

## 1. Imię i Nazwisko

Piotr Andrzej Surówka

## 2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe lub artystyczne - z podaniem podmiotu nadającego stopień, roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej.

- **2010** Doktorat, Uniwersytet Jagielloński, Tytuł: "Non-perturbative aspects of supersymmetric plasma physics in a gauge theory", Promotor: Romuald Janik
- **2006** Magisterium, Uniwersytet Jagielloński, Tytuł: "Quark-antiquark interactions and the AdS/CFT correspondence"; Promotor: Romuald Janik

## 3. Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych lub artystycznych.

- **2020-** Adiunkt, Politechnika Wroclawska
- **2016-** Staff Scientist in the Max Planck Institute for the Physics of Complex Systems (MPI PKS), Dresden
- **2016** Research associate in Max Planck Institute for Physics, Munich
- **2013-2016** Postdoctoral Fellow at Harvard University
- **2010-2013** Postdoctoral Research Associate at Vrije Universiteit Brussel (VUB) and The International Solvay Institutes

## 4. Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 Ustawy.

Moje osiągnięcie obejmuje sześć publikacji poświęconych badaniom transportu w półmetalach. Składają się na nie następujące publikacje:

- [1] R. M. A. Dantas, F. Peña-Benitez, B. Roy, and P. Surówka, *Magnetotransport in multi-weyl semimetals: a kinetic theory approach*, Journal of High Energy Physics **2018** 069 (2018)
- [2] R. M. A. Dantas, F. Peña-Benitez, B. Roy, and P. Surówka, *Non-abelian anomalies in multi-weyl semimetals*, Physical Review Research **2** 013007 (2020).
- [3] R. Moessner, P. Surówka, and P. Witkowski, *Pulsating flow and boundary layers in viscous electronic hydrodynamics*, Physical Review B **97** 161112 (2018).
- [4] R. Moessner, N. Morales-Durán, P. Surówka, and P. Witkowski, *Boundary-condition and geometry engineering in electronic hydrodynamics*, Physical Review B **100** 155115 (2019) .
- [5] F. Peña-Benitez, K. Saha, and P. Surówka, *Berry curvature and hall viscosities in an anisotropic dirac semimetal*, Physical Review B **99** 045141 (2019).
- [6] C. Hoyos, R. Lier, F. Peña-Benitez, and P. Surówka, *Quantum hall effective action for the anisotropic dirac semimetal*, Physical Review B **102** 081303 (2020).

## Wprowadzenie

Współczesna fizyka opiera się na opisie przyrody w ramach efektywnych teorii pola. Aby zrozumieć zjawiska fizyczne, nie musimy znać teorii wszystkiego, wystarczy opracować efektywny model, odpowiedni dla skal, które chcemy badać. Najstarszymi przykładami efektywnych teorii pola są hydrodynamika i teoria elastyczności - teorie, które parametryzują naszą nieznaną wysokoenergetycznych mikroskopowych stopni swobody poprzez redukcję do zbioru parametrów, zwanych współczynnikami transportu w hydrodynamice i współczynnikami sprężystości w teoriach elastyczności. Uzupełniają je pola dynamiczne, takie jak prędkość płynu czy deformacje ciała stałego. Efektywnym opisem fizyki wielu ciał jest też teoria kinetyczna. Pozwala ona zrozumieć szerszy zakres skal niż hydrodynamika i daje bardziej mikroskopową analizę. Efektywny model zjawisk makroskopowych jest często klasyczny i nie wymaga kwantyzacji. Jednak nie zawsze oznacza to, że poprawna teoria makroskopowa musi ignorować szczegóły świata kwantowego. W rzeczywistości kwantowe zjawiska mogą wykazywać zaskakujące konsekwencje w skali makroskopowej. Najstarszym tego przykładem jest zjawisko nadciężkości, inne przykłady to kwantowe płyny Halla w dwóch wymiarach przestrzennych i płyny z chiralnymi anomaliami kwantowymi w trzech wymiarach przestrzennych.

W ciągu ostatnich trzech dekad, fizycy odkryli niesamowitą różnorodność kolektywnych stanów materii, których właściwości znacznie przekraczają wcześniejsze przewidywania. W kontekście fizyki materiałów wynikają one z własności elektronów i ich oddziaływań. Struktura pasmowa ciała stałego opisuje zakres poziomów energii dostępnych dla elektronów wraz z zakresami dla nich niedostępnymi, zwanymi przerwami wzbronionymi. Na podstawie struktury przerw energetycznych, ciała stałe można podzielić na izolatory, półprzewodniki, półmetale lub metale. Jeżeli wypełnione pasmo walencyjne jest oddzielane od pasma przewodzącego, materiał jest izolatorem lub półprzewodnikiem w zależności od wielkości przerwy. W metalach pasmo przewodzące jest częściowo wypełnione. Wreszcie, jeśli materiały mają niewielkie nakładanie się pasm przewodnictwa i walencyjnego oraz pomijalną gęstość stanów na poziomie Fermiego, nazywamy je półmetalami. Materiały te są przykładem tzw. materiałów topologicznych. Celem przedstawionych tutaj badań jest opracowanie ram teoretycznych opisujących te kolektywne stany materii oraz znalezienie nowych sposobów ich wykorzystania w laboratorium i do zastosowań w urządzeniach.

W ostatnich latach byliśmy świadkami ogromnego postępu w zrozumieniu i produkcji półmetali. Prominentnymi przykładami są grafen i półmetale Diraca/Weyla. Grafen to krystaliczna postać węgla o grubości jednego atomu. Z drugiej strony, półmetale Weyla to materiały o trójwymiarowej strukturze. Grafen można przedstawić jako bezmasowy fermion Diraca w dwuwymiarowej przestrzeni, podczas gdy półmetale Weyla wymagają do opisu trójwymiarowych fermionów. Jak zobaczymy, wymiarowość odgrywa ważną rolę przy badaniu właściwości tych materiałów.

To, co wyróżnia półmetale, to pojęcie topologii, które pojawia się w różnych miejscach ich opisu. Aby to zobaczyć możemy wprowadzić pojęcie „fazy Berry’ego” wynikającej z hamiltonianu  $H(x^a, p^a; \lambda^i)$ . Hamiltonian zależy od pozycji, pędów, które są stopniami swobody układu oraz zbioru parametrów  $\lambda^i$ . Najpierw skupimy się na fazie Berry’ego w przestrzeni parametrów, później zbadamy również fazy Berry’ego w przestrzeni pędu. W pierwszej kolejności ustalamy wartości parametrów  $\lambda^i$  i zakładamy, że system jest w stanie podstawowym, określonym przez funkcję falową  $|\psi(\lambda)\rangle$ . Dla prostoty zakładamy, że stan jest niezdegenerowany. Faza Berry’ego pojawia się, gdy zmieniamy parametry adiabaticznie powoli w taki sposób, że na końcu ewolucji adiabaticznej wartości parametrów są takie jak te, od których zaczynaliśmy. Kwantowe twierdzenie adiabaticzne mówi nam, że wróciliśmy do pierwotnego stanu z dokładnością do czynnika fazowego, który może powstać w wyniku ewolucji adiabaticznej. W każdym punkcie przestrzeni parametrów możemy wprowadzić bazę ortonormalną

$$H(\lambda(t)) |n(\lambda)\rangle = \epsilon_n(\lambda) |n(\lambda)\rangle. \quad (1)$$

Baza nie ma stałego współczynnika fazy. Ewolucja czasowa funkcji falowej opisana jest zależnym od

czasu równaniem Schrödingera

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = H(\lambda(t)) |\psi\rangle. \quad (2)$$

Stan podstawowy podlegający ewolucji Schrödingera można zapisać jako

$$|\psi\rangle = U(t) |n(\lambda)\rangle, \quad (3)$$

gdzie  $U(t)$  jest fazą zależną od czasu, którą chcemy określić. Mnożąc zależność (2) przez stan "bra"  $\langle\psi|$  otrzymujemy równanie ewolucji fazy

$$\dot{U}(t) = -i\mathcal{A}_i \dot{\lambda}^i U, \quad (4)$$

gdzie  $\mathcal{A}_i = -i \langle n | \frac{\partial}{\partial \lambda^i} | n \rangle$  nazywana jest koneksją Berry'ego. Rozwiązanie dane jest wzorem

$$U(t) = \exp \left( -i \int \mathcal{A}_i \dot{\lambda}^i dt \right). \quad (5)$$

To wyrażenie obliczone w przypadku, gdy ewolucja w przestrzeni parametrów dana jest zamkniętą krzywą, określa fazę Berry'ego, o którą nam chodzi. Zauważmy, że w wyprowadzaniu używamy zestawu stanów bazowych, które są dowolne. Oznacza to, że w naszym opisie występuje niejednoznaczność i przejawia się ona właśnie w potencjale cechowania, który wynika z określonego wyboru stanów bazowych. Jeśli wybierzemy inny zestaw stanów, pojawi się nowa funkcja potencjału, która jest powiązana ze starą transformacją cechowania

$$\mathcal{A}'_i = \mathcal{A}_i + \frac{\partial \phi_n}{\partial \lambda^i}, \quad (6)$$

gdzie  $\phi_n$  to faza, która różni się między stanami odniesienia. Wielkości fizyczne, takie jak faza Berry'ego, nie zależą od wyboru cechowania. Innym przykładem jest, tzw. krzywizna Berry'ego

$$\Omega_{ij} = \frac{\mathcal{A}_i}{\partial \lambda^j} - \frac{\mathcal{A}_j}{\partial \lambda^i}. \quad (7)$$

Używając krzywizny możemy wyznaczyć fazę Berry'ego

$$\exp(i\gamma) = \exp \left( -i \oint_{\mathcal{C}} \mathcal{A}_i d\lambda^i \right) = \left( -i \int_S \Omega_{ij} dS^{ij} \right), \quad (8)$$

gdzie  $S$  jest powierzchnią ograniczoną przez kontur  $\mathcal{C}$ . Teraz możemy zobaczyć, jak znaczenie w problemie ma topologia. Faza Berry'ego jest określona przez strumień natężenia pola  $\Omega_{ij}$ . Taki strumień może być niezerowy tylko wtedy, gdy powierzchnia zawiera topologiczną osobliwość zwaną monopolem

$$\Omega_{ij} = n \epsilon_{ijk} \frac{\lambda^k}{|\boldsymbol{\lambda}|^3}, \quad (9)$$

gdzie  $n$  jest ładunkiem monopola. Monopol ma ważną właściwość, która wynika z wymogu, że potencjał cechowania ma jednoznacznie określoną wartość, mianowicie jego ładunek musi być skwantowany  $2n \in \mathbb{Z}$ . W rezultacie całkę krzywizny należy kwantować w jednostkach  $2\pi$

$$\int \Omega_{ij} = 2\pi C, \quad (10)$$

gdzie  $C$  to tzw. liczba Cherna. Jest to miara całkowitej liczby monopoli.

