INSTYTUT MATEMATYCZNY
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

dr hab. Jonatan Gutman, prof. IM PAN
ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa
tel: +48 788 830 967, email: y.gutman@impan.pl
https://www.impan.pl/~gutman/

Warszawa, 14 Września 2023 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej "Zastosowania multiporządku w miarowych i topologicznych działaniach grup ze średnią" mgr inż. Mateusz Więcek

Wstęp

Rozprawa doktorska, napisana w języku polskim, składa się z siedemdziesięciu stron i jest podzielona na sześć rozdziałów w tym wprowadzenie. Zawiera spis treści oraz bibliografię. Rozprawa została napisana pod kierunkiem prof. dra hab. inż. Tomasza Downarowicza i opiera się na pracy "T. Downarowicz, P. Oprocha, M. Więcek, G. Zhang, Multiorders in amenable group actions" przyjętej do publikacji w *Groups, Geometry and Dynamics* oraz na preprincie *arXiv:2303.12923* "T. Downarowicz, M. Więcek, Asymptotic pairs in topological actions of amenable groups". Jednak należy zasygnalizować, że żadna z tych publikacji nie została wspomniana ani we wstępie ani w bibliografii nawet jako preprint.

Rozprawa wprowadza nową koncepcję pt. *multiporządek* dla działań przeliczalnych grup i znakomicie ją wykorzystuje, aby uogólnić Twierdzenie Blancharda-Hosta-Ruette oraz Twierdzenia Downarowicza-Lacroix na działania przeliczalnych grup ze średnią. Przypomnijmy klasyczną definicję pary asymptotycznej:

Definicja. Niech (X,T) będzie topologicznym układem dynamicznym. Niech d_X będzie metryką kompatybilną na X. Parę różnych punktów (x,x') z X nazywamy *asymptotyczną*, jeżeli zachodzi zbieżność

$$\lim_{n\to\infty} d_X(T^k(x),T^k(x'))=0.$$

Blanchard, Host i Ruette udowodnili następujące twierdzenie:

Twierdzenie (Blanchard, Host, Ruette, 2002). Niech (X, T) będzie topologicznym układem dynamicznym o dodatniej entropii. Wówczas w (X, T) istnieją pary asymptotyczne.

Co więcej, zbiór punktów należących do par asymptotycznych jest miary pełnej dla każdej ergodycznej miary na X o dodatniej entropii. Downarowicz i Lacroix uogólnili Twierdzenie Blancharda-Hosta-Ruette:

Twierdzenie (Downarowicz, Lacroix, 2012). Topologiczny układ dynamiczny (X, T) ma entropię zero wtedy i tylko wtedy kiedy ma rozszerzenie (Y, S), które nie ma par asymptotycznych.

Trudność w uogólnianiu twierdzenia na kontekst przeliczalnych grup ze średnią polega na tym, że nie jest jasne, jak uogólnić pojęcie par asymptotycznych. Historycznie rzecz biorąc, podejmowano pewne próby, ale z ograniczonym sukcesem. Przełomem tej Rozprawy jest już znalezienie właściwych definicji:

Definicja 2.1.2 Rozprawy (str. 15) Niech G będzie grupą przeliczalną. Niech $\tilde{\mathcal{O}}$ będzie zbiorem wszystkich porządków typu $\mathbb{Z}$ na G, niech $\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}$ będzie sigma-ciałem borelowskim na $\tilde{\mathcal{O}}$ i niech ν będzie borelowską miarą probabilistyczną niesioną przez $\tilde{\mathcal{O}}$, niezmienniczą na działanie G zadane przez mnożenie od prawej na G. Teoriomiarowy układ dynamiczny $(\tilde{\mathcal{O}}, \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}, \nu, G)$ nazywamy *multiporządkiem* na G.

oraz

Definicja 4.0.1 Rozprawy (str. 44) Niech (X, G) będzie topologicznym układem dynamicznym z działaniem przeliczalnej grupy G. Niech $\prec$ będzie porządkiem typu $\mathbb{Z}$ na G. Parę różnych punktów $x, x' \in X$ nazywamy *$\prec$-asymptotyczną* jeżeli zachodzi zbieżność

$$\lim_{k\to\infty} d_X(k^{\prec}(x), k^{\prec'}(x')) = 0. \tag{0.1}$$

Wniosek 2.1.10 Rozprawy (str. 17) Przeliczalna grupa G jest grupą ze średnią wtedy i tylko wtedy, gdy na G istnieje multiporządek.

