hat{B}|$). Definiujemy teraz y_x obcięte do zbioru R, wpisując symbole z $\hat{B}$ na pozycjach $y_x|_R$, zachowawszy ich kolejność. W ten sposób, po tym kroku, dla dowolnego odcinka o długości p_{n+1} wzdłuż $\prec_{\mathcal{T}}$, y_x pozostaje niezdefiniowany dokładnie na jego części o liczności $(\frac{1}{2})^{n+1}p_{n+1}$. Czyli y_x pozostaje niezdefiniowany na podzbiorze G o górnej gęstości Banacha $(\frac{1}{2})^{n+1}$.

Ostatecznie, po wykonaniu wszystkich kroków konstrukcji, y_x wciąż może pozostawać niezdefiniowany na pewnym podzbiorze G, jednak zbiór ten ma gęstość zero. Wypełniamy te puste miejsca na wszystkie możliwe sposoby. Otrzymujemy w ten sposób wiele różnych wersji y_x, które razem tworzą zbiór $Y_x \subset \{0,1\}^G$. Kładziemy teraz

$$Y = \overline{\bigcup_{x \in \tilde{X}} \bigcup_{y_x \in Y_x} \{(y_x, x)\}} \subset \{0,1\}^G \times X. \tag{6.3}$$

Oczywistym jest, że Y jest zbiorem niezmienniczym na działanie produktowe G oraz że rzut Y na drugą współrzędną jest równy $\overline{\tilde{X}} = X$. Zatem (X,G) jest faktorem (Y,G) przez rzutowanie na drugą współrzędną $\pi : \{0,1\}^G \times X \to X$. Ze wzoru (6.3) wynika również, że $\tilde{\phi}^{-1}(\mathsf{T}_{\mathsf{STR}}) = \pi^{-1}(\phi^{-1}(\mathsf{T}_{\mathsf{STR}})) = \pi^{-1}(\tilde{X})$ jest gęstym podzbiorem Y, zatem $(Y, G, \tilde{\phi}, \tilde{\varphi})$ jest układem topologicznie multiuporządkowanym. Oczywiście Y jest również układem zerowymiarowym. Łatwo można sprawdzić, że jeżeli $x \in \tilde{X}$, to $\pi^{-1}(x) = Y_x \times \{x\}$ (innymi słowy, przy domykaniu zbioru w (6.3) w przeciwobrazie $x \in \tilde{X}$ nie pojawiają się żadne nowe elementy). Ponieważ $\tilde{X}$ jest miary pełnej dla każdej G-niezmienniczej, borelowskiej miary probabilistycznej na X oraz ponieważ dla każdego $x \in \tilde{X}$, element symboliczny $y_x \in Y_x$ jest determinowany przez x na całym G za wyjątkiem zbioru o górnej gęstości Banacha zero, więc dla każdej G-niezmienniczej miary borelowskiej ν na Y, entropia warunkowa $h(\nu, G|\Sigma_X)$, gdzie Σ_X jest sigma-ciałem borelowskim na X, jest równa 0. Stąd, stosując dwukrotnie zasadę wariacyjną (dla układu (X,G) oraz układu (Y,G)), dostajemy, że entropia topologiczna układu (Y,G) również jest równa 0.

Pozostaje pokazać, że π skleja pary $\tilde{\varphi}$-asymptotyczne. Ad absurdum, załóżmy że (y_x, x) i $(y_{x'}, x')$ są punktami z Y tworzącymi parę $\tilde{\varphi}$-asymptotyczną, takimi że x i x' są różne. Wówczas, z definicji pary $\tilde{\varphi}$-asymptotycznej, x i x' należą do $\tilde{X}$ oraz

$$\varphi(x) = \tilde{\varphi}((y_x, x)) = \tilde{\varphi}((y_{x'}, x')) = \varphi(x') = \prec$$

jest porządkiem typu $\mathbb{Z}$. Połóżmy $\boldsymbol{\mathcal{T}} = (\mathcal{T}_k)_{k \geq 0} = \phi(x)$ i $\boldsymbol{\mathcal{T}}' = (\mathcal{T}'_k)_{k \geq 0} = \phi(x')$. Skoro $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ i $\boldsymbol{\mathcal{T}}'$ generują ten sam porządek, to zachodzi jedna z dwóch poniższych możliwości:

(a) Dla każdego $k \in \mathbb{N}$, pozycje środków kafelków z $\mathcal{T}_k$ przystają modulo p_k do pozycji środków kafelków z $\mathcal{T}'_k$ (licząc wzdłuż $\prec$).