Biorąc pod uwagę to ogólne wprowadzenie, zamierzamy zastosować koncepcję faz Berry'ego do krystalicznych ciał stałych. Z twierdzenia Blocha wynika, że funkcję falową w kryształach można zapisać jako

$$\psi_{n\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}}\psi_{n\mathbf{p}}(\mathbf{x}), \quad (11)$$

gdzie  $n$  to indeks pasma,  $\hbar\mathbf{p}$  to pęd kryształu,  $\mathbf{a}$  to wektor sieci. Aby nawiązać do powyższego formalizmu, możemy wykonać transformację unitarną, aby uczynić hamiltonian zależnym od  $\mathbf{p}$ . Jeśli  $\mathbf{p}$  może zmieniać się w przestrzeni pędu, przestrzeń Blocha uzyskuje fazę Berry'ego. Ważne jest dla nas, aby pęd kryształu odpowiadał fizycznie mierzalnej prędkości. Odgrywa on również kluczową rolę w półklasycznym modelu dynamiki elektronów, ponieważ wchodzi w równania ruchu.

W dalszej części autoreferatu skupimy się na półmetalach. Efektywną dynamikę kwazicząstki Weyla wyznaczają zmodyfikowane równania ruchu [7–10]

$$\dot{\mathbf{r}} = \nabla_{\mathbf{p}}\epsilon_{\mathbf{p}} - \hbar\dot{\mathbf{p}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -e\mathbf{E} - e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}, \quad (12)$$

gdzie  $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{p}} = -\text{Im}[\langle \nabla_{\mathbf{p}}u_{\mathbf{p}} | \times | \nabla_{\mathbf{p}}u_{\mathbf{p}} \rangle]$  oznacza krzywiznę Berry'ego,  $\epsilon_{\mathbf{p}}$  relację dyspersji  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$  odpowiednio pola elektryczne i magnetyczne. W obecności pola magnetycznego,  $\epsilon_{\mathbf{p}} = \epsilon_{\mathbf{p}}^0 - \hbar^2\mathbf{m}_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{B}$ , gdzie  $\epsilon_{\mathbf{p}}^0$  jest relacją dyspersji dla  $\mathbf{B} = 0$ ,  $\mathbf{m}_{\mathbf{p}} = -\frac{e}{2\hbar} \text{Im}[\langle \nabla_{\mathbf{p}}u_{\mathbf{p}} | \times (H_{\mathbf{p}} - \epsilon_{\mathbf{p}}^0) | \nabla_{\mathbf{p}}u_{\mathbf{p}} \rangle]$  jest orbitalnym momentem magnetycznym pakietu falowego.  $H_{\mathbf{p}}$  przedstawia hamiltonian natomiast  $|u_{\mathbf{p}}\rangle$  jego funkcje własne. Zauważmy, że w obecności krzywizny Berry'ego i pola magnetycznego półklasyczne równania opisujące pozycję i momenty pędu są sprzężone.

Podstawą teorii kinetycznej jest zredukowanie wielociałowej dynamiki makroskopowej liczby cząstek do opisu w kategoriach ewolucji pojedynczej cząstki. Osiąga się to za pomocą równania ewolucji funkcji dystrybucji w przestrzeni fazowej  $f$

$$\partial_t f + \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + \dot{\mathbf{p}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = \mathcal{C}(f). \quad (13)$$

znanego jako równanie Boltzmann. Ewolucja jest podzielona na część swobodną i zderzenia opisane przez  $\mathcal{C}(f)$ . W zasadzie  $\mathcal{C}(f)$  powinno zawierać informacje o wszystkich kolizjach w systemie. Jednakże, jeśli założymy, że interakcje są rzadkie, to możliwe jest przybliżenie  $\mathcal{C}(f)$  w taki sposób, że pozostaje tylko jeden rozkład cząstek. Można to postrzegać jako fenomenologiczne „domknięcie” równań. Zakładając, że możemy znaleźć rozwiązanie i dynamikę pojedynczej cząstki, wielkości fizyczne definiuje się jako całki momentów funkcji rozkładu. Na przykład w wielu zjawiskach transportu interesuje nas gęstość prądu. Jest ona zdefiniowana w następujący sposób

$$\mathbf{j} = -e \int_{\mathbf{p}} (D\dot{\mathbf{r}} + \hbar^2 \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{m}_{\mathbf{p}}) f, \quad (14)$$

gdzie  $\int_{\mathbf{p}} \equiv \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}$  i  $D = 1 + e\hbar\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Omega}$  reprezentuje zmodyfikowany element objętości przestrzeni fazowej [10, 11].

Teoria kinetyczna jest ważnym narzędziem służącym do zrozumienia słabo oddziałujących systemów. Jednak ostatecznie interesują nas również silnie oddziałujące fermiony. Nie ma wielu dostępnych metod badania takich układów. Nasze podejście polega na badaniu uniwersalnych cech takich systemów przy użyciu symetrii i topologii. W tym nieodzowna jest w szczególności topologia przestrzeni pędu. Aby jednak w pełni wykorzystać moc symetrii i topologii, musimy odwołać się do technik teorii pola. Zaczynamy od fermionu Weyla w zewnętrznym potencjale cechowania

$$S_{L,R} = \int d^4x i\bar{\Psi}\gamma^\mu (\partial_\mu - iA_\mu) \mathcal{P}_\pm \Psi. \quad (15)$$

gdzie  $\mathcal{P}_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$  rzutuje czterokomponentowe pole Diraca  $\Psi = \psi_L \oplus \psi_R$  w trzech wymiarach przestrzennych na dwuskładnikowe lewoskrętne i prawoskrętne spinory Weyla. Odpowiada to

hamiltonowskiemu sformułowaniu dla lewo- i praworęcznych fermionów w przestrzeni pędu

$$\mathcal{H}_{L,R} = \pm \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}. \quad (16)$$

Do zdefiniowania efektywnego działania możemy użyć całki po trajektoriach

$$e^{i\Gamma[A]} = \int D\Psi D\bar{\Psi} e^{iS_{L,R}}. \quad (17)$$

Ważną cechą tego działania jest występowanie anomalii chiralnej. Anomalie odpowiadają symetriom, które są łamane przez kwantowe fluktuacje, tj. przez miarę całkowania. Klasyczne działanie dla pola Diraca ma dwie niezależne symetrie  $U(1)$  działające na  $\mathcal{P}_+\Psi$  i  $\mathcal{P}_-\Psi$  które oznaczamy za pomocą  $U(1)_{L,R}$ . Odpowiadające tej symetrii zachowane prądy to  $J_{L,R}^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\mathcal{P}_\pm\Psi$ .

Wprowadzamy lewostronne i prawostronne pola cechowania, które niezależnie łączą się z prądami chiralnymi. Ponadto definiujemy prąd wektorowy i aksjalny jako sumę i różnicę prądów lewoskrętnych i prawoskrętnych

$$\tilde{J}^\mu = \tilde{J}_L^\mu + \tilde{J}_R^\mu, \quad (18)$$

$$\tilde{J}_5^\mu = \tilde{J}_L^\mu - \tilde{J}_R^\mu. \quad (19)$$

Wprowadzamy również odpowiednie pola cechowania, które są źródłem tych prądów

$$A_\mu = \frac{1}{2}(A_\mu^L + A_\mu^R), \quad (20)$$

$$A_\mu^5 = \frac{1}{2}(A_\mu^L - A_\mu^R). \quad (21)$$

Przy pomocy tych zmiennych, możemy zaobserwować pojawienie się anomalii. Aby to zrobić musimy zrobić wektorową i aksjalną transformację cechowania oraz sprawdzić czy działanie jest niezmiennicze. Ważnym krokiem w tej procedurze jest wybór regulatora, który dobrze zdefiniuje całkę po trajektoriach. Przy odpowiedniej regularyzacji wyprowadzamy tożsamości Warda dla prądów wektorowych i aksjalnych odpowiadających transformacjom cechowania

$$\partial_\mu \tilde{J}^\mu = \frac{1}{48\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} F_{\mu\nu} F_{\rho\lambda}^5, \quad (22)$$

$$\partial_\mu \tilde{J}_5^\mu = \frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} (F_{\mu\nu} F_{\rho\lambda} + F_{\mu\nu}^5 F_{\rho\lambda}^5), \quad (23)$$

gdzie  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  i  $F_{\mu\nu}^5 = \partial_\mu A_\nu^5 - \partial_\nu A_\mu^5$ . Działanie, które wynika z całkowania pól fermionowych, prowadzi do równań operatorowych, które nie zachowują prądów wektorowych, a symetria cechowania jest tracona. Utrudnia to interpretację tego prądu jako prądu elektrycznego. Aby rozwiązać ten problem, argumentujemy, że możemy przedefiniować nasze działanie, dodając do niego lokalne człony

$$\Gamma[A, A^5] \rightarrow \Gamma[A, A^5] + \frac{1}{12\pi^2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} A_\mu A_\nu^5 F_{\rho\lambda}. \quad (24)$$