Głównymi wynikami Rozprawy są:

Uogólnienie Twierdzenia Blancharda-Hosta-Ruette - Twierdzenie 4.2.6 Rozprawy: (str. 48) Niech (X, G) będzie topologicznym układem dynamicznym z działaniem przeliczalnej grupy ze średnią G, takim że $h_{\mathrm{top}}(X, G) > 0$. Dla dowolnego multiporządku $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$ na G oraz ν-prawie każdego $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$, istnieje w X para $\prec$-asymptotyczna.

oraz

Uogólnienie Twierdzenia Downarowicza-Lacroix - Twierdzenie 6.2.6 Rozprawy: (str. 68) Niech G będzie przeliczalną grupą ze średnią i niech (X, G) będzie układem topologicznym z działaniem G. Następujące warunki są równoważne:

(a) $h_{\mathrm{top}}(X, G) = 0$.

(b) Istnieje multiporządek $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$ oraz rozszerzenie topologiczne (Y, G) układu (X, G), takie że zbiór tych $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$, dla których w (Y, G) nie ma par $\prec$-asymptotycznych, jest miary pełnej ν.

(c) Istnieje multiporządek $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$ oraz rozszerzenie topologiczne (Y, G) układu (X, G), takie że zbiór tych $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$, dla których w (Y, G) nie ma par $\prec$-asymptotycznych, ma dodatnią miarę ν.

Oceniam te wyniki bardzo wysoko - chodzi tu o wyniki fundamentalne. Dowody są zaawansowane i wielowarstwowe. Doktorant pokazuje bardzo wysoki warsztat.

Omówię teraz elementy dowodu uogólnienia Twierdzenia Blancharda-Hosta-Ruette (Twierdzenie 4.2.6 Rozprawy). Głównym pomysłem dowodu jest zredukowanie stwierdzenia do $\mathbb{Z}$-względnej wersji Twierdzenia Blancharda-Hosta-Ruette. Ta względna wersja została udowodniona przez Zhang w 2006 r. Istota tego, co udowodnił, polega na tym że, jeśli $\phi : (X, T) \to (Y, S)$ jest rozszerzeniem tak że $h_{\mathrm{top}}(X, T) > h_{\mathrm{top}}(Y, S)$ wtedy istnieją $x \neq x' \in X$ tak że (x, x') jest parą asymptotyczną i dodatkowo należą do tego samego włókna, t.z. $\phi(x) = \phi(x')$. Niech $(\tilde{\mathcal{O}}, \nu, G)$ będzie multiporządekiem na G i μ miarą (ergodyczną) na X o dodatniej entropii (teoriomiarowej). Rozważamy przestrzeń produktową $(X \times \tilde{\mathcal{O}}, \Sigma_X \otimes \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}, \mu \times \nu, G)$, gdzie Σ_X oraz $\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}$ są sigma-ciałami borelowskimi odpowiednio na przestrzeniach X oraz $\tilde{\mathcal{O}}$. Niech φ będzie rzutem na współrzędną $\tilde{\mathcal{O}}$. Ponieważ Σ_X oraz $\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}$ są niezależne, to zachodzi

$$h(\mu \times \nu, G | \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}) = h(\mu, G) > 0.$$

Na multiporządku $(\tilde{\mathcal{O}}, \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}, \nu, G)$ istnieje naturalne dzianie $\mathbb{Z}$. Rzeczywiście ponieważ elementy $\tilde{\mathcal{O}}$ są porządki typu $\mathbb{Z}$ na G (bijekcji z $\mathbb{Z}$ w G, $i : \mathbb{Z} \to G$) gdzie można kanonicznie wskazać element neutralny ($i(0) = e_G$), można zdefiniować *przekształcenie następnika* $S : \tilde{\mathcal{O}} \to \tilde{\mathcal{O}}$ który wysyła każdy porządek $\prec \in \tilde{\mathcal{O}}$ do $S(\prec) =$ "$\prec$ przesunięty o jedną jednostkę". Ponadto faktor-odwzorowanie $\varphi : X \times \tilde{\mathcal{O}} \to \tilde{\mathcal{O}}$ umożliwia podniesienie tego naturalnego działania do $X \times \tilde{\mathcal{O}}$. Te $\mathbb{Z}$-działanie jest orbitalnie równoważne z G-działaniem na $X \times \tilde{\mathcal{O}}$. Pierwszym nietrywialnym krokiem dowodu jest pokazanie nieco zaskakującej formuły:

$$h(\mu \times \nu, G|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}) = h(\mu \times \nu, \mathbb{Z}|\Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}). \tag{0.2}$$

