Abstract of the Doctoral Dissertation

“Boundary problems for nonlocal operators”

Damian Fafuła

In recent years, there has been a growing interest in so-called *nonlocal operators*, i.e. the operators whose value for a given function at a certain point in space is determined thanks to the knowledge of the value of this function not only in an arbitrarily small neighbourhood of the point, but also in (usually) the entire space. The most famous example of such operator is the *fractional Laplacian* $(-\Delta)^{\alpha/2}$, $\alpha \in (0,2)$, which has been a point of interest for mathematicians for many years. The most fundamental property of nonlocal operators, from the point of view of this doctoral dissertation, is their connection to the theory of pure-jump stochastic processes. It turns out that the nonlocal operators are the *infinitesimal generators* of such processes. In particular, the fractional Laplacian is the generator of the *isotropic α-stable process*. In 2017, Dipierro, Ros-Oton and Valdinoci introduced a *Neumann problem for the fractional Laplacian* of the form

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\alpha/2} u &= f, \quad \text{in } \Omega, \\ \mathcal{N}_{\alpha/2} u &= 0, \quad \text{in } \mathbb{R} \setminus \overline{\Omega}, \end{cases} \tag{1}$$

where Ω is a Lipschitz domain and $\mathcal{N}_{\alpha/2}$ is so-called *nonlocal normal derivative* given by the formula

$$\mathcal{N}_{\alpha/2} u(x) := \int_{\Omega} (u(x) - u(y)) \nu(x-y) \, \mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \overline{\Omega}.$$

Here ν denotes the Lévy measure of the isotropic α-stable process. In the paper of Dipierro et al., an interesting probabilistic interpretation of this problem was presented: its solution is the position density of a particle moving randomly in Ω; this particle after leaving the set Ω, immediately returns to Ω with a specific distribution of the return position, given by the Lévy measure ν. The purpose of the dissertation is to give this interpretation a strict probabilistic meaning, in case $d = 1$ and $\Omega = (0, \infty)$, and to find the solution of the problem (1).

The content of the thesis was divided into seven chapters, each one focusing on different aspects of the research. In the introductory chapter, there is provided a historical overview and a sketch of the outline of the research problem included in this dissertation.

The basic notation and tools used in the remaining part of the thesis were presented in the second chapter. We also present the proofs of the widely known properties of the stochastic processes, especially properties of the isotropic α-stable processes.

In the third chapter, we provide a direct construction of the Markov process X on $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$. It is worth emphasizing here that an important correction, in the interpretation of Dipierro, Ros-Oton and Valdinoci, was necessary — the particle does not immediately return to the set Ω, but it remains in the certain place outside of Ω for some random exponential time with parameter depending on the distance from Ω. Subsequently, the exact form of the semigroup K of the process X was determined. The chapter is concluded with a theorem which presents the excessive functions for the semigroup K.

The lifetime and the limit behaviour of the process X is investigated in the fourth chapter. It was proved that the following statements hold with probability one.

(a) If $\alpha \in (0,1)$, then the lifetime ξ of the process X is infinite and $\lim_{t\to\infty} |X_t| = \infty$.

(b) If $\alpha \in (1,2)$, then the lifetime ξ of the process X is finite and $\lim_{t\nearrow\xi} X_t = 0$.

(c) If $\alpha = 1$, then the lifetime ξ of the process X is infinite and $\lim_{t\to\infty} X_t$ does not exist.

This result was used to prove the Feller property on $C_0(\mathbb{R}^*)$ of the semigroup K in case $\alpha \in (1,2)$.

The fifth chapter of the dissertation is particularly devoted to finding the exact form of the pointwise generator for the semigroup K on the excessive functions $|x|^\beta$, where $\beta(\alpha-\beta-1) > 0$. The vast majority of this chapter collects proofs of various estimates that are crucial in achieving our goal.

In the sixth chapter, we prove the Hardy inequality for the semigroup K in case $\alpha \neq 1$. Then, this result is used to prove various characterizations of the domain of the Dirichlet form $\mathcal{E}$ corresponding to the process X. The explicit form of $\mathcal{E}$ was also established. At the end of the chapter, it was proved that the form $\mathcal{E}$ together with its natural domain over $L^2(\mathbb{R})$ is regular.

Last but not least, the seventh chapter is devoted to finding the direct solution of the Neumann boundary problem in case $\alpha \neq 1$. The problem which is in our point of interest is as follows:

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\alpha/2} u &= f, \quad \text{in } \Omega, \\ \mathcal{N}_{\alpha/2} u &= f, \quad \text{in } \mathbb{R} \setminus \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{2}$$

where $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ is a continuous function with compact support. It turns out that the characteristic Dynkin operator of the process X corresponds to the operators occurring in the Neumann boundary problem (2) and the 0-potential of K is its solution.

