UNIWERSYTET
MIKOŁAJA KOPERNIKA
W TORUNIU
Wydział Matematyki
i Informatyki

Prof. dr hab. Krzysztof Frączek
Wydział Matematyki i Informatyki UMK
ul. Chopina 12/18
87-100 Toruń

Toruń, 2 października 2023

Recenzja rozprawy doktorskiej

Zastosowania multiporządku w miarowych i topologicznych działaniach grup ze średnią

mgr. inż. Mateusza Więcka

Wstęp. Rozprawa doktorska poświecona jest badaniu własności topologicznych i teorio-miarowych układów dynamicznych dla działań (ciągłych lub borelowskich) przeliczlnych grup ze średnią. W pewnym sensie głównym obiektem badań są układy topologiczne, przy czym układy teorio-miarowe pojawiają się naturalnie jako narzędzie, ale również stanowią podstawowy obiekt badań. W przypadku działań ogólnych grup, jako układów dynamicznych, jednym z podstawowych problemów jest brak naturalnego porządku na grupie. Grupa może nie posiadać porządku niezmienniczego. Aby ominąć problem bogactwa (równie dobrych lub złych) porządków na przeliczalnych grupach ze średnią, kandydat wprowadza w rozprawie pojęcie multiporządku. Multiporządek na grupie G definiuje się jako zbiór $\mathcal{O}$ porządków na G izomorficznych z naturalnym porządkiem na $\mathbb{Z}$. Ponadto, zakłada się, że $\mathcal{O}$ jest niezmienniczy ze względu na naturalne działanie grupy G przesuwające porządki oraz istnieje probabilistyczna borelowska miara G-niezmiennicza ν na $\mathcal{O}$. To eleganckie i proste pojęcie multiporządków oraz język z nim związany, w pewnym senie, porządkuje świat porządków na grupie.

Głównym celem rozprawy jest zrozumienie relacji pomiędzy wartością entropii dla topologicznych działań przeliczalnych grup ze średnią na zwartych przestawniach metrycznych X a istnieniem tzw. par asymptotycznych układu. W przypadku klasycznym, działań grupy $\mathbb{Z}$, para (x, x') różnych elementów X jest asymptotyczna, gdy iteracje x i x' (do przodu i do tyłu) asymptotycznie się zbliżają. W przypadku przesunięcia w lewo na $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ pary asymptotyczne to te, które różnią się tylko na skończenie wielu współrzędnych. Okazuje się, że istnienie i bogactwo par asymptotycznych jest, w pewnym sensie, cechą układów silnie chaotycznych, tzn. z dodatnią entropią topologiczną. Zjawisko to zostało zaobserwowane w dwóch przełomowych artykułach Blancharda-Hosta-Ruette oraz Downarowicza-Lacroix. Blanchard-Host-Ruette udowodnili, że każdy układ topologiczny z dodatnią entropią ma duży zbiór par asymptotycznych. Z drugiej strony, Downarowicz-Lacroix pokazali, że każdy układ topologiczny z zerową entropią ma rozszerzenie, które nie posiada par asymptotycznych.

Główne wyniki rozprawy uogólniają powyższe dwa rezultaty na działania przeliczanych grup ze średnią. Jednym z głównych problemów stojących na drodze do sformułowania takich uogólnień jest właściwe zdefiniowanie pojęcia pary asymptotycznej dla działań ogólnych grup. I tu z pomocą przychodzą multiporządki porządkujące porządki na grupie G. Główny rezultat rozprawy, w pewnym uproszeniu, charakteryzuje zerową entropię topologiczną G-działania następująco: układ