Robiąc to, ponownie obliczamy zachowanie prądów wynikające z tego działania

$$\partial_\mu \tilde{J}^\mu = 0. \quad (25)$$

$$\partial_\mu \tilde{J}_5^\mu = \frac{1}{48\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} (3F_{\mu\nu} F_{\rho\lambda} + F_{\mu\nu}^5 F_{\rho\lambda}^5). \quad (26)$$

Widzimy jednak, że prąd wektorowy jest zachowywany kosztem braku zachowania prądu aksjalnego. To leży u podstaw anomalii chiralnych - nie ma teorii kwantowej, w której jednocześnie zachowywane są

prądy aksjalne i wektorowe. Zauważamy, że tzw. ”prąd konsystentny”, zdefiniowany jako funkcjonalna pochodna działania kwantowego, nie jest operatorem niezmiennym ze względu na symetrię cechowania, jeśli występuje anomalia. Można jednak zdefiniować prąd, który jest niezmienniczy dla wszystkich przekształceń pól cechowania, w tym tych anomalnych, i wprowadzić anomalię w kategoriach tego prądu. Wymaga dodania prądu Cherna-Simonsa do prądu konsystentnego. Prądu kowariantnego nie można uzyskać z wariacji działania z lokalnymi członami. Kowariantny prąd spełnia te same tożsamości Warda, co prąd konsystentny ze współczynnikiem wynoszącym 1/3 tego, który pojawia się w tożsamości Warda dla prądu konsystentnego.

W końcowej części wprowadzenia chcemy zadać pytanie o opis hydrodynamiczny oddziałujących fermionów bezmasowych. Jest to szczególnie ważne z punktu widzenia eksperymentu, ponieważ hydrodynamikę półmetali można badać eksperymentalnie. Właściwe zrozumienie hydrodynamiki układów elektronowych wymaga zrozumienia podstaw teoretycznych płynów w nanoskalach oraz dostosowania ich do warunków eksperymentalnych.

Ogólna struktura równań hydrodynamicznych składa się ze zbioru praw zachowania. W przypadku bezmasowych naładowanych relatywistycznych cząstek istotnymi wielkościami są tensor pędu energii  $\tau^{\mu\nu}$ , prąd  $\nu^\mu$  i entropia  $\sigma^\mu$ . Równania konstytutywne są podane przez rozwinięcie w gradientach w następującej postaci:

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} + \tau^{\mu\nu}, \quad (27)$$

$$j^\mu = nu^\mu + \nu^\mu, \quad (28)$$

$$s^\mu = su^\mu + \sigma^\mu. \quad (29)$$

$\epsilon$  oznacza gęstość energii,  $p$  ciśnienie i  $n$  gęstość cząstek

W płynach relatywistycznych przepływ ciepła skutkuje przepływem masy, a pojęcie prędkości w odniesieniu do przepływu masy staje się niejednoznaczne. Aby pozbyć się tej niejednoznaczności, stosuje się tzw. hydrodynamiczne układy odniesienia. Jeden z wyborów to

$$u_\mu \tau^{\mu\nu} = 0, \quad u_\mu \nu^\mu = 0. \quad (30)$$

Możemy na przykład zapisać najbardziej ogólne wyrażenia dotyczące tensora energii-pędu i prądów w przypadku, kiedy nie ma członów łamiących parzystość w naszym płynie,

$$\tau^{\mu\nu} = \eta P^{\mu\alpha} P^{\nu\beta} (\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha) + \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta\right) P^{\mu\nu} \partial \cdot u, \quad (31)$$

$$\nu^\mu = -\sigma T P^{\mu\nu} \partial_\nu \left(\frac{\mu}{T}\right), \quad (32)$$

$$\sigma^\mu = -\frac{\mu}{T} \nu^\mu, \quad (33)$$

gdzie  $P^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu$ . Pozostaje nam kilka nieokreślonych współczynników transportu, takich jak lepkości  $\eta$ ,  $\zeta$  oraz przewodnictwo  $\sigma$ . W przypadku bezmasowych cząstek chiralnych w czasoprzestrzeni czterowymiarowej obecność anomalii skutkuje transportem bez dyssypacji energii i prowadzi do nowych członów rozwinięcia i odpowiadającym im współczynników.

Chiralne fermiony przejawiają bezstratny transport w skończonej temperaturze  $T$  i potencjale chemicznym  $\mu$ , które są ściśle związane z chiralnymi anomaliami omówionymi powyżej. W szczególności policzone zostały kowariantne prądy, w przybliżeniu liniowej odpowiedzi [12–20]. Mają postać

$$\nu_a^\mu = \sigma_{ab}^B B_b^\mu + \sigma_a^V \omega^\mu, \quad (34)$$

$$\tau^{\mu\nu} = \sigma_a^{\epsilon,B} u^{(\mu} B_a^{\nu)} + \sigma^{\epsilon,V} u^{(\mu} \omega^{\nu)}, \quad (35)$$

gdzie  $A^{(\mu} C^{\nu)} = (A^\mu C^\nu + A^\nu C^\mu)/2$ . Pola magnetyczne i wirowe są odpowiednio zdefiniowane jako

$$B_a^\nu = \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} u_\nu \nabla_\rho A_\lambda^a, \quad \omega^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} u_\nu \nabla_\rho u_\lambda, \quad (36)$$

a  $u^\mu$  jest wektorem czasopodobnym o normie jednostkowej. Bezstratne prądy powodują (a) chiralne przewodnictwo magnetyczne ( $\sigma_{ab}^B$  i  $\sigma_a^{\epsilon,B}$ ) i (b) chiralne przewodnictwo wirowe ( $\sigma_a^V$  i  $\sigma^{\epsilon,V}$ ). W przypadku braku dynamicznych pól cechowania wielkości te są uniwersalne i określane wyłącznie przez anomalie. Są dane przez wzory

$$\sigma_{ab}^B = \frac{1}{4\pi^2} d_{abc} \mu^c, \quad (37)$$

$$\sigma_a^V = \sigma_a^{\epsilon,B} = \frac{1}{8\pi^2} d_{abc} \mu^b \mu^c + \frac{T^2}{24} b_a, \quad (38)$$

$$\sigma^{\epsilon,V} = \frac{1}{12\pi^2} d_{abc} \mu^a \mu^b \mu^c + \frac{T^2}{12} b_a \mu^a, \quad (39)$$

gdzie  $\mu^a = (\mu, \mu^i)$ , z  $\mu$  i  $\mu^i$  oznaczające odpowiednio regularne i zapachowe potencjały chemiczne. Ponadto  $d_{abc} = -\frac{1}{2}\text{Tr}[\{s_a, s_b\} s_c]$  i  $b_a = -\text{Tr}[s_a]$  nazywane są współczynnikami anomalii ustalonymi przez bazową grupę symetrii cechowania.

W 2 + 1 wymiarach anomalie nie są obecne, jednak w przypadku łamania parzystości w układzie izotropowym można zapisać dodatkowo człon z nowym współczynnikiem transportu znanym jako lepkość Halla

$$\tau_{\text{odd}}^{\mu\nu} = \frac{\eta H}{2} \left( \epsilon^{\mu\alpha\beta} u_\alpha \sigma_\beta^\nu + \epsilon^{\nu\alpha\beta} u_\alpha \sigma_\beta^\mu \right), \quad (40)$$

gdzie

$$\sigma^{\mu\nu} = P^{\mu\alpha} P^{\nu\beta} (\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha - P_{\alpha\beta} \partial_\sigma u^\sigma). \quad (41)$$

Jeśli dany układ łamie izotropię, można zapisać więcej wyrażeń w rozwinięciu hydrodynamicznym. Tak jest np. w fazie semi-Diraca. Ogólną strategią w badaniach transportu hydrodynamicznego w materiałach jest identyfikacja możliwych współczynników transportu i badanie ich wpływu na przepływy elektronów. W większości przypadków interesuje nas tzw. płyn Fermiego, gdzie  $\mu > k_B T$ . W tej granicy równania upraszczają się. Aby to zobaczyć, linearyzuje się równania wokół stanu równowagi

$$\mu = \mu_0, \quad u^i = 0, \quad T = T_0, \quad p = p_0, \quad (42)$$

w granicy  $T \rightarrow 0$ . Wynikające z tego równania mają postać

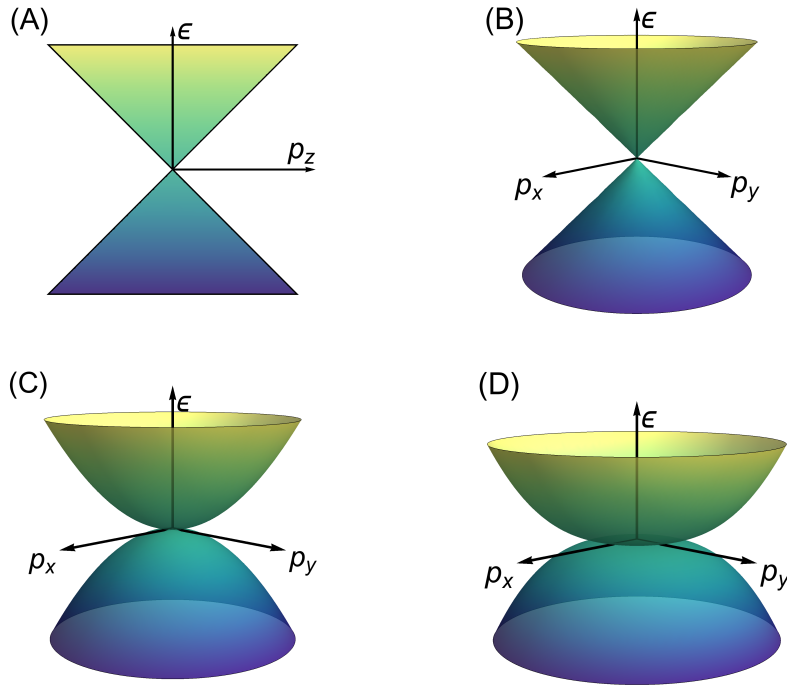
$$\nabla_i \delta u^i = 0, \quad (43)$$

$$\nabla_i \delta p - \eta \Delta \delta u_i = 0, \quad (44)$$

które są niczym innym jak nierelatywistycznymi równaniami Stokesa dla nieściśliwego płynu.