(b) Dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, pozycje środków kafelków z $\mathcal{T}_k$ przystają modulo p_k do pewnej liczby j, podczas gdy pozycje kafelków z $\mathcal{T}'_k$ przystają modulo p_k do innej liczby j', takiej że $j' \not\equiv j \mod p_k$.

W przypadku (b), tilingi $\mathcal{T}_k$ oraz $\mathcal{T}'_k$, widziane jako elementy symboliczne, muszą być distalne[3], gdyż nie mają żadnych wspólnych środków kafelków. Wówczas ciągi tilingów $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ oraz $\boldsymbol{\mathcal{T}}'$ również muszą być distalne, a w konsekwencji distalne są również x oraz x' i wreszcie także (y_x, x) oraz $(y_{x'}, x')$. Przeczy to oczywiście założeniu, że (y_x, x) i $(y_{x'}, x')$ tworzą parę $\tilde{\varphi}$-asymptotyczną.

[3]Jeżeli (X,G) jest topologicznym układem dynamicznym, to punkty $x, x' \in X$ nazywamy *distalnymi* jeżeli istnieje liczba $\delta > 0$, taka że $d_X((g(x)), g(x')) > \delta$ dla wszystkich $g \in G$.

Zajmijmy się więc przypadkiem (a). Skoro $x \neq x'$, to muszą istnieć $n_0 \in \mathbb{N}$ oraz $g_0 \in G$, takie że $x_{n,g_0} \neq x'_{n,g_0}$. Jeżeli zachodzi (a), to dla każdego $n \geq n_0$, podziały grupy G na odcinki I_i^n $(i \in \mathbb{Z})$ o długości p_n, wynikające z $\mathcal{T}_n$ oraz $\mathcal{T}'_n$ muszą być takie same. Niech więc $I_{i_0}^n$ oznacza odcinek tego podziału zawierający g_0. Wówczas dla $B = x|_{[1,x]\times I_{i_0}^n}$ oraz $B' = x'|_{[1,n]\times I_{i_0}^n}$ musi zachodzić $B \neq B'$ i, w konsekwencji, $\psi_n^{I_{i_0}^n}(B) \neq \psi_n^{I_{i_0}^n}(B')$. Stąd wynika, że $y_x|_{I_{i_0+1}^n} \neq y_{x'}|_{I_{i_0+1}^n}$. Zatem istnieje element $g_n \in I_{i_0+1}^n$, taki że symbole na pozycji g_n w y_x oraz $y_{x'}$ są różne. Z konstrukcji y_x wynika, że elementy g_n, które to spełniają, są różne dla różnych indeksów n i wszystkie one następują po g_0 w porządku $\prec$. Stąd y_x oraz $y_{x'}$ nie mogą tworzyć pary $\prec$-asymptotycznej i w konsekwencji, (x, y_x) i $(x', y_{x'})$ nie mogą być $\tilde{\varphi}$-asymptotyczne. Otrzymaliśmy tym samym sprzeczność, która kończy dowód. ■

Czytelnik znający konstrukcję rozszerzenia sklejającego pary asymptotyczne dla klasycznego układu topologicznego o entropii zero (z działaniem $\mathbb{Z}$) zaproponowaną przez T. Downarowicza i Y. Lacroix w dowodzie Lematu 4.2 z [12]) zauważy pewne podobieństwa pomiędzy tą konstrukcją a podaną przez nas w powyższym dowodzie. Chcemy wskazać jednak pewne istotne różnice między nimi, które powodują, że nasza konstrukcja nie jest bezpośrednim rozszerzeniem konstrukcji przedstawionej w [12].