Streszczenie Rozprawy Doktorskiej

„Warunki brzegowe dla operatorów nielokalnych”

Damian Fafuła

W ciągu ostatnich lat wzrosło zainteresowanie tzw. *operatorami nielokalnymi*, tj. operatorami, których wartości w pewnym punkcie dla ustalonej funkcji wyznaczane są na podstawie znajomości wszystkich wartości tej funkcji, a nie na podstawie dowolnie małego otoczenia punktu. Najpopularniejszym przykładem takiego operatora jest niewątpliwie *ułamkowy laplasjan* $(-\Delta)^{\alpha/2}$, $\alpha \in (0,2)$, który od wielu lat jest punktem zainteresowania matematyków. Najbardziej fundamentalną własnością operatorów nielokalnych, z punktu widzenia tej rozprawy doktorskiej, jest ich związek z teorią czysto-skokowych procesów stochastycznych. Okazuje się, że operatory nielokalne są *generatorami* takich procesów. W szczególności, ułamkowy laplasjan jest generatorem *izotropowego procesu α-stabilnego*. W 2017 roku, Dipierro, Ros-Oton i Valdinoci przedstawili tzw. *problem brzegowy typu Neumanna dla ułamkowego laplasjanu*, który jest postaci

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\alpha/2}u &= f, \quad \text{na}\, \Omega, \\ \mathcal{N}_{\alpha/2}u &= 0, \quad \text{na}\, \mathbb{R} \setminus \overline{\Omega}, \end{cases} \tag{1}$$

gdzie Ω jest zbiorem lipschitzowskim, a $\mathcal{N}_{\alpha/2}$ jest tzw. *nielokalną pochodną normalną* daną wzorem

$$\mathcal{N}_{\alpha/2}u(x) := \int_\Omega (u(x) - u(y))\nu(x-y)\,\mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \overline{\Omega}.$$

Powyżej ν oznacza miarę Lévy'ego izotropowego procesu α-stabilnego. Dipierro, Ros-Oton i Valdinoci przedstawili w swojej pracy interesującą interpretację probabilistyczną powyższego problemu, według której jego rozwiązanie jest gęstością pozycji cząsteczki poruszającej się losowo w zbiorze Ω; po opuszczeniu Ω cząsteczka natychmiastowo powraca do Ω zgodnie z rozkładem położenia po powrocie, danym przez miarę Lévy'ego ν. Celem niniejszej rozprawy jest nadanie tej interpretacji ścisłego probabilistycznego sensu, w przypadku $d = 1$ i $\Omega = (0, \infty)$, oraz znalezienie rozwiązania problemu (1).

Zawartość rozprawy została podzielona na siedem rozdziałów, z których każdy skupia się na innym aspekcie badań. W rozdziale pierwszym przedstawiony został rys historyczny badanego problemu oraz została omówiona zawartość całej rozprawy.

Podstawowe pojęcia i narzędzia stosowane w pozostałej części pracy omówione zostały w rozdziale drugim. Przedstawiamy tam również dowody powszechnie znanych własności procesów stochastycznych, zwłaszcza izotropowych procesów α-stabilnych.

W rozdziale trzecim przeprowadzamy bezpośrednią konstrukcję procesu Markowa X o przestrzeni stanów $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Warto wspomnieć w tym miejscu, że konieczna była korekta w interpretacji probabilistycznej Dipierro, Ros-Otona i Valdinociego — cząsteczka po wyskoku ze zbioru Ω nie powraca natychmiastowo do Ω, ale pozostaje w ustalonym punkcie poza Ω przez pewien czas wykładniczy, którego średnia zależy od odległości od Ω. Następnie, wyznaczana jest jawna postać półgrupy operatorów K odpowiadającej procesowi X. Dla niej wyznaczone zostają funkcje ekscesywne.

Czas życia i granica położeń procesu X badane są w rozdziale czwartym rozprawy. Zostało tam udowodnione twierdzenie mówiące, że następujące własności zachodzą z prawdopodobieństwem jeden.

(a) Jeśli $\alpha \in (0,1)$, to czas życia ξ procesu X jest nieskończony i $\lim_{t\to\infty} |X_t| = \infty$.

(b) Jeśli $\alpha \in (1,2)$, to czas życia ξ procesu X jest skończony i $\lim_{t\nearrow\xi} X_t = 0$.

(c) Jeśli $\alpha = 1$, to czas życia ξ procesu X jest nieskończony i $\lim_{t\to\infty} X_t$ nie istnieje.

Powyższy wynik został również wykorzystany do dowodu własności Fellera na $C_0(\mathbb{R}^*)$ półgrupy K w przypadku $\alpha \in (1,2)$.

Rozdział piąty rozprawy poświęcony został wyznaczeniu dokładnej postaci generatora punktowego dla półgrupy K na funkcjach ekscesywnych $|x|^\beta$, gdzie $\beta(\alpha-\beta-1) > 0$. Zdecydowana większość tego rozdziału zawiera dowody oszacowań, które są kluczowe w osiągnięciu naszego celu.

W rozdziale szóstym dowodzimy nierówności Hardy'ego dla półgrupy K w przypadku $\alpha \neq 1$. Wynik ten wykorzystywany jest do dowodów różnych charakteryzacji dziedziny formy Dirichleta $\mathcal{E}$ odpowiadającej procesowi X. Wyznaczamy również jawną postać $\mathcal{E}$ oraz dowodzimy, że razem z naturalną dziedziną na $L^2(\mathbb{R})$, forma ta jest regularna.

Ostatni, siódmy rozdział zawiera wyniki dotyczące postaci rozwiązań problemu brzegowego Neumanna w przypadku $\alpha \neq 1$. Problem, który jest naszym punktem zainteresowania, jest postaci

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\alpha/2}u &= f, \quad \text{na } \Omega, \\ \mathcal{N}_{\alpha/2}u &= f, \quad \text{na } \mathbb{R}\setminus\overline{\Omega}. \end{cases} \tag{2}$$

gdzie $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ jest pewną ustaloną funkcją ciągłą o nośniku zwartym. Okazuje się, że operator charakterystyczny Dynkina procesu X odpowiada operatorom występującym w problemie Neumanna (2) oraz jego rozwiązaniem jest 0-potencjał półgrupy K.