## Półmetale typu multi-Weyl

Ta sekcja zawiera podsumowanie wyników publikacji [1] i [2]. Główny nacisk kładziemy na materiały zwane półmetalami multi-Weyla, posiadającymi pary (anty-)monopoli z ładunkiem wielokrotnym ( $n = 2, 3, \dots$ ). Od strony teoretycznej półmetale multi-Weyla pozwalają wyjść poza relatywistyczny paradygmat fizyki wysokich energii, ponieważ dyspersja kwazicząstek dla dowolnego układu  $n > 1$  posiada naturalną anizotropię, jak pokazano na rys. (1). Po stronie eksperymentalnej różne układy materii skondensowanej oferują bezprecedensową możliwość zbadania fizyki półmetali multi-Weyla, charakteryzujących się parami (anty-)monopoli ładunku całkowitego  $n = 2, 3$  [21–24]. Punkty Weyla z  $n = 2$  (znane jako węzły podwójne Weyla) można w zasadzie znaleźć w  $\text{HgCr}_2$ ,  $\text{Se}_4$  [21, 22] i  $\text{SrSi}_2$  [23], a  $\text{A}(\text{MoX})_3$  (gdzie  $\text{A} = \text{Rb}, \text{Tl}$ ;  $\text{X} = \text{Te}$ ) może pomieścić punkty Weyla z  $n = 3$  (znane jako węzły potrójne Weyla)[25]. Wyższe ładunki monopoli są zabronione przez symetrie sieci krystalicznej w materiałach występujących w przyrodzie. Artykuły [1] i [2] podejmują próbę systematycznego badania właściwości transportu kwazicząstek występujących w półmetalach multi-Weyla. Praca [1] skupia się na półklasycznym podejściu w ramach teorii kinetycznej, natomiast artykuł [2] jest poświęcony analizie modeli mikroskopowych.



Rys. 1: Spekttra kwazicząstek w półmetalach multi-Weyla wzdłuż różnych kierunków o wysokiej symetrii, w bliskim sąsiedztwie węzłów Weyla, charakteryzujące się całkowitym ładunkiem monopola  $n > 0$ . Dyspersja zawsze skaluje się liniowo w  $p_z$  (panel A) dla każdego  $n$ . W płaszczyźnie  $p_x - p_y$  skalowanie ma postać  $E \sim |p_\perp|$  dla  $n = 1$  (panel B),  $E \sim |p_\perp|^2$  dla  $n = 2$  (panel C) oraz  $E \sim |p_\perp|^3$  dla  $n = 3$  (panel D), gdzie  $p_\perp = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ . Występuje symetria obrotowa w płaszczyźnie  $p_x - p_y$ . Pęd  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$  jest mierzony z węzła Weyla. Dla  $n > 1$  system traci niezmienniczość ze względu na transformacje Lorentza.

### Teoria kinetyczna

W ramach teorii kinetycznej badamy magnetotransport podłużny w trójwymiarowych półmetalach wielowarstwowych Weyla, składających się z pary (anty)-monopoli o dowolnym ładunku całkowitym  $n$ . W kryształach występujących w przyrodzie  $n = 1, 2$  i  $3$ . Zakładamy następującą hierarchię skal  $T \ll \sqrt{B} \ll \mu$ , gdzie  $T$  to temperatura,  $B$  to pole magnetyczne, a  $\mu$  to potencjał chemiczny mierzony w punkcie styczności dwóch pasm. Dla każdego  $n > 1$ , nawet jeśli rozkład leżącej krzywizny Berry'ego jest anizotropowy, odpowiadająca mu wewnętrzna składowa podłużnego magneto-przewodnictwa (longitudinal magnetoconductivity LMC), nosząca sygnaturę anomalii chiralnej, jest niewrażliwa na kierunek zewnętrznego pola magnetycznego  $B$  i rośnie jak  $B^2$ . Ponadto LMC skaluje się jak  $n^3$  z ładunkiem monopola. Przedstawiamy tu wyniki dla dwóch różnych scenariuszy, a mianowicie, gdy zderzenia między cząstkami w ośrodku Weyla są skutecznie opisane przez (a) jeden lub (b) dwa czasy rozpraszania (odpowiadające rozpraszaniu między minimami pasm elektronowych i wewnątrz pasma elektronowego tzw. doliny). O ile w poprzedniej sytuacji udział anomalii chiralnej w LMC jest nierozdzielnie związany z wkładem nieanomalnym, o tyle te dwa wkłady charakteryzują się różnymi skalami czasowymi w późniejszej konstrukcji. W szczególności, dla wystarczająco dużego



czasu rozpraszania między dolinami, LMC jest zdominowana przez wkład od anomalii chiralnej.

$$\sigma_{jj} = \tau_{inter} \frac{e^4 n^3 v \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{n})}{4\pi^{5/2} \Gamma(\frac{1}{n})} \left( \frac{\alpha_n}{\mu} \right)^{2/n} B^2, \quad (45)$$

gdzie  $\alpha_n$  dla  $n \geq 2$  ma wymiar (energia) $^{1-n}$ .  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  są odpowiednio prędkością Fermiego i odwrotną masą bezmasowych wzbudzeń kwazicząstek Weyla w płaszczyźnie  $xy$ .

### Modele sieciowe

Przedstawiamy proste modele w przybliżeniu ciasnego wiązania dla półmetali multi-Weyla na siatce sześcienniej. Najpierw przedstawiamy efektywne modele dwóch pasm dla takich systemów z  $n = 1, 2$  oraz 3 i argumentujemy, że dyskretna symetria rotacyjna  $C_4$  chroni takie wyżej wartościowe punkty stykania pasm walencyjnego i przewodnictwa wyższego rzędu w dwóch węzłach Weyla. Ponadto pokazujemy, że półmetale multi-Weyla z  $n = 2$  i 3 można skonstruować przez połączenie  $n$  kopii modelu sieciowego prostego półmetal Weyla (z  $n = 1$ ) przez perturbację zachowującą symetrię  $C_4$ . Przy niskich energiach, wynikające z takiej konstrukcji, struktury pasmowe są identyczne do tych uzyskanych z wcześniejszych modeli dwupasmowych.

Równoważność topologiczna między naszym sformulowaniem a wcześniejszymi modelami półmetali multi-Weyla jest następnie potwierdzona na podstawie tzw. "bulk-boundary correspondence" ucieleśnioną przez liczbę stanów na powierzchni materiału, tzw. luków Fermiego. Półmetal multi-Weyla, utworzony przez (anty-)monopol o ładunku  $n$ , prowadzi do  $n$  kopii luków Fermiego. Aby potwierdzić poprawność naszej konstrukcji, znajdujemy kopie luków Fermiego łączących dwa węzły Weyla z modeli dwupasmowych. Następnie powtarzamy rachunek dla modeli powstałych przez połączenie kopii prostych fermionów Weyla o wartości 2 i 3. Obserwujemy liczbę luków Fermiego o wartości 2 i 3 odpowiednio dla podwójnych i potrójnych półmetali Weyla, w zgodzie z modelami dwupasmowymi, potwierdzając poprawność naszego sformułowania Rys. (2). Konstruujemy model sieciowy dla półmetali multi-Weyla poprzez połączenie  $n$  kopii prostych półmetali Weyla zgodnie z

$$H_{n,\text{latt}}^{\text{coup}} = H_{\text{SW}} \otimes \text{Id}_{n \times n} + \Delta (\tau_x \otimes s_x^n + \tau_y \otimes s_y^n), \quad (46)$$

gdzie  $\boldsymbol{\tau} = (\tau_x, \tau_y, \tau_z)$  działa w przestrzeni pseudospinu i  $\mathbf{s}^n$  są generatorami reprezentacji spinu  $(n-1)/2$   $SU(2)$ , która działa w przestrzeni zapachu. Hamiltonian fermionu pojedynczego półmetal Weyla  $n = 1$  jest dany przez

$$H_{\text{SW}} = t [\sin(k_x)\tau_x + \sin(k_y)\tau_y] + [t_z \cos(k_z) + t_0(2 - \cos(k_x) - \cos(k_y))] \tau_z. \quad (47)$$