Uwaga 6.2.2. W dowodzie Lematu 4.2 z [12], ustala się hodometr o bazie $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$, który można utożsamić z kongruentnym ciągiem rozbić $(\mathcal{P}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ grupy $\mathbb{Z}$ na rozłączne odcinki, takim że długość każdego odcinka z $\mathcal{P}_k$ jest równa p_k. Tak rozumiany hodometr na $\mathbb{Z}$ jest de facto uporządkowanym systemem tilingów $\mathbf{T}$, w którym, dla każdego $k \geq 2$, podkafelki (czyli odcinki $I \in \mathcal{P}_{k-1}$) odcinka z $\mathcal{P}_k$ są uporządkowane zgodnie z naturalnym porządkiem $<$ na $\mathbb{Z}$. Jeżeli dodatkowo ustalimy, że środek każdego odcinka leży na jego lewym krańcu, to ten system tilingów jest hodometryczny z bazą $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Zauważmy jednak, że w przypadku tak zadanego systemu tilingów $\mathbf{T}$, każdy $\boldsymbol{\mathcal{T}} \in \mathbf{T}$ zadaje porządek $\prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$, który jest typu $\mathbb{Z}$. Dokładniej, dla każdego $\boldsymbol{\mathcal{T}} \in \mathbf{T}$ mamy $\prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}} = <$. Jest tak, gdyż jedynymi ciągami $\boldsymbol{\mathcal{T}} \in \mathbf{T}$, które nie są wyprostowane są te, dla których istnieje liczba $p \in \mathbb{Z}$, która od pewnego miejsca $k \in \mathbb{N}$ jest zawsze prawym krańcem jakiegoś odcinka $I \in \mathcal{P}_k$. Wówczas elementy p oraz $p+1$ nie są porównywalne w porządku pochodzącym od uporządkowania podkafelków, lecz $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ zadaje na odcinkach $(-\infty, p]$ oraz $[p, \infty)$ porządki odpowiednio typu $-\mathbb{N}$ oraz $\mathbb{N}$. Ustalamy więc (odgórnie), że $p \prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}} p+1$ i wówczas już porządek $\prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$ jest liniowym porządkiem typu $\mathbb{Z}$, który de facto jest równy naturalnemu porządkowi $<$. Dzięki temu, konstrukcję odpowiedniego przeciwobrazu przeprowadza się dla wszystkich $x \in X$. Natomiast w dowodzie Twierdzenia 6.2.1 przeprowadzamy konstrukcję jedynie dla tych $x \in X$, które rzutują się na ciągi wyprostowane. Przeciwobrazy pozostałych $x \in X$ otrzymujemy przez domykanie zbioru par we wzorze (6.3). Z tego powodu dowód Twierdzenia 6.2.1 nie uogólnia w pełni dowodu Lematu 4.2 z [12] (rozszerzenia otrzymane za pomocą obu metod mogą być istotnie różne). Problem ten można naprawić, nieznacznie modyfikując dowód Twierdzenia 6.2.1. Mianowicie, w przypadku gdy $\boldsymbol{\mathcal{T}} = (\mathcal{T}_k)_{k\geq 0}$ nie jest wyprostowany, lecz dzieli G na dwie części G_1, G_2, w taki sposób, że obcięcie $\prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$ do G_1 jest porządkiem typu $-\mathbb{N}$, a obcięcie do G_2 jest typu $\mathbb{N}$ (czyli innymi słowy w G_1 istnieje element maksymalny względem $\prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$, lecz nie ma elementu minimalnego, a w G_2 istnieje element minimalny, lecz nie ma maksymalnego) oraz dla każdego $k \in \mathbb{N}$ pozycje środków kafelków z $\mathcal{T}_k$, które są zawarte w G_1, przystają modulo p_k do pozycji środków kafelków zawartych w G_2, to wówczas ustalamy, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$, pierwszy kafelek zawarty w G_2 jest następnikiem ostatniego kafelka zawartego w G_1. W ten sposób porządek $\prec_{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$ staje się porządkiem typu $\mathbb{Z}$ na G i możemy przeprowadzić analogiczną konstrukcję dla $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ jak dla ciągów z $\mathbf{T}_{\mathsf{STR}}$. Po tej modyfikacji, Twierdzenie 6.2.1 w pełni uogólnia Lemat 4.2 z [12], a także wszystkie kolejne twierdzenia tego rozdziału, które wynikają z Twierdzenia 6.2.1 uogólniają odpowiadające im wyniki z [12].

