Dominik Kwietniak
Instytut Matematyki
Uniwersytet Jagielloński
dominik.kwietniak@uj.edu.pl

UNIWERSYTET
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

Wydział Matematyki
i Informatyki

Instytut Matematyki

Kraków, 23 października 2023

Recenzja rozprawy doktorskiej
pana Mateusza Więcka
Zastosowania multiporządku w miarowych i topologicznych działaniach grup ze średnią

Postępowanie w sprawie nadania panu mgr. inż. Mateuszowi Więckowi stopnia doktora w dyscyplinie matematyka jest prowadzone na podstawie przepisów ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. 2021 poz. 478 z późn. zm.), zwanej dalej po prostu ustawą. Artykuł 187 punkty 1–2 ustawy stanowią, że rozprawa doktorska z dyscypliny matematyka *prezentuje ogólną wiedzę teoretyczną kandydata [...] oraz umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej [...]* a *[p]rzedmiotem rozprawy doktorskiej jest oryginalne rozwiązanie problemu naukowego*[1].

Po zapoznaniu się z pracą pana Mateusza Więcka mogę bez najmniejszych wątpliwości stwierdzić, że **spełnia ona ustawowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim**. Dalsza część tej recenzji zawiera omówienie zawartości rozprawy oraz uzasadnienie tej oceny.

Zawartość rozprawy w skrócie

Praca liczy sobie 70 stron i zawiera: dwa dwustronnicowe streszczenia (jedno w języku polskim i drugie po angielsku), spis treści, sześć rozdziałów i bibliografię. Rozdział pierwszy zawiera wprowadzenie do tematyki pracy. Główna zawartość rozprawy znajduje się w rozdziałach 2–6, które teraz pokrótce omówię.

Rozdział 2: Multiporządki i multiuporządkowane układ dynamiczne. W rozdziale tym skupiono się na wprowadzeniu tytułowych pojęć oraz przedstawiono pewne ich własności wykorzystywane w dalszej części pracy. W szczególności dowodzi się, że na każdej przeliczalnej grupie ze średnią istnieje multiporządek. Co więcej, okazuje się, że istnienie multiporządku charakteryzuje grupy ze średnią wśród wszystkich grup przeliczalnych. Ponadto, pokazano, że każdy multiporządek na grupie przeliczalnej G może być reprezentowany jako pewna rodzina bijekcji między grupą addytywną liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ a grupą G wraz z pewną miarą probabilistyczną na tej rodzinie. W rozdziale omawiane jest również pojęcie orbitalnej równoważności i jego szczególne własności w kontekście układów multiuporządkowanych. W szczególności zostaje zdefiniowane przekształcenie następnika.

Rozdział 3: Entropia w układach multiuporządkowanych. Autor prezentuje wzór na obliczanie entropii warunkowej względem multiporządku (entropii wzdłuż multiporządku), czyli wzór na entropię w układzie multiuporządkowanym, z uwzględnieniem multiporządku jako faktora. Wzór ten pozwala na wyznaczenie entropii układu multiuporządkowanego w przypadku, gdy faktor-multiporządek ma zerową entropię. Autor dowodzi także, że orbitalna równoważność z działaniem $\mathbb{Z}$ zadanym przez przekształcenie następnika zachowuje entropię warunkową pod warunkiem multiporządku. Przy pomocy tych narzędzi zostaje

[1] Pominięte fragmenty nie mają znaczenia z punktu widzenia tej recenzji.

ul. Prof. St. Łojasiewicza 6
PL 30-348 Kraków
tel. +48(12) 664 66 34
fax +48(12) 664 66 74
e-mail: maths@im.uj.edu.pl
www.im.uj.edu.pl

UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI W KRAKOWIE

Wydział Matematyki i Informatyki

Instytut Matematyki

udowodniona pewna wersja twierdzenia Rudolpha-Weissa. Rozdział kończy się przedstawieniem charakteryzacji σ-ciała Pinskera w układach zadanych działaniami przeliczalnych grup ze średnią. Charakteryzacja ta jest analogiczna do charakteryzacji σ-ciała Pinskera pochodzącej od Rochlina i Sinaja.