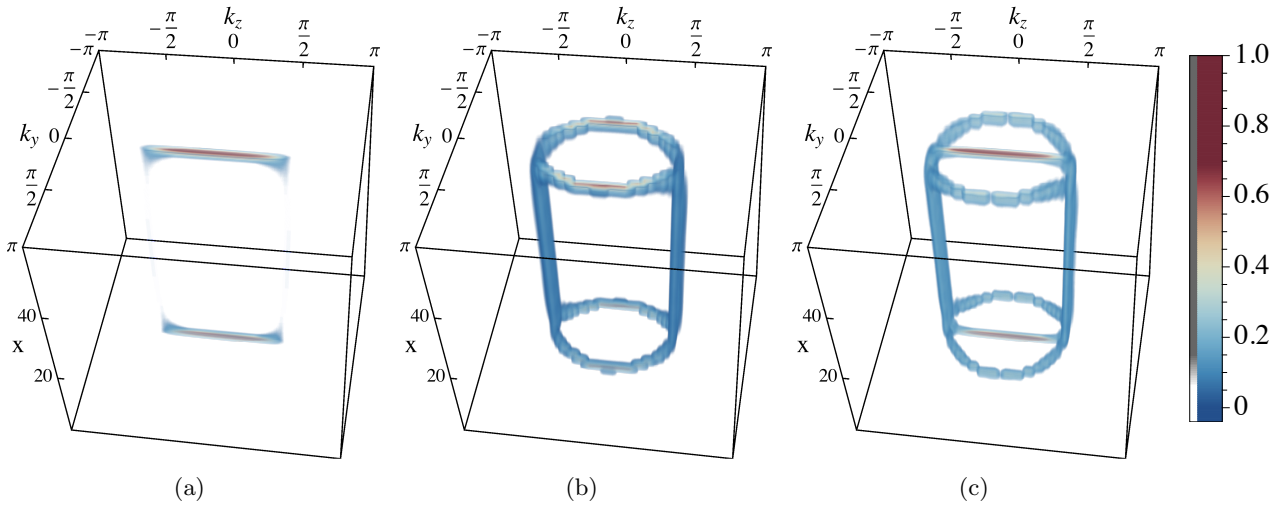
### Efektywna teoria pola

Konstruujemy minimalny efektywny model niskoenergetyczny dla półmetal multi-Weyla przy pomocy dwukomponentowych chiralnych (lewych lub prawych) fermionów. Lagrangian dla lewych chiralnych fermionów ( $\psi_L$ ) ma postać

$$\mathcal{L}_L = i\psi_L^\dagger \tau^\mu [\partial_\mu - i\Delta (\delta_\mu^x s_x + \delta_\mu^y s_y)] \psi_L, \quad (48)$$

gdzie  $\tau^\mu = (1, \boldsymbol{\tau})$ . W pracy używamy konwencji Einsteina sumowania dla powtarzających się indeksów. Powyższe wyrażenie pozwala nam skonstruować uogólniony formalizm dla półmetali multi-Weyla z nieabelową symetrią zapachu  $U(2)_L$ , w obecności nieabelowego zewnętrznego pola cechowania  $A_\mu^a s_a = \mathcal{A}_\mu^0 s_0 + \mathbb{A}_\mu^i s_i$

$$\mathcal{L}_L = i\psi_L^\dagger \tau^\mu [\partial_\mu - iA_\mu^a s_a] \psi_L, \quad (49)$$



Rys. 2: Topologicznie chronione stany powierzchniowe, tzw. łuki Fermiego dla (a) pojedynczego ( $n = 1$ ), (b) podwójnego ( $n = 2$ ) i (c) potrójnego ( $n = 3$ ) półmetal Weyla, otrzymane z odpowiednich modeli pasmowych. W diagonalizacji numerycznej implementujemy reprezentację mieszanego pędu (wzdłuż  $k_y$  i  $k_z$ ) i reprezentacji przestrzeni rzeczywistej lub Wanniera (wzdłuż  $x$ ). Liniowa wymiarowość układu wzdłuż  $x$  wynosi  $L = 60$ . W konsekwencji stany powierzchniowe łuku Fermiego są zlokalizowane na powierzchni górnej i dolnej. Ustalamy  $t = t_z = t_0 = 1$ . Tutaj pokazujemy kwadrat amplitudy stanów niskoenergetycznych w przedziale energii  $\Delta E = 0.1$  dla  $n = 1$ ,  $\Delta E = 0.08$  dla  $n = 2$  oraz  $\Delta E = 0.05$  dla  $n = 3$  w pobliżu energii zerowej. Liczba łuków Fermiego jest równa  $n$ , pokazując korespondencję "bulk-boundary" dla półmetali multi-Weyla. Ponadto łuki Fermiego z przeciwległych powierzchni (górną i dolną) łączą się przez masowe punkty Weyla (działające jako defekty, czyli monopole i antymonopole, w przestrzeni pędu), w których zanika pasmo wzbronione.

gdzie  $s_a = (s_0, s_i)$  z  $i = x, y, z$  to generatory  $U(1)_L \times SU(2)_L$ . W szczególności statyczne pole zewnętrzne prowadzące do nieliniowej dyspersji (w płaszczyźnie  $xy$ ) w systemach multi-Weyl można zapisać jako

$$A_\mu^a = \Delta(\delta_\mu^x \delta^{ax} + \delta_\mu^y \delta^{ay}). \quad (50)$$

Otrzymane widma kwazicząstek w pobliżu każdego węzła Weyla skalują się jak  $E \sim |p_z|$  i  $E \sim p_\perp^n$ , gdzie  $p_\perp = [p_x^2 + p_y^2]^{1/2}$ , ponieważ w naszej konstrukcji węzły Weyla są rozdzielone wzdłuż osi  $z$ . Analogicznie do modeli na sieciach pokazujemy również, że taką nieliniową dyspersję dla półmetali multi-Weyla można uzyskać przy niskich energiach, łącząc  $n$  kopii prostych fermionów Weyla z zaburzeniem  $\Delta$  zachowującym symetrię  $C_4$ . Mówiąc językiem efektywnej teorii pola, takie zaburzenie łamie niezmienniczość Lorentza i łączy się z prostymi fermionami Weyla jako nieabelowe stałe pole  $SU(2)$ . W konsekwencji, półmetal multi-Weyla zostaje zanurzony w stałym nieabelowym polu magnetycznym  $\mathbf{B}_3 \sim \Delta^2$ . Niemniej jednak, te dwie konstrukcje są równoważne, ponieważ dają identyczną dyspersję pasm przy niskich energiach i takie same niezmienniki topologiczne. Zaletą drugiego sformułowania jest to, że pozwala ono wyprowadzić efektywną teorię pola dla uogólnionych układów Weyla z  $n > 1$  w kategoriach prostych fermionów Weyla, podlegających zaburzeniom łamania symetrii Lorentza, co ogromnie upraszcza analizę i zapewnia przejrzystość wyników.

## Korespondencja AdS/CFT

Topologiczna natura anomalii w niektórych przypadkach sprawia, że transport wykazuje uniwersalność nawet wtedy, gdy niektóre symetrie są złamane [26, 27]. Dlatego mikroskopijne szczegóły różnych modeli stają się nieistotne, o ile anomalna struktura nie różni się między nimi [12, 14]. Z drugiej strony, obliczanie współczynników transportu wywołanych anomalią za pomocą standardowych technik kwantowej teorii pola może być nękane subtelnosciami i niejasnościami [28–34], które zostały rozwiązane i zrozumiane za pomocą technik holograficznych tzw. korespondencji AdS/CFT [35, 36]. Dlatego przy użyciu technik holograficznych przeanalizowaliśmy efekty parametru łamania symetrii  $\Delta$  na różne współczynniki transportu pochodzące od anomalii dla prostego modelu opisującego silnie oddziałujący półmetal typu multi-Weyl

$$S = - \int \text{Tr} \left[ \frac{1}{2n} \mathcal{F} \wedge \star \mathcal{F} + \frac{1}{2c(n)} G \wedge \star G + \lambda \left( A \wedge (dA)^2 + \frac{3}{2} A^3 \wedge dA + \frac{3}{5} A^5 \right) \right], \quad (51)$$

gdzie pola cechownia są zdefiniowana jako

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^0 s_0 \quad , \quad \mathbb{A} = \mathbb{A}^i s_i \quad , \quad A = \mathcal{A} + \mathbb{A}, \quad (52)$$

$s_a = (s_0, s_i)$  to macierz jednostkowa i generatory grupy  $SU(2)$ . Tensory natężenia pola mają postać

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} \quad , \quad G = d\mathbb{A} - i\mathbb{A}^2 \quad , \quad F = \mathcal{F} + G. \quad (53)$$

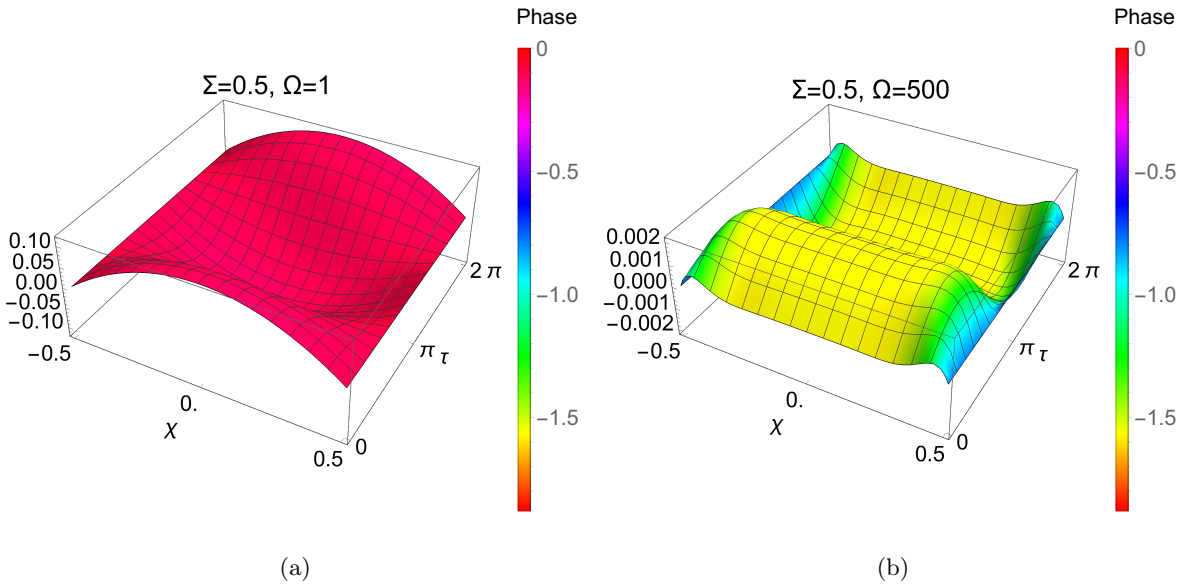
Pomijając detale korespondencji AdS/CFT model, który badamy, daje wyniki zgodne z przewidywaniami efektywnej teorii pola i pokazuje renormalizację prądu nieabelowego w podczerwieni. Głównymi rezultatami tej analizy jest to, że korespondencja AdS/CFT pokazuje występowanie transportu nieabelowego przy niskich energiach, otwierając możliwość obserwacji anomalii nieabelowych i brak renormalizacji transportu wywołanego anomalią abelową w półmetalach multi-Weyla.