Twierdzenie 6.2.3. *Niech G będzie przeliczalną grupą ze średnią i niech (X, G, ϕ, φ) będzie zerowymiariowym, topologicznie multiuporządkowanym układem dynamicznym, którego faktorem jest uporządkowany system tilingów T. Jeżeli dodatkowo $\tilde{X} = \phi^{-1}(\mathsf{T}_{\mathsf{STR}})$ jest gęstym podzbiorem X oraz $h_{\mathsf{top}}(X, G) = 0$, to istnieje rozszerzenie topologiczne (Y, G) układu (X, G) poprzez faktor-odwzorowanie π, takie że (Y, G) nie ma par $\tilde{\varphi}$-asymptotycznych, gdzie $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \pi$.*

Dowód. Na mocy Twierdzenia 6.2.1, istnieje topologicznie multiuporządkowany układ $(Y_1, G, \tilde{\phi}_1, \tilde{\varphi}_1)$ będący rozszerzeniem układu (X, G) poprzez faktor-odwzorowanie π_1, które skleja pary $\tilde{\varphi}_1$-asymptotyczne, gdzie $\tilde{\phi}_1 = \varphi \circ \pi_1$ oraz $\tilde{\varphi}_1 = \varphi \circ \pi_1$. Ponadto układ (Y_1, G) jest zerowymiarowy, ma entropię zero oraz $\tilde{\phi}_1^{-1}(\mathsf{T}_{\mathsf{STR}})$ jest gęstym podzbiorem Y. Możemy więc ponownie zastosować Twierdzenie 6.2.1, tym razem dla układu $(Y_1, G, \tilde{\phi}_1, \tilde{\varphi}_1)$, otrzymując topologicznie multiuporządkowane rozszerzenie $(Y_2, G, \tilde{\phi}_2, \tilde{\varphi}_2)$ układu $(Y_1, G, \tilde{\phi}_1, \tilde{\varphi}_1)$ poprzez faktor-odwzorowanie π_2, które skleja pary $\tilde{\varphi}_2$-asymptotyczne, gdzie $\tilde{\phi}_2 = \tilde{\phi}_1 \circ \pi_2 = \phi \circ \pi_1 \circ \pi_2$ i podobnie $\tilde{\varphi}_2 = \tilde{\varphi}_1 \circ \pi_2 = \varphi \circ \pi_1 \circ \pi_2$. Powtarzając ten proces, otrzymujemy w rezultacie ciąg rozszerzeń $(Y_n, G, \tilde{\phi}_n, \tilde{\varphi}_n)$, $n \in \mathbb{N}$ powiązanych ze sobą odwzorowaniami π_n, taki że dla każdego $n \geq 2$, odwzorowanie π_n skleja pary $\tilde{\varphi}_n$-asymptotyczne, gdzie $\tilde{\phi}_n = \tilde{\phi}_{n-1} \circ \pi_n = \phi \circ \pi_1 \circ \pi_2 \circ \cdots \circ \pi_n$ i $\tilde{\varphi}_n = \tilde{\varphi}_{n-1} \circ \pi_n = \varphi \circ \pi_1 \circ \pi_2 \circ \cdots \circ \pi_n$. Pożądane rozszerzenie (Y, G) otrzymujemy jako granicę wsteczną ciągu układów (Y_n, G) (wówczas elementami Y są ciągi $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in Y_n$ oraz $y_n = \pi_{n+1}(y_{n+1})$). Niech π będzie faktor-odwzorowaniem z (Y, G) w (X, G). Kładziemy $\tilde{\phi} = \phi \circ \pi$ oraz $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \pi$. Niech teraz y i y' będą dwoma różnymi punktami z Y, które tworzą parę $\tilde{\varphi}$-asymptotyczną (to oznacza, że $\tilde{\phi}(y) \in \mathsf{T}_{\mathsf{STR}}$ oraz $\tilde{\phi}(y') \in \mathsf{T}_{\mathsf{STR}}$, a także $\tilde{\varphi}(y) = \tilde{\varphi}(y')$). Wówczas dla każdego $n \geq 2$, albo $y_n = y'_n$, albo (y_n, y'_n) jest parą $\tilde{\varphi}_n$-asymptotyczną w Y_n. Skoro jednak π_n skleja pary $\tilde{\varphi}_n$-asymptotyczne, więc musi zachodzić $y_{n-1} = y'_{n-1}$. Ponieważ $n - 1$ przebiega wszystkie liczby naturalne, otrzymujemy w rezultacie, że $y = y'$, co pokazuje, że w Y nie ma par $\tilde{\varphi}$-asymptotycznych. ■