Rozdział 4: Pary asymptotyczne w układach z działaniem przeliczalnych grup ze średnią. Rozdział ten koncentruje się na definicji uogólnienia pary asymptotycznej w tytułowych układach. Autor dowodzi istnienia par asymptotycznych w układach zadanych działaniami przeliczalnych grup ze średnią z dodatnią entropią (uogólnienie twierdzenia Blancharda-Hosta-Ruette), co jest jednym z ważnych wyników pracy, gdyż kontrapozycja tego twierdzenia jest pierwszą częścią charakteryzacji układów o entropii zero (brak par asymptotycznych implikuje zerową entropię).

Rozdział 5: Multiporządki pochodzące od systemów tilingów. Rozdział ten jest poświęcony szczególnej klasie multiporządków, które pochodzą od uporządkowanych systemów tilingów. Zamiast o tilingach będę jednak od teraz pisał o *kafelkowaniach.* Autor przypomina najpierw wyniki o układach kafelkowań na przeliczalnych grupach ze średnią pochądzące z przełomowej pracy T. Downarowicza, D. Huczka i G. Zhanga. Nowe wyniki zawarte w tym rozdziale stanowią drobne rozszerzenie wcześniejszych wyników z pracy tych wspomnianych trzech matematyków. Autor rozprawy przedstawia ważną konstrukcję multiporządku zbudowanego za pomocą systemów kafelkowań oraz udowadnia pewne istotne właściwości tak skonstruowanych multiporządków.

Rozdział 6: Uogólnienie twierdzenia Downarowicza-Lacroix na działania przeliczalnych grup ze średnią. Autor kończy tutaj dowód głównego wyniku rozprawy: charakteryzacji topologicznych układów dynamicznych o zerowej entropii za pomocą par asymptotycznych. Na początku rozdziału wprowadzone zostaje pojęcie topologicznie multiuporządkowanego układu dynamicznego, które jest topologicznym odpowiednikiem wcześniej zdefiniowanego multiuporządkowanego układu zachowującego miarę (teoriomiarowego). Autor dowodzi następnie, że każdy topologiczny układ zadany działaniem przeliczalnej grupy ze średnią, który ma entropię zero ma rozszerzenie topologiczne bez par asymptotycznych. Ten wynik uogólnia twierdzenie Downarowicza-Lacroix dotyczące działań $\mathbb{Z}$.

Wyniki zawarte w rozprawie i ich ocena

Praca doktorska Mateusza Więcka skupia się na analizie układów dynamicznych rozumianych tutaj jako działania przeliczalnych grup ze średnią na przestrzeniach probabilistycznych (w przypadku układów teoriomiarowych) lub przestrzeniach metrycznych zwartych (w przypadku układów topologicznych). Układy takie stanowią uogólnienie układów pochodzących od działań addytywnej grupy liczb całkowitych $\mathbb{Z}$, czyli działań indukowanych przez iterację automorfizmu zachowującego pewną miarę (w przypadku układów teoriomiarowych) lub homeomorfizmu (w przypadku układów topologicznych) na przestrzeni zwartej[2]. Te ostatnie układy będą dalej nazywane *klasycznymi.* W szczególności dla działań przeliczalnych grup ze średnią można zdefiniować pojęcia entropii topologicznej i entropii miarowej (dla ciągłych działań grup ze średnią na przestrzeniach zwartych zawsze istnieją borelowskie niezmiennicze miary probablistyczne) oraz powiązać je ze sobą za pomocą zasady wariacyjnej.