Podsumowując, obecna dyskusja przedstawia kompleksowe badanie anomalii w półmetalach multi-Weyla łamiących symetrię Lorentza.

## Przepływ hydrodynamiczny w grafenie

Eksperymenty [37–44] sugerują, że w dostatecznie czystych materiałach elektrony mogą zachowywać się hydrodynamicznie. Jest to zgodne z ogólnym oczekiwaniem, że czyste układy fizyczne na dostatecznie dużej skali będą zachowywać się jak płyny. W rzeczywistości pierwsze próby opisanego zachowania hydrodynamicznego w układach elektronów sięgają czasów Ghurzego w latach sześćdziesiątych XX wieku [45, 46], który wprowadził elektronowy analog przepływu Hageda-Poiseuille’a. Eksperymentalne realizacje pomysłów Ghurzego były jednak dość trudne, ponieważ wysokie zjawiska związane z zanieczyszczeniami w większości materiałów stanowiły ogromną przeszkodę, a rozpraszanie elektronów na zanieczyszczeniach i fononach psuje zachowanie pędu leżące u podstaw reżimu hydrodynamicznego. Niemniej jednak, dzięki postępom w syntezie chemicznej, liczba potencjalnych materiałów, w których możemy obserwować zjawiska tego typu, wzrosła, obejmując heterostruktury dwuwymiarowe (Al, Ga)As, a ostatnio grafen [37–40, 42]. Wielkość próbki  $L$  musi być jednak na tyle mała, że średnia droga elektronów dla zderzeń ze sobą jest mniejsza niż dla zderzeń z zanieczyszczeniami i granicami próbki. W grafenie to oddzielenie skal wydaje się szczególnie wyraźne, co czyni go idealnym kandydatem do pomiaru sygnatur hydrodynamicznych kwazicząstek.

Zmotywowani tymi osiągnięciami, badamy hydrodynamikę przepływów elektronowych w  $2 + 1$  wymiarach. W pracy [3] skupiamy się na zjawiskach z zewnętrznym oscylującym polem, które posiadają unikalną charakterystykę hydrodynamiczną ze względu na pojawienie się warstw granicznych. W pracy [4] badana jest rola warunków brzegowych i geometrii brzegowej w przepływach elektronów.



Rys. 3: Profile przepływu  $u^*(\chi, \tau)$  (oś  $z$ ) dla różnych częstotliwości jazdy. Kolor przedstawia różnicę faz między oscylującym polem a prędkością płynu.

### Oscylujące przepływy

Analizujemy przepływy elektronów w długim dwuwymiarowym kanale o szerokości  $L$ , którego geometryczna prostota pozwala na analityczne rachunki. Odpowiedź zależy od lepkości  $\nu = \frac{\eta}{nm}$ , częstotliwości oscylacji pola zewnętrznego,  $\omega$  i ohmowego współczynnika nagrzewania  $\gamma$  poprzez bezwymiarową zmienną zespoloną  $\frac{L^2}{\nu}(i\omega + \gamma) = i\Omega + \Sigma$ . Przy małym  $\Omega$  odzyskujemy statyczne rozwiązanie, natomiast nowa charakterystyka układu występuje dla dużej wartości  $\Omega$  wraz z pojawieniem się warstwy granicznej. Obejmuje to przesunięcie miejsca maksymalnej prędkości przepływu od środka w kierunku krawędzi warstwy granicznej oraz bardziej reaktywny charakter odpowiedzi, z przesunięciem fazowym zmieniającym się w całym kanale. Skalowanie całkowitego optycznego przewodnictwa z  $L$  różni się między dwoma układami, podczas gdy jego zależność od częstotliwości przypomina przewodnictwo Drudego, nawet przy całkowitym braku ogrzewania ohmowego, gdzie nasze wyniki są stabilne. Aktualne szacunki współczynników transportu w grafenie sugerują, że warstwa graniczna powinna być dostępna eksperymentalnie. Ewolucja elektronów dana jest przez równania Stokes'a. W celu analizy różnych charakterystyk przepływu wygodnie jest używać postaci bezwymiarowej. W tym celu używamy transformacji

$$u = L\omega u^*, \quad t\omega = \tau, \quad x/L = \chi, \quad (54)$$

które dają bezwymiarową prędkość  $u^*$ , szerokość  $\chi$ , i czas  $\tau$  (mierzony w radianach),

$$\partial_\tau u^* - \frac{1}{\Omega} \partial_\chi^2 u^* + \Gamma u^* = \Phi e^{i\tau} \quad (55)$$

gdzie

$$\Phi = \frac{\mu|E|}{\rho\omega^2 L}, \quad \Omega = \frac{L^2\omega}{\nu}, \quad \Gamma = \gamma/\omega. \quad (56)$$

Pierwszy parametr opisuje skalę wymuszania, drugi jest związany z liczbą Reynoldsa w naszym elektronicznym przepływie, podczas gdy ten ostatni kontroluje współczynnik tarcia ohmowego.

Aby skonstruować rozwiązanie, rozkładamy zależność od częstotliwości w taki sposób, że jest to stosunek bezwymiarowy  $\Omega$ . To wprowadza nowe bezwymiarowe parametry

$$\Psi = \Phi\Omega^2 = \frac{\mu EL^3}{\rho\nu^2}, \quad \Sigma = \Gamma\Omega = \frac{L^2\gamma}{\nu}. \quad (57)$$

Funkcja prędkości zależy od współrzędnych przestrzennych i czasu. Teraz układ można rozwiązać analitycznie, a rozwiązanie ogólne, dla statycznego warunku początkowego  $u(\tau = 0)$ , przyjmuje postać nieskończonego szeregu. Jednak interesującą „późną”, okresową część można wydobyć w postaci zamkniętej, stosując następującą zamianę zmiennych:

$$u^* = \exp(i\tau)\mathcal{U}(\chi). \quad (58)$$

Powyższy ansatz daje następujące rozwiązanie Eq.(55):

$$u^* = e^{i\tau} \frac{\Psi}{\Omega(i\Omega + \Sigma)} \left( 1 - \frac{\cosh(\sqrt{i\Omega + \Sigma}\chi)}{\cosh(\sqrt{i\Omega + \Sigma}/2)} \right). \quad (59)$$

Mając to rozwiązanie, możemy wyodrębnić przewodnictwo

$$\sigma = C \left[ \frac{1}{\Sigma + i\Omega} - \frac{2 \tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Sigma + i\Omega}\right)}{(\Sigma + i\Omega)^{3/2}} \right], \quad (60)$$

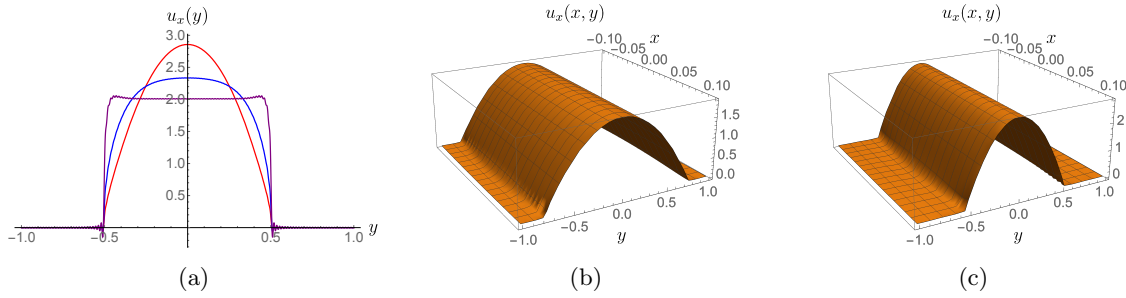
ze stałą wymiarową  $C = \frac{\mu^2 L^2}{\rho\nu}$ .

### Przepływy w kanałach z wypustkami

Jednym z ważnych aspektów hydrodynamiki jako teorii transportu, jest jej mezoskopowy charakter ze względu na fakt, że rozwiązania równań transportu są silnie zależne od warunków brzegowych. Tak zwane warunki brzegowe Maxwella parametryzują ogólną postać warunków brzegowych w hydrodynamice

$$u_i^t|_B = \xi n_j \left. \frac{\partial u_i^t}{\partial x_j} \right|_B. \quad (61)$$

Parametr  $\xi$  nazywa się długością poślizgu. Ten warunek brzegowy obejmuje prędkość styczną  $u^t$  na granicy przepływu i jej normalną pochodną, w odniesieniu do wektora wskazującego do wewnątrz  $n_j$ . Chociaż zwykle pomija się skutki poślizgu w przepływach makroskopowych, ze względu na szorstkość brzegów, efekty takie mogą stać się ważne w hydrodynamice elektronowej. Ponadto wartość parametru poślizgu wymaga szczegółowej wiedzy na temat podstawowej dynamiki mikroskopowej. W rezultacie można albo przeprowadzić analizę mikroskopową efektów poślizgu, albo opracować mechanizm, który sprawi, że efekty poślizgu będą znikome. Tutaj rozwijamy to drugie podejście i proponujemy spowolnienie przepływu płynu w pobliżu ścian, poprzez wprowadzenie szeregu małych wypustek na brzegu. Mechanizm gwarantujący skuteczność tej metody nawiązuje do pomysłu Moffatta [47], który zauważył, że arbitralny przepływ lepki na zewnątrz wnęki będzie napędzał przepływ wirowy do środka (patrz także [48–50] prezentujące ten efekt w różnych konfiguracjach). Później Wang [51] skonstruował rozwiązanie dla przepływu Stokesa bez poślizgu w kanale z prostopadłymi barierami równomiernie rozmieszczonymi na brzegach kanału. Zauważył wiry Moffatta pojawiające się we wnękach poniżej krytycznej odległości między barierami. Co najważniejsze, indukowane wiry są zwykle małe, a prędkość przepływu wokół takiego wiru jest o rząd wielkości mniejsza niż w środku kanału. Zatem, ogólnie rzecz biorąc, płyn wewnątrz wnęki przepływa ze stosunkowo małą prędkością w porównaniu z przepływem w środku kanału, naśladując w ten sposób brzeg bez poślizgu. Aby pozytywnie zweryfikować tę propozycję, konstruujemy rozwiązanie przepływowe w kanale z wypustkami na brzegu. Prezentujemy je na Rys. (4).