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU Wydział Matematyki i Informatyki
ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń, Polska, tel. +48 56 611 3410, fax +48 56 611 29 87, e-mail: wmii@mat.umk.pl
www.mat.umk.pl

topologiczny ma zerową entropię wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje multiporządek $(\mathcal{O}, \nu)$ oraz rozszerzenie topologiczne układu, które dla ν-prawie każdego porządku z $\mathcal{O}$ nie posiada par asymptotycznych względem tego porządku. Jednak omawiana rozprawa to nie tylko dowód głównego wyniku, który sam z siebie jest ważnym twierdzeniem, ale również cała teoria rozwinięta w celu okiełznania i wdrożenia pojęcia multiporządku do badania działań grup ze średnią. Z pewnością kandydat osiągnął tu pełen sukces. Część z zaprezentowanych w rozprawie wyników została już opublikowana w bardzo dobrych czasopiśmie branżowym Groups, Geometry, and Dynamics. Pozostały materiał jest umieszczony w formie dwóch preprintów w elektronicznym archiwum arXiv, jednak kandydat nie chwali się tym w rozprawie.

Omówienie rezultatów. Rozprawa zaczyna się od dobrze napisanego wprowadzenia (rozdział 1), w którym autora sprawnie i przekonywująco przedstawia motywacje, cele i koncepcje dowodów głównych rezultatów.

Rozdział 2 stanowi wprowadzenie do multiporządków i teorio-miarowych układów dynamicznych (G-działań) multiuporządkowanych. Te ostatnie, to są układy, które posiadają multiporządki jako faktory miarowe. Oprócz dowodów istnienia multiporządków o zadanych własnościach, takich jak zerowa entropia, czy podwójna zerowa entropia, najważniejszym rezultatem tej części rozprawy wydaje się być konstrukcja odwzorowania następnika S dla dowolnego układu multiuporządkowanego (twierdzenie 2.2.7). Jest to odwzorowanie orbitalnie równoważne z wyjściowym działaniem, a z drugiej strony jego faktoryzacja na muliporządek jest odwzorowaniem brania następnika w porządku. Te dwie własności dają w następnych rozdziałach możliwość przechodzenia od działań grupy G do świata $\mathbb{Z}$-działań, a tu do korzystania ze standardowych narzędzi. Ta strategia działa w przypadku, gdy układ jest odpowiednio multiuporządkowany. W przeciwnym przypadku dokonuje się rozszerzenia układu poprzez wzięcie połączenia z odpowiednim multiporządkiem.

Rozdział 3 dotyczy pojęcia entropii dla działań grup ze średnią. Rozdział zaczyna się od dowodu użytecznego wzoru na entropię warunkową względem multiporządku (twierdzenie 3.2.1), który jest dalej użyty do udowodnienia wersji twierdzenia Rudolpha-Weissa. Wspomniane Twierdzenie 3.3.1 mówi, że entropia warunkowa G-działania i stowarzyszonego odwzorowania następnika S względem multiporządku są równe. Rozdział kończy bardzo ciekawa charakteryzacja sigma-algebry Pinskera (maksymalna sigma-algebra o zerowej entropii) w języku multiporządków.

Rozdział 4 stanowi zwieńczenie poprzednich rozdziałów i zawiera dowód uogólnionej wersji Blancharda-Hosta-Ruette. Twierdzenie 4.2.6 mówi, że jeśli topologiczne działanie przeliczalnej grupy ze średnią ma dodatnią entropię, to dla dowolnego multiporządku $(\mathcal{O}, \nu)$ dla ν-prawie każdego porządku z $\mathcal{O}$ układ posiada pary asymptotyczne względem tego porządku. Jest to bardzo eleganckie twierdzenie, które rzeczywiści pokazuje siłę i urodę zastosowania multiporządków do badania grup ze średnią, a przynajmniej mnie przekonuje. Strategia dowodu tego rezultatu została przedstawiona przy omawianiu pojęcia odwzorcowania następnika S, ale jej implementacja jest bardzo subtelna i wymagająca.