Jednym z głównych celów omawianej tu pracy jest charakteryzacja działań przeliczalnych grup ze średnią o entropii zero za pomocą par asymptotycznych. Dla układów klasycznych, czyli działań grupy $\mathbb{Z}$ charakteryzacja taka została zapoczątkowana przez

[2] W przypadku teoriomiarowym nasza przestrzeń nie musi być zwarta, ale możemy przyjąć, że jest zakładając, że mamy doczynienia z przestrzeniami Lebesgue'a.

ul. Prof. St. Łojasiewicza 6
PL 30-348 Kraków
tel. +48(12) 664 66 34
fax +48(12) 664 66 74
e-mail: maths@im.uj.edu.pl
www.im.uj.edu.pl

UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI W KRAKOWIE

F. Blancharda, B. Hosta i S. Ruette, którzy udowodnili, że działania $\mathbb{Z}$ o dodatniej entropii muszą mieć pary asymptotyczne. Dopełnienie tej charakteryzacji zostało wykonane przez T. Downarowicza (promotora rozprawy) i Y. Lacroixa, którzy udowodnili, że klasyczne układy dynamiczne o entropii zerowej są faktorami układów, które nie posiadają par asymptotycznych. Dla układów klasycznych pary asymptotyczne składają się z punktów, których orbity zbliżają się do siebie dowolnie blisko w przyszłości. Dokładniej, dla działania zadanego przez homeomorfizm $T\colon X \to X$ na przestrzeni zwartej X wyposażonej w metrykę ρ powiemy, że punkty $x, y \in X$ tworzą *parę asymptotyczną* jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} \rho(T^n(x), T^n(y)) = 0.$$

Wydział Matematyki i Informatyki

Instytut Matematyki

Jak widać definicja pary asymptotycznej w sposób krytyczny odwołuje się do porządku na grupie $\mathbb{Z}$. Istnieją różne od $\mathbb{Z}$ przeliczalne grupy ze średnią, które posiadają podobny niezmienniczy ze względu na działanie grupy na sobie porządek. Jednakże istnieją też przeliczalne grupy ze średnią, które takiego porządku nie posiadają. Naturalne uogólnienie pojęcia pary asymptotycznej dla działania klasycznego na działanie $(T^g)_{g\in G}$ przeliczalnej grupy na zwartej przestrzeni metrycznej (X, ρ) wygląda tak: powiemy, że punkty $x, y \in X$ tworzą parę asymptotyczną działania $(T^g)_{g\in G}$ jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taki zbiór skończony $F \subset G$, że $\rho(T^g(x), T^g(y)) < \varepsilon$ dla wszystkich $g \in G \setminus F$. Niestety, próby przeniesienia wyników z układów klasycznych na dowolne działania grup ze średnią przy pomocy tej definicji pokazały, że pojęcie to nie ma dobrych własności. Jednym z problemów jest fakt, że podana definicja nie uogólnia klasycznej i odpowiada silniejszemu warunkowi

$$\lim_{|n|\to\infty} \rho(T^n(x), T^n(y)) = \lim_{n\to\pm\infty} \rho(T^n(x), T^n(y)) = 0.$$

Widzimy więc, że w punkcie wyjścia omawiana tu rozprawa doktorska podejmuje nietrywialny problem: kłopot nie polega tylko na przeniesieniu dowodu, ale pojawia się wcześniej, bo w rozważanej sytuacji konieczne jest zinterpretowanie na nowo definicji. Rozwiązaniem okazuje się być konsekwentne stosowanie pojęcia multiporządku.