Rys. 4: (a) Prędkość przepływu zmniejsza się na krawędzi pojedynczej komórki, dla różnych współczynników ohmowych. Te trzy wykresy odpowiadają warunkom brzegowym bez poślizgu. (b) i (c) Profil prędkości przepływu wzdłuż pojedynczej komórki dla warunków brzegowych bez naprężeń dla różnych długości i rozstawów wypustek. Płyn efektywnie jest nieruchomy ze względu na obecność przeszkód granicznych, potwierdzając w ten sposób proponowany mechanizm.

### Zakrzywione brzegi

Właściwości brzegu silnie wpływają na zachowanie płynu w kontakcie z nim. Skupiamy się teraz na wpływie krzywizny ściany na efektywny parametr poślizgu. Ilościowe zrozumienie wpływu krzywizny w formie efektywnej wartości parametru poślizgu w kontekście nadciekłości zostało podane przez Einzela, Panzera i Liu [52]:

$$\xi_{\text{eff}} = \left( \frac{1}{\xi_0} - \frac{1}{R} \right)^{-1}, \quad (62)$$

gdzie  $R$  jest promieniem krzywizny mierzonym w taki sposób, że jest dodatni, jeśli domena płynu jest wypukła, a ujemny w przeciwnym razie. Tutaj rozważamy efekty krzywizny w hydrodynamice elektronowej. Analizujemy najpierw przepływ w prostym kanale, a później złącze w kształcie koła. Najbardziej ogólna sytuacja pozwala na różne promienie krzywizny na dwóch brzegach kanału:

$$u_i^t|_{B_1} = \xi_1 n_j \frac{\partial u_i^t}{\partial x_j} \Big|_{B_1}, \quad (63)$$

$$u_i^t|_{B_2} = \xi_2 n_j \frac{\partial u_i^t}{\partial x_j} \Big|_{B_2}, \quad (64)$$

gdzie granice znajdują się w przedziale  $\{-w/2, w/2\}$ . Powyższe warunki brzegowe prowadzą do następującego profilu prędkości

$$u_x(y) = \frac{1}{8\eta(w + \xi_1 + \xi_2)} [w^3 - 4wy(y + \xi_1) + 4w(y + 2\xi_1)\xi_2 + 3w^2(\xi_1 + \xi_2) - 4y^2(\xi_1 + \xi_2)] \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (65)$$

Całkując to wyrażenie otrzymujemy całkowity prąd

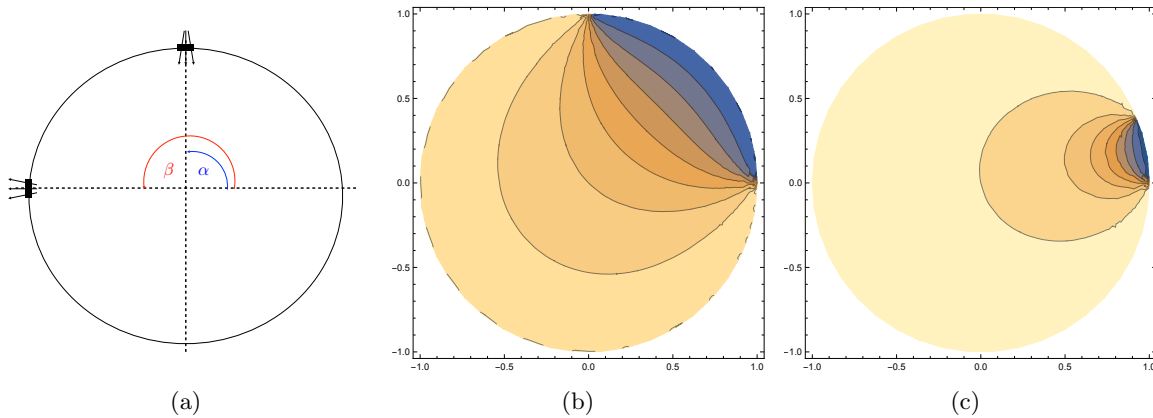
$$I = \int_{-w/2}^{w/2} dy u_x(y) = \frac{w^2[w^2 + 12\xi_1\xi_2 + 4w(\xi_1 + \xi_2)]}{8\eta(w + \xi_1 + \xi_2)} \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (66)$$

Brzegi mogą modyfikować efektywny poślizg. Oprócz małej efektywnej krzywizny rozważanej powyżej, interesują nas przypadki, w których promień krzywizny jest mniejszy niż rozmiar systemu. Ogólnie rzecz biorąc, aby znaleźć geometryczny wkład w poślizg, rozwiązania poza najprostszymi konfiguracjami, komplikują się, a wynik nie jest łatwy do interpretacji. W celu uproszczenia analizy studiujemy przepływ przez złącze kołowe o wysokiej symetrii. W takim układzie jedyną geometryczną

skalą długości jest promień okręgu, który jest jednocześnie promieniem krzywizny brzegu. Wysoki stopień symetrii pozwala na rozdzielenie zmiennych i rozkład Fouriera zależności kątowej.

Układ ten był również badany w przypadku transportu balistycznego, zarówno eksperymentalnie, jak i teoretycznie [53–55]. Uderzającą cechą, która pojawia się w przepływie balistycznym, jest to, że przewodnictwo, jako funkcja pędu Fermiego, wykazuje charakterystyczne nieregularne fluktuacje. Przepływ hydrodynamiczny przez ograniczoną geometrię jest gładki dzięki interakcjom elektron-elektron. W rezultacie złącza mają dużą przewagę nad kanałami, a mianowicie, że stosunkowo prosta analiza teoretyczna może być możliwa zarówno w przypadku balistycznym, jak i hydrodynamicznym, uwypuklając cechy charakterystyczne obu układów. Rozwiązanie równań Stokes’a przez kontakt w kształcie dysku można skonstruować jako szeregowe rozwinięcie funkcji strumienia [56–60].

Aby zilustrować przepływ płynu elektronowego przez okrągłe złącze, przedstawiamy funkcję strumienia dla dwóch konfiguracji kontaktów (Rys. (5)). W jednym przypadku styki są oddzielone o kąt  $\pi/2$  w drugiej o  $\pi/8$ . Zauważmy, że poprzednia konfiguracja była badana balistycznie, zarówno półklasycznie [55], jak i kwantowo-mechanicznie [54]. Widać, że profil przepływu hydrodynamicznego jest gładki. Co więcej, im bliżej siebie są styki, tym mniej obszary oddalone od nich uczestniczą w przepływie.



Rys. 5: (a) Nasza próbka ma kształt dysku z dwoma wąskimi kontaktami o szerokości  $\epsilon$ . Współrzędna promieniowa ma zakres  $r \in (0, 1]$ . (b) Linie przepływu (streamlines) w okrągłej wnęce między dwoma stykami oddzielenymi o kąt  $\pi/2$  ( $\alpha = 0$ ,  $\beta = \pi/2$ ). (c) Przepływ między dwoma kontaktami oddzielenymi o kąt  $\pi/8$  ( $\alpha = 0$ ,  $\beta = \pi/8$ ).

## Półmetale typu semi-Dirac

Ta sekcja zawiera podsumowanie artykułów [5] i [6]. Jest poświęcona nowej klasie dwuwymiarowych anizotropowych półmetali Diraca. Wiadomo, że takie półmetale wykazują specjalną fazę, mianowicie krytyczną fazę semi-Diraca, która charakteryzuje się pasmami elektronowymi stykającymi się w dyskretnym zbiorze węzłów, wokół których pasma rozpraszają się liniowo w jednym kierunku i kwadratowo wzdłuż kierunku ortogonalnego. Niskoenergetyczny hamiltonian opisujący takie materiały na postać

$$\mathcal{H} = \mathbf{d}(\mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (67)$$

gdzie  $\boldsymbol{\sigma}$ 's oznaczają macierze Pauliego.  $\mathbf{d}(\mathbf{p}) = (\frac{p_x^2}{2m_0} - \Delta, p_y, 0)$  gdzie  $m_0$  to masa a  $\Delta$  parametr charakteryzujący przerwę między pasmami. Taki hamiltonian pojawia się jako opis heterostruktur  $\text{TiO}_2/\text{VO}_2$  [61], soli organicznych pod ciśnieniem  $(\text{BEDT-TTF})_2\text{I}_3$  [62], fotonowych metamateriałów [63]. Co więcej, taką dyspersję zaobserwowano eksperymentalnie w sieciach optycznych [64]. Naszym celem

jest zrozumienie transportu topologicznego tej krytycznej fazy. Problem ten można rozwiązać albo poprzez umieszczenie układu na torusie i obliczając numerycznie udział fazy Berry'ego w przestrzeni odkształceń lub przez efektywne działanie dla niskich energii używając formalizmu liniowej odpowiedzi.