Pozostałe dwa rozdziały 5 i 6 są poświęcone dowodowi uogólnionej wersji twierdzenia Downarowicza-Lacroix. Twierdzenia 6.2.4 mówi, że dla dowolnego topologicznego działania przeliczalnej grupy ze średnią o zerowej entropii istnieje multiporządek $\mathcal{O}$ oraz rozszerzenie topologiczne układu, które nie ma par asymptotycznych dla dowolnego porządku z $\mathcal{O}$. Multiporządki wykorzystane w dowodzie tego rezultatu są specjalnej postaci, po pierwsze pochodzą od kafelkowań grupy G, a po drugie są typu hodometrycznego. Rozdział 5 stanowi wprowadzenie do teorii kafelkowań i multiporządków tego typu. W rozdziale 6 przedstawiony jest dowód twierdzenia 6.2.4, a jego najważniejszą częścią jest konstrukcja rozszerzenia w twierdzeniu 6.2.1, w której kluczowe jest użycie multiporządków typu hodometrycznego.

Ocena rozprawy. Rozprawa niewątpliwie zawiera oryginalne rozwiązania istotnych problemów w dynamice działań przeliczalnych grup ze średnią. Jej główne rezultaty, twierdzenia 4.2.6 oraz 6.2.4, stanowią moim zdaniem ważny wkład w rozwój tej tematyki. Ich dowody są pomysłowe, ale również dość skomplikowane technicznie. Zawierają wiele bardzo subtelnych rozumowań, które wymagały od autora nieraz ekwilibrystycznych umiejętności ich prezentacji. Jednak rozprawa to nie tylko główne rezultaty, to również budowa całej teorii, która niewątpliwie udowodniła, że multiporządki to cenne narzędzie do badania działań przeliczalnych grup ze średnią.

Rozprawa jest bardzo dobrze skomponowana, co nie musi być łatwe, gdy przedstawiamy całościową teorię. Jedynie dokuczała mi niewielka liczba przykładów, co na początku czytania, w przypadku laika, może budzić pewien dyskomfort. Natomiast w rozdziale 6, który traktuję jako najwartościowszy i najbardziej skomplikowany, zabrakło mi większej dbałości o komfort czytelnika w rozumieniu wszystkich argumentów, które w tej części rozprawy są technicznie bardzo zaawansowane. Na przykład, w konstrukcji rozszerzenia miałem problemy ze zrozumieniem, jak funkcjonuje kodowanie ψ. Na zakończenie oceny mam jeszcze jedną uwagę językową. Kandydat używa sformułowania „miara niesiona przez zbiór". Przy pierwszym czytaniu mój mózg podświadomie zrozumiał, że chodzi o miarę o pełnym nośniku. Dopiero po dalszej lekturze okazało się, że to błędna interpretacja słów. Ten przypadek pokazuje, że należy uważać ze stosowaniem lokalnego slangu lub wskazywać na jego stosowanie.

Wymienione tu nieistotne krytyczne uwagi nie wpływają jednak na moją bardzo wysoką ocenę poziomu rozprawy doktorskiej.

Podsumowanie. W moim przekonaniu rozprawa mgr. inż. Mateusza Więcka pt. „Zastosowania multiporządku w miarowych i topologicznych działaniach grup ze średnią" spełnia ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim, w szczególności rozprawa prezentuje oryginalne rozwiązanie problemu naukowego (niejednego) wymagane przez ustawę. Uzyskane przez kandydata wyniki świadczą o bardzo dobrym opanowaniu warsztatu matematycznego i umiejętności rozwiązywania problemów dynamiki topologicznej i teorii ergodycznej. Kandydat posiada szeroką wiedzę matematyczną obejmującą nie tylko najbliższą mu tematykę. Ten fakt w połączeniu z praktyką, jaką nabył przy przygotowywaniu rozprawy doktorskiej, zapewne pozwoli mu na dalszy rozwój i samodzielne zmierzenie się z problemami teorii układów dynamicznych.

W związku z tym przedkładam Radzie Dyscypliny Naukowej Matematyka Politechniki Wrocławskiej pozytywną recenzję rozprawy oraz wniosek o przyjęcie rozprawy i dopuszczenie jej do dalszych etapów postępowanie w sprawie nadania stopnia doktora mgr. inż. Mateuszowi Więckowi.