I właśnie to uważam za główny rezultat ocenianej rozprawy: pan Więcek wykazał, że stosowanie pojęcia multiporządku do badania działań grup ze średnią prowadzi do bardzo eleganckich uogólnień twierdzeń zachodzących dla $\mathbb{Z}$ na wszystkie przeliczalne grupy ze średnią. Multiporządek na grupie G definiuje się jako rodzinę porządków typu[3] $\mathbb{Z}$ na G, wraz z miarą ν, która jest niezmiennicza na naturalne działanie grupy G na porządku. W takiej sytuacji grupa przeliczalna jest *porządkowalna* (ang. *orderable*), gdy istnieje punkt (porządek) stały dla tego działania G na zbiorze porządków. Każdy multiporządek to szczególny przypadek niezmienniczego porządku losowego na G (IRO, ang. *invariant random order*). To ostatnie pojęcie pochodzi od J. Kieffera (1975). Grupa przeliczalna G posiada (dopuszcza) multiporządek wtedy i tylko wtedy, gdy jest grupą ze średnią (Wniosek 2.1.11 w omawianej pracy). Pojęcie multiporządku prowadzi do pojęcia *multiuporządkowanego* zachowującego miarę działania grupy ze średnią (jest to teoriomiarowe działanie G, które ma teoriomiarowy faktor będący multiporządkiem). Intuicyjnie rzecz biorąc istnienie takiego multiporządku pozwala mówić (myśleć) o statystycznej przyszłości i przeszłości wzdłuż orbity. Taki obiekt pozwala więc myśleć o przeniesieniu pojęć z klasycznej teorii układów dynamicznych bazujących na istnieniu liniowego porządku $\leqslant$ na działające tu grupie $\mathbb{Z}$ na multiuporządkowane działania dowolnych grup ze średnią.

Do wykorzystania multiporządków kluczowe są teraz dwie obserwacje: Po pierwsze, każde wolne działanie grupy ze średnią na bezatomowej przestrzeni probabilistycznej jest

[3] Porządków izomorficznych z liniowym porządkiem $\leqslant$ na $\mathbb{Z}$.

ul. Prof. St. Łojasiewicza 6
PL 30-348 Kraków
tel. +48(12) 664 66 34
fax +48(12) 664 66 74
e-mail: maths@im.uj.edu.pl
www.im.uj.edu.pl

UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI W KRAKOWIE

Wydział Matematyki i Informatyki

Instytut Matematyki

układem multiuporządkowanym. Po drugie, każde teoriomiarowe połączenie działania grupy ze średnią na przestrzeni probabilistycznej z multiporządkiem jest multiuporządkowane. Obserwacje te pozwalają na rozbicie wielu rozumowań na dwa kroki: najpierw dowodzimy interesujący nas rezultat dla działań multiuporządkowanych, a następnie przenosimy nasz wynik na dowolne działania. Wiele przydatnych własności układów multiuporządkowanych wynika ze szczególnej formy ich orbitalnej równoważności z pewnym działaniem $\mathbb{Z}$. Na mocy twierdzenia Dye'a wiadomo, że każde działanie grupy ze średnią jest orbitalnie równoważne pewnemu działaniu grupy $\mathbb{Z}$, ale działania multiuporządkowane są orbitalnie równoważne z takimi działaniami $\mathbb{Z}$, które zachowują faktor będący multiporządkiem (działania te nazywamy *działaniami zadanymi przez iterację przekształcenia następnika* a zadające je przekształcenia *przekształceniami następnika*). Przydatność tej orbitalnej równoważności zostaje wykazana w rozdziale trzecim, który zawiera niezmiernie istotne z technicznego punktu widzenia wyniki dotyczące entropijnych właściwości układów multiuporządkowanych, w tym wzory pozwalające na obliczanie entropii w takich układach oraz opis zachowania entropii względem multiporządku. Rozdział trzeci zawiera także szczególną wersję twierdzenia Rudolpha-Weissa oraz charakteryzację faktora Pinskera w duchu Rochlina-Sinaja, czyli w oparciu o pojęcie σ-ciała ogonowego, którego wprowadzenie wymaga posłużenia się pojęciami *odległej przyszłości* oraz *odległej przeszłości*. Autor pokazuje, że wynik Rudolpha-Weissa jest mocniejszy niż wersja udowodniona w rozprawie (ma istotnie słabsze założenia). Autor wspomina także, że oba twierdzenia mogą być wywnioskowane z jeszcze ogólniejszego wyniku A. Danilenki, ale nie podaje tu szczegółów. Fragment pracy dotyczący twierdzenia Rudolpha-Weissa najmniej mi się podobał i moim zdaniem mógłby zostać pominięty bez straty dla reszty pracy. Mam też pewne wątpliwości, czy sposób w jaki opisano ten wynik w streszczeniu dobrze oddaje zawartość we wnętrzu pracy. Ukoronowaniem pracy jest charakteryzacja układów dynamicznych zadanych działaniem przeliczalnych grup ze średnią o entropii zero poprzez kryterium istnienia par asymptotycznych. W pełnej analogii do sytuacji klasycznej: układ topologiczny zadany działaniem przeliczalnej grupy ze średnią ma entropię zero wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje topologiczne rozszerzenie tego układu, w którym nie ma par asymptotycznych względem żadnego porządku z pewnego multiporządku.