Zatem mamy do czynienia z faktor-odwzorowaniem $(X \times \tilde{\mathcal{O}}, \Sigma_X \otimes \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}, \mu \times \nu, \mathbb{Z}) \to (\tilde{\mathcal{O}}, \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}, \nu, \mathbb{Z})$. Ponieważ to jest rozszerzenie między dwoma układami dynamicznymi z $\mathbb{Z}$-działaniem, gdzie warunek $h(\mu \times \nu, \mathbb{Z}) > h(\nu, \mathbb{Z})$ zachodzi, można korzystając z teoriomiarowej wersji powyższego wyniku Zhanga (Lemat 4.2.1 Rozprawy), znaleźć pożądaną parę asymptotyczną.

Pomimo jego kluczowego znaczenia, dowód wyniku Zhanga nie jest omawiany w Rozprawie. Jest to tym bardziej zaskakujące, że Rozprawa wymaga pewnej modyfikacji wyniku pokazanego w artykule Zhanga. Rzeczywiście Uwaga 4.2.2 wyjaśnia, jak zmodyfikować dowód, zakładając, że czytelnik ma praktyczną wiedzę na temat dowodu Zhanga, który z kolei opiera się na dowodzie Blancharda-Hosta-Ruette. Ten ostatni w żadnym wypadku nie jest łatwy do prześledzenia. Uważam, że Rozprawa powinna zawierać szkic dowód wyniku Zhanga w wersji która jest potrzebna. Dodatkowo oczekiwałbym szczegółowej dyskusji pojęcia *atomu* w tym kontekście (patz. np. podejście w str. 55 "Ergodic Theory via Joinings" Glasnera).

Wracając do całościowej oceny Rozprawy, muszę powiedzieć że czytałem ją z przyjemnością. Na koniec recenzji wspomnę o kilku literówkach.

Podsumowując wstęp, należy zaznaczyć, że żadna z dwóch publikacji, na których opiera się Rozprawa, nie jest autorstwa samego Doktoranta, i dodatkowo są one wspólne z Promotorem. Jest to dalekie od ideału, ponieważ program studiów doktoranckich powinien między innymi kształcić kandydata do prowadzenia niezależnych badań. Jednak obecnie społeczność matematyczna przechodzi na tryb bardziej oparty na współpracy. Ponadto według oświadczenia Doktoranta Jego wkład samodzielny do każdej z prac był znaczący.

Omówienie treści Rozprawy i dodatkowych wyników

Rozdział 1 wyprowadza tło historyczne i motywację badań oraz główne wyniki Rozprawy. Struktura Rozprawy jest także omówienia.

Rozdział 2 zawiera definicje *multiporządków* na grupach przeliczalnych oraz *multiuporządkowanych układów dynamicznych*, tzn. układy dynamiczne zawierając multiporządki jako faktory. Fundamentalne fakty są udowodnione, w szczególności pokazano, że multiporządki generują naturalnie ciągi Følnera i to daje nieoczywisty kierunek dowodu Wniosku 2.1.10 wspomnianego powyżej.

W Rozdziale 3 udowodniono równanie (0.2). W tym celu jest wykorzystany bardzo elegancki wzór na obliczanie entropii w układzie multiuporządkowanym, wzdłuż *przeszłości* porządków z jego faktora. Twierdzenie to okazuje się być szczególnym przypadkiem Twierdzenia Rudolpha-Weissa dotyczącego zachowywania entropii warunkowej między dwoma orbitalnie równoważnymi układami dynamicznymi z wolnymi działaniami grup ze średnią (X, μ, G) oraz (X, μ, Γ) o wspólnym faktorze Σ_Y:

$$h(\mu, G|\Sigma_Y) = h(\mu, \Gamma|\Sigma_Y).$$

Bez wątpienia jednym z głównych osiągnięć Rozprawy jest dowód Twierdzenia Rudolpha-Weissa przez metodę multiporządków. Rozdział skończy się z charakteryzacją sigma-ciała Pinskera w układach z działaniami przeliczalnych grup (X, Σ_X, μ, G) ze średnią przy pomocy multiporządku $(\tilde{\mathcal{O}}, \Sigma_{\tilde{\mathcal{O}}}, \nu, G)$:

$$\Pi_G(\mathcal{P}) = \bigcap_{g\in G}\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}^{(-\infty,-n]^{g(\prec)}} \text{ dla } \nu\text{-prawie każdego } \prec\in\tilde{\mathcal{O}}.$$

Rozdział 4 poświęcony jest uogólnieniu Twierdzenia Blancharda-Hosta-Ruette (Twierdzenie 4.2.6 Rozprawy) które omówiłem powyżej.

Ostatnia część Rozprawy (Rozdziały 5 i 6) zawiera dowód uogólnienia Twierdzenia Downarowicza-Lacroix (Twierdzenie 6.2.6 Rozprawy). Najpierw w Rozdziale 5 wprowadzono teoria tilingów i systemów tilingów na grupach ze średnią. Następnie konstrukcje multiporządków przy pomocy systemów tilingów podano. Finalnie to jest używane w celu konstrukcji rozszerzenia bez par asymptotycznych dla dowolnego topologicznego układu z działaniem przeliczalnej grupy ze średnią, który ma entropię zero.

INSTYTUT MATEMATYCZNY
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Konkluzja

Rozprawa jest oparta na artykule opublikowanym w "Groups, Geometry and Dynamics" oraz na preprincie obecnie w recenzji. Według wykazu czasopism naukowych Ministerstwa Edukacji i Nauki "Groups, Geometry and Dynamics" jest czasopismem o 140 punktach, kategoria do której należy bardzo dobre i doskonałe czasopisma.

Art. 187 ust. 2. *prawa o szkolnictwie wyższym i nauce* stwierdza, że „Przedmiotem rozprawy doktorskiej jest oryginalne rozwiązanie problemu naukowego, oryginalne rozwiązanie w zakresie zastosowania wyników własnych badań naukowych w sferze gospodarczej lub społecznej albo oryginalne dokonanie artystyczne.".

W moim przekonaniu Rozprawa mgra inż. Mateusza Więcka "Zastosowania multiporządku w miarowych i topologicznych działaniach grup ze średnią" spełnia ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim, co więcej, Rozprawa jest wybitna. W związku z tym przedkładam Radzie Dyscypliny Naukowej Matematyka Politechniki Wrocławskiej wniosek o przyjęcie Rozprawy i dopuszczenie mgra inż. Mateusza Więcka do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Jonatan Gutman

Jonatan Gutman

INSTYTUT MATEMATYCZNY
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Literówki

1. str. 26. "$\mathcal{P}^D = \bigvee_{g \in D} g^{-1}$" zamiast "$\mathcal{P}^D = \bigvee_{g \in G} g^{-1}$".
2. str. 44. "$\lim\limits_{k\to\infty} d_X(k^{<}(x), k^{<}(x')) = 0$" zamiast "$\lim\limits_{k\to\infty} d_X(k^{<}(x), k^{<'}(x')) = 0$".
3. str. 44. "mamy $\varphi(x) = \varphi(x') = <$" zamiast "mamy $\varphi(x) = \varphi'(x) = <$".
4. str. 47. "która jest domkniętym podzbiorem $\tilde{\mathcal{O}} \times \tilde{\mathcal{O}}$" zamiast "która jest domkniętym podzbiorem $X \times X$".
5. str. 47 i str. 48. "Jest on więc mierzalny względem każdego uzupełnienia borelowskiej miary probabilistycznej na X (patrz np. [18]), w szczególności względem $\overline{\mu}$" zamiast "Jest on więc mierzalny względem każdej borelowskiej miary probabilistycznej na X (patrz np. [19]), w szczególności względem μ".
6. str. 53. "jest porządek podkafelków każdego kształtu $S \in \mathcal{S}_k$." zamiast "jest porządek podkafelków każdego kształtu $S \in \mathcal{S}_k$."