Twierdzenie 6.2.3 wykorzystamy teraz do udowodnienia, że dla każdego (niekoniecznie zerowymiarowego ani topologicznie multiuporządkowanego) układu topologicznego z działaniem przeliczalnej grupy ze średnią G, o entropii zero, istnieje rozszerzenie bez par $\prec$-asymptotycznych dla żadnego $\prec$ należącego do pewnego multiporządku na G.

Twierdzenie 6.2.4. *Niech G będzie przeliczalną grupą ze średnią, niech T będzie uporządkowanym systemem tilingów na G o entropii topologicznej zero i niech $\tilde{\mathcal{O}}_{\mathsf{T}}$ będzie multiporządkiem pochodzącym od systemu tilingów T. Wówczas, dla każdego topologicznego układu dynamicznego (X, G) o entropii zero, istnieje rozszerzenie (Y, G) układu (X, G), takie że w (Y, G) nie ma par $\prec$-asymptotycznych dla żadnego $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}_{\mathsf{T}}$.*

Dowód. Niech $(\hat{X}, G)$ będzie zerowymiarowym rozszerzeniem pryncypialnym układu (X, G). Wówczas $h_{\mathsf{top}}(\hat{X}, G) = 0$. Układ produktowy $(\hat{X} \times \mathsf{T}, G)$ jest zerowymiarowym układem topologicznie multiuporządkowanym poprzez odwzorowania ϕ oraz φ, gdzie ϕ jest rzutem na drugą współrzędną a φ jest zdefiniowane wzorem $\varphi((x, \mathcal{T})) = \prec_{\mathcal{T}}$, $x \in X$, $\mathcal{T} \in \mathsf{T}_{\mathsf{STR}}$. Jako produkt dwóch systemów o entropii zero, $(\hat{X} \times \mathsf{T}, G)$ również ma entropię zero. Oczywiście zachodzi również $\overline{\phi^{-1}(\mathsf{T}_{\mathsf{STR}})} = \overline{X \times \mathsf{T}_{\mathsf{STR}}} = X \times \mathsf{T}$. Zatem, na mocy Twierdzenia 6.2.3, istnieje rozszerzenie (Y, G) układu $(X \times \mathsf{T}, G)$ poprzez odwzorowanie π, takie że w (Y, G) nie ma par $\tilde{\varphi}$-asymptotycznych, gdzie $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \pi$. Czyli dla żadnego $\prec\in\tilde{\mathcal{O}}_{\mathsf{T}}$, w (Y,G) nie ma par $\prec$-asymptotycznych. Oczywiście (Y,G) jest również rozszerzeniem (X,G). ■

Uwaga 6.2.5. Należy podkreślić, że każde rozszerzenie (Y,G), które realizuje tezę Twierdzenia 6.2.3 bądź Twierdzenia 6.2.4 (nie tylko to skonstruowane w dowodzie), musi mieć entropię topologiczną zero, gdyż w przeciwnym razie, na mocy Twierdzenia 4.2.6 musiały-by w nim istnieć pary $\prec$-asymptotyczne dla prawie wszystkich $\prec$ należących do dowolnego multiporządku na G.