Pod względem językowym praca jest na dobrym poziomie, nie miałem problemów ze zrozumieniem o co Autorowi chodzi, nie zauważyłem też żadnych istotnych lub powtarzających się uporczywie błędów językowych. Literówek i drobnych usterek stylistycznych jest mało, zdarzają się, ale ich liczba nie odbiega od normy. Pewne pojęcia przetłumaczyłbym inaczej (tilling, hodometr), ale jest to kwestia gustu. Dowody przedstawionych w rozprawie twierdzeń wymagają sporej biegłości w myśleniu w kategoriach układów multiuporządkowanych ale są starannie zredagowane.

Konkluzja

W mojej ocenie omawiana tu rozprawa doktorska pana mgr. inż. Mateusza Więcka pt. *Zastosowania multiporządku w miarowych i topologicznych działaniach grup ze średnią* zawiera oryginalne rozwiązania nietrywialnych problemów matematycznych i **z naddatkiem spełnia wymagania stawiane pracom doktorskim przez ustawę z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. 2021 poz. 478 z późn. zm.)**. Praca doktorska Mateusza Więcka stanowi ważny wkład w rozwój teorii układów dynamicznych o entropii zero w kontekście działań grup ze średnią na zwartych przestrzeniach topologicznych. Głównym celem pracy było uzyskanie charakteryzacji układów zadanych działaniami przeliczalnych grup ze średnią o zerowej entropii zero poprzez kryterium istnienia par asymptotycznych, analogiczne do kryterium znanego dla

ul. Prof. St. Łojasiewicza 6
PL 30-348 Kraków
tel. +48(12) 664 66 34
fax +48(12) 664 66 74
e-mail: maths@im.uj.edu.pl
www.im.uj.edu.pl

działań grupy $\mathbb{Z}$ (a dokładniej zerowa entropia jest równoważna istnieniu topologicznego rozszerzenia, które nie ma par asymptotycznych względem żadnego porządku z pewnego multiporządku na grupie G. Cel ten został zrealizowany z nawiązką: otrzymujemy nie tylko dowód twierdzenia, ale także nowe pojęcia oraz narzędzia do ich zbadania. Myślę, że właśnie te narzędzia opisujące różne techniczne własności multiporządków, w tym ich związek z entropią i równoważnością orbitalną, ale przede wszystkim fakt, że multiporządki istnieją na każdej przeliczalnej grupie ze średnią, nawet jeśli grupa nie ma żadnego porządku niezmienniczego mogą stać się najważniejszymi rezultatami tej pracy. Dlatego uważam, że rozprawa zasługuje na wyróżnienie. Nie mam wątpliwości, że pan Mateusz Więcek posiada wiedzę teoretyczną i zna metody niezbędne do samodzielnego prowadzenia badań naukowych w dziedzinie układów dynamicznych. Wnoszę więc o dopuszczenie pana Mateusza Więcka do dalszych etapów postępowania o nadanie stopnia doktora w dyscyplinie matematyka.

Dominik Kwietniak

UNIWERSYTET
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

Wydział Matematyki
i Informatyki

Instytut Matematyki

ul. Prof. St. Łojasiewicza 6
PL 30-348 Kraków
tel. +48(12) 664 66 34
fax +48(12) 664 66 74
e-mail: maths@im.uj.edu.pl
www.im.uj.edu.pl