Ostatecznie, łącząc Twierdzenie 4.2.6 oraz Twierdzenie 6.2.4, otrzymujemy najważniejszy rezultat tej rozprawy, stanowiący jednocześnie główny jej cel, czyli charakteryzację układów topologicznych z działaniem przeliczalnych grup ze średnią, które mają entropię topologiczną zero, jako faktorów układów bez par asymptotycznych. Uogólnia ona równość $\mathsf{TEZ}=\mathsf{FNAP}$ z [12, Twierdzenie 4.1].

Twierdzenie 6.2.6. *Niech G będzie przeliczalną grupą ze średnią i niech (X,G) będzie układem topologicznym z działaniem G. Następujące warunki są równoważne:*

(a) $h_{\mathsf{top}}(X,G)=0$.

(b) Dla każdego uporządkowanego systemu tilingów na G, o entropii zero, istnieje rozszerzenie topologiczne (Y,G) układu (X,G), takie że w (Y,G) nie ma par $\prec$-asymptotycznych dla żadnego $\prec\in\tilde{\mathcal{O}}_{\mathsf{T}}$.

(c) Istnieje multiporządek $(\tilde{\mathcal{O}},\nu,G)$ oraz rozszerzenie topologiczne (Y,G) układu (X,G), takie że zbiór tych $\prec\in\tilde{\mathcal{O}}$, dla których w (Y,G) nie ma par $\prec$-asymptotycznych, jest miary pełnej ν.

(d) Istnieje multiporządek $(\tilde{\mathcal{O}},\nu,G)$ oraz rozszerzenie topologiczne (Y,G) układu (X,G), takie że zbiór tych $\prec\in\tilde{\mathcal{O}}$, dla których w (Y,G) nie ma par $\prec$-asymptotycznych, ma dodatnią miarę ν.

Dowód. Wynikanie (b) z (a) zachodzi na mocy Twierdzenia 6.2.4. By wywnioskować (c) z (b) wystarczy w miejsce $(\tilde{\mathcal{O}},\nu,G)$ wziąć multiporządek $(\tilde{\mathcal{O}}_{\mathsf{T}},\nu,G)$, gdzie ν jest dowolną G-niezmienniczą, borelowską miarą probabilistyczną na T. Wynikanie (d) z (c) jest oczywiste. Pozostaje więc pokazać, że (a) wynika z (d). Jeżeli (X,G) ma dodatnią entropię, to wówczas każde rozszerzenie topologiczne (Y,G) układu (X,G) również musi mieć dodatnią entropię. Zatem, z Twierdzenia 4.2.6, przez kontrapozycję, wynika, że w (Y,G) istnieją pary $\prec$-asymptotyczne dla każdego multiporządku $(\tilde{\mathcal{O}},\nu,G)$ oraz dla ν-prawie każdego $\prec\in\tilde{\mathcal{O}}$. Czyli, jeżeli nie zachodzi warunek (a), to nie zachodzi (d), co jest oczywiście równoważne implikacji (d) $\Rightarrow$ (a). ■

Bibliografia

[1] A. Alpeev, T. Meyerovitch, S. Ryu, *Predictability, topological entropy, and invariant random orders*, Proc. Amer. Math. Soc. 149 (2021), strony 1443–1457.

[2] F. Blanchard, B. Host, S. Ruette, *Asymptotic pairs in positive-entropy systems*, Ergodic Theory Dynam. Systems 22 (2002), no. 3, strony 671–686.

[3] B. F. Bryant, *On expansive homeomorphisms*, Pacific J. Math., 10 (1960), strony 1163–1167.

[4] W. Bułatek, B. Kamiński, J. Szymański, *On the asymptotic relation of topological amenable group actions*, Topol. Methods Nonlinear Anal, 47 (2016), strony 43–54.

[5] N.-P. Chung, H. Li, *Homoclinic groups, IE groups, and expansive algebraic actions*, Invent. Math., 199 (2015), no. 3, strony 805–858.

[6] T. Ceccherini-Silberstein, M. D'Adderio, *Topics in groups and geometry—growth, amenability, and random walks*, Springer Monographs in Mathematics. Springer, Cham, (2021).

[7] A. Danilenko, *Entropy theory from the orbital point of view*, Monatsh. Math. 134 (2001), strony 121–141.

[8] C. Dellacherie, P-A. Meyer, *Probabilités et potentiel Chapitres I à IV*. Édition entièrement refondue, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, No. XV. Actualités Scientifiques et Industrielles, 1372, Hermann (1975).

[9] T. Downarowicz, *Entropy in dynamical systems*, New Mathematical Monographs, tom 18 (2011), Cambridge University Press.

[10] T. Downarowicz, D. Huczek, G. Zhang, *Tilings of amenable groups*, J. Reine Angew. Math. 747 (2019), strony 277–298.

[11] T. Downarowicz, B. Frej, P. P. Romagnoli, *Shearer's inequality and infimum rule for Shannon Entropy and Topological Entropy*, Dynamics and numbers, Contemp. Math., 669, Amer. Math. Soc. (2016), strony 63–75,

[12] T. Downarowicz, Y. Lacroix, *Topological entropy zero and asymptotic pairs*, Israel J. Math., 189 (2012), strony 323–336.

[13] T. Downarowicz, M. Więcek, *Decomposition of a symbolic element over a countable amenable group into blocks approximating ergodic measures*, Groups Geom. Dyn., 16 (2022), no. 3, strony 909–941.

[14] T. Downarowicz, G. Zhang, *Symbolic extensions of amenable group actions and the comparison property*, Mem. Amer. Math. Soc., 281 (2023), no. 1390, vi+95 pp.

[15] H. A. Dye, *On Groups of Measure Preserving Transformations. I*, American Journal of Mathematics, 81 (1959), strony 119–159.

[16] W. Huang, L. Xu, Y. Yi, *Asymptotic pairs, stable sets and chaos in positive entropy systems*, J. Funct. Anal., 268 (2015), strony 824–846.

[17] D. Huczek, *Zero-dimensional extensions of amenable group actions*, Studia Math. 256 (2021), no. 2, strony 121—145.

[18] S. A. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Graduate Texts in Mathematics, 156 (1995), Springer-Verlag.

[19] J. C. Kieffer, *A generalized Shannon-McMillan theorem for the action of an amenable group on a probability space*, Ann. Probability, 3 (1975), strony 1031–1037.

[20] D. Lind, K. Schmidt, *Homoclinic points of algebraic* $\mathbf{Z}^d$*-actions*, J. Amer. Math. Soc., 12 (1999), strony 953–980.

[21] E. Lindenstrauss, *Pointwise theorems for amenable groups*, Invent. Math., 146(2) (2001), strony 259–295.

[22] T. Meyerovitch, *Pseudo-orbit tracing and algebraic actions of countable amenable groups*, Ergodic Theory Dynam. Systems, 39 (2019), no. 9, strony 2570–2591.

[23] J. Moulin Ollagnier, *Ergodic theory and statistical mechanics*, Lecture Notes in Math. 1115, Springer (1985).

[24] D. S. Ornstein, B. Weiss, *Entropy and isomorphism theorems for actions of amenable groups*, J. Analyse Math., 48 (1987), strony 1–141.

[25] D. S. Ornstein, B. Weiss, *Ergodic theory of amenable group actions. I. The Rohlin lemma*, Bull. Amer. Math. Soc., 2, (1980), strony 161–164.

[26] K. Petersen, *Ergodic Theory*, Cambridge Studies of Advanced Mathematics 2, Cambridge University Press (1983).

[27] D. J. Rudolph, B. Weiss, *Entropy and mixing for amenable group actions*, Ann. of Math., 151 (2000), strony 1119–1150.

[28] K. Schmidt, *The cohomology of higher-dimensional shifts of finite type*, Pacific J. Math., 170 (1995), strony 237–269.

[29] T. de la Rue, *An introduction to joinings in ergodic theory*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 15, no. 1 (2006), strony 121–142.

[30] K. Yan. *Conditional entropy and fiber entropy for amenable group actions*, J. Differential Equations 259 (2015), no. 7, strony 3004–3031.

[31] G. Zhang, *Relative entropy, asymptotic pairs and chaos*, J. London Math. Soc. (2), 73 (2006), strony 157–172.