### Faza Berry'ego

W celu analizy transportu dla fazy semi-Diraca stosujemy uogólniony model relatywistyczny, który wykazuje trzy odrębne fazy, w tym krytyczną fazę semi-Diraca jako funkcję parametru anizotropowego. Opisując system na torusie, znajdujemy poziomy Landaua i odpowiadające im funkcje falowe. Następnie wyprowadzamy wzór na krzywiznę Berry'ego za pomocą tych funkcji falowych. Zaczynamy od niskoenergetycznego hamiltonianu anizotropowego półmetal Diraca w dwóch wymiarach przestrzennych

$$H = \gamma^0(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\gamma} \gamma^5 + m_0). \quad (68)$$

Tutaj  $\gamma^\mu = (\tau^x, -i\tau^y \boldsymbol{\sigma})$ ,  $\gamma^5 = \tau^z$  są  $4 \times 4$  macierzami Diraca spełniającymi  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbf{1}_4$ , gdzie  $\eta = (1, -1, -1, -1)$ ;  $\tau$  i  $\sigma$ 's są macierzami Pauliego odpowiednio w przestrzeni spinowej i pseudo-spinowej,  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, 0)$ ;  $m_0$  oznacza przerwę masową oraz  $\mathbf{b} = (b, 0, 0)$  to parametr, który wprowadza anizotropię w hamiltonianie.

Spektrum energetyczne równania (68) ma postać

$$E(p_x, p_y) = r \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + b^2 + m_0^2 + 2s \sqrt{b^2(m_0^2 + p_x^2)}}, \quad (69)$$

gdzie  $r, s = \pm$ . Zauważmy, że  $r = \pm 1, s = -1$  odpowiada odpowiednio najniższemu przewodnictwu i najwyższemu pasmu walencyjnemu. Rywalizacja między przerwą masową  $m_0$  a anizotropią  $b$  prowadzi do trzech odrębnych faz. Dla  $b > m_0$  dyspersja jest bez przerw masowych z dwoma węzłami Diraca w  $(\pm \sqrt{b^2 - m_0^2}, 0, 0)$ , podczas gdy  $b < m_0$  odpowiada izolatorowi z przerwą masową. Z drugiej strony, dla  $b = m_0$ , otrzymujemy fazę krytyczną, w której dwa węzły Diraca łączą się i prowadzą do fazy semi-Diraca. Zatem zmiana  $b/m_0$  zmienia topologię powierzchni Fermiego, prowadząc do tzw. przejścia Lifshitz.

Najpierw określamy spektrum Landaua i odpowiadające mu funkcje falowe równania (68) na torusie. Metryka na torusie jest określona przez

$$ds^2 = \frac{V}{\tau_2} (dx^2 + 2\tau_1 dx dy + |\tau|^2 dy^2), \quad (70)$$

gdzie  $\tau = \tau_1 + i\tau_2$  to parametr modularny a  $V$  jest objętością torusa. Otrzymujemy hamiltonian Landaua w obecności stałego prostopadłego pola magnetycznego  $B = \epsilon^{ij} \partial_i A_j$

$$H_L = \gamma^0 (\Pi_i e_a^i \gamma^a + m_0 + b_i e_a^i \gamma^a \gamma^5), \quad (71)$$

gdzie  $a, i, j \in (1, 2)$ ,  $\Pi_i = p_i - eA_i$ , i  $e_a^i$  to wektory bazowe  $g^{ij} = e_a^i \delta^{ab} e_b^j$ . W tej konstrukcji pędy kinematyczne  $\Pi_i$  spełniają relacje komutacji  $[\Pi_i, \Pi_j] = i\epsilon_{ij} l_B^{-2}$ , gdzie  $l_B = \hbar/(eB)$  oznacza długość magnetyczną.

Aby zdiagnozować hamiltonian wprowadzamy operatory kreacji i anihilacji  $\mathbf{a}_d = a + d$ ,  $\mathbf{a}_d^\dagger = a^\dagger + \bar{d}$ , gdzie  $a = i(V\tau_2)^{-1/2}(\Pi_y - \tau\Pi_x)/\omega$ ,  $d = -i(V\tau_2)^{-1/2}\tau b/\omega$  i  $\omega = \sqrt{2}l_B^{-1}$ . Dzięki temu możemy skonstruować  $|n, d, \tau\rangle$ , spełniające

$$\mathbf{a}_d^\dagger \mathbf{a}_d |n, d, \tau\rangle = n |n, d, \tau\rangle. \quad (72)$$

Mając bazę, możemy przeprowadzić rozwinięcie poziomów własnych Landaua

$$|\psi\rangle = \sum_n \mathbf{c}_n |n, d, \tau\rangle, \quad (73)$$



gdzie  $\mathbf{c}_n$  jest zbiorem czterech składowych stałego fermionu, zależnym tylko od wartości  $\tau$  i  $V$ . W tym miejscu diagonalizacja oznacza problem znalezienia wartości własnych nieskończonej macierzy

$$H_{nm}\mathbf{c}_m = \epsilon_n\mathbf{c}_n, \quad \text{gdzie} \quad H_{nm} = \langle n, d, \tau | H_L | m, d, \tau \rangle. \quad (74)$$

Całkowitą krzywiznę Berry'ego można otrzymać jako wariację parametru modularnego i objętości w hamiltonianie

$$\mathbf{\Omega} = \text{id} \left( \mathbf{c}_n^\dagger \cdot d\mathbf{c}_n \right) + d \left( \mathbf{c}_n^\dagger \cdot \mathbf{c}_m \right) \wedge \mathcal{A}^{nm} + \mathbf{c}_n^\dagger \cdot \mathbf{c}_m \mathcal{F}^{nm}. \quad (75)$$

W powyższym wyrażeniu używamy konwencji sumacyjnej Einsteina w powtarzających się indeksach. Pochodna zewnętrzna działa na przestrzeń rozpiętą przez parametry  $\tau$  i  $V$ .  $\mathcal{A}$  i  $\mathcal{F}$  na niezdeformowanym torusie  $\tau = i$  dane są przez

$$\mathcal{A}^{mn} = -\frac{1}{4} \left( \sqrt{m(m-1)}\delta_{m,n-2}d\bar{\tau} + \sqrt{(m+1)(m+2)}\delta_{m,n+2}d\tau \right), \quad (76)$$

$$\mathcal{F}^{mn} = -\frac{i}{4} \left( m + \frac{1}{2} \right) \delta_{m,n} d\tau \wedge d\bar{\tau}. \quad (77)$$

Dla  $m_0 = 0$ , pierwszy i drugi człon wyrażenia (75) znika ponieważ  $\mathbf{c}_n$  są niezależne od  $V$  i  $\tau$ . Jedyna nieznikająca część daje wkład do krzywizny Berry'ego dla  $\tau = i$

$$\mathbf{\Omega}^{pq} = -\frac{i}{4} \left( n + \frac{1}{2}\delta_{n,0} \right) d\tau \wedge d\bar{\tau} \delta^{pq}, \quad (78)$$

gdzie  $p, q = 1, 2$  oznaczają zdegenerowaną podprzestrzeń odpowiadającą podsystemom układu.  $\mathbf{\Omega}$  jest diagonalna w tej podprzestrzeni. W ten sposób nasze wyrażenie redukuje się do przypadku izotropowego dając krzywiznę Berry'ego dla izotropowych układów Diraca.

Podobnie  $b = 0$  dla zerowego poziomu Landaua,  $\mathbf{c}_n \sim \delta_{n,0}$ , prowadząc do  $\mathbf{\Omega} = -\frac{i}{8} \frac{d\tau \wedge d\bar{\tau}}{\tau_2}$ . Dla niezerowego  $b$  i  $m_0$ ,  $\mathbf{c}_n \neq \delta_{n,0}$ . W ten sposób możemy mieć niezerowy wkład z pierwszego i drugiego członu równania 75, co z kolei może prowadzić do więcej niż jednego współczynnika Halla.

Pokażemy teraz, że niezerowa krzywizna Berry'ego prowadzi do łamiącej parzystości transportu bez dyssypacji poprzez powiązanie elementów  $\mathbf{\Omega}$  z tensorem lepkości. Anizotropia w układzie Diraca prowadzi do dodatkowych współczynników lepkości Halla. Współczynniki transportu łamiące parzystość wprowadzamy poprzez relacje konstytutywne. Średni tensor naprężenia rozwijamy w czasowych pochodnych odkształcenia

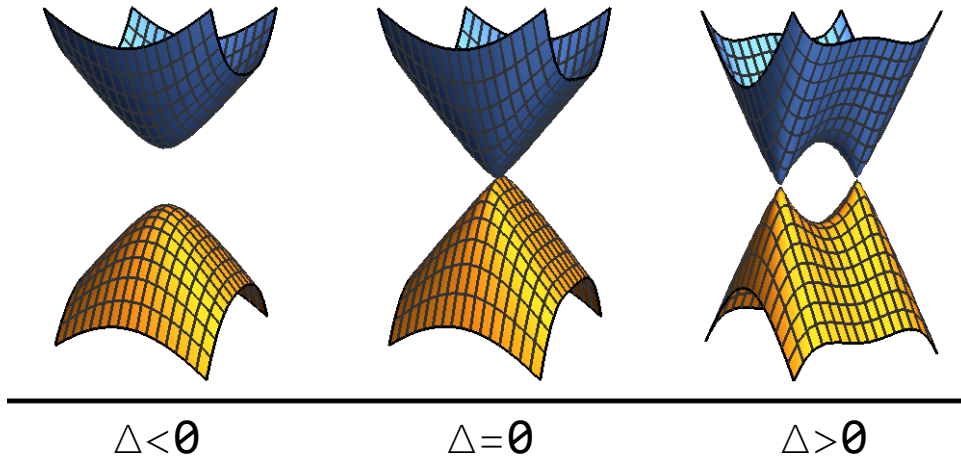
$$T_{ij} = -\sum_{kl} \lambda_{ijkl} u_{kl} - \sum_{kl} \eta_{ijkl} \frac{\partial u_{kl}}{\partial t} + \dots \quad (79)$$

gdzie odkształcenie jest wyrażone w postaci wektora deformacji  $u_{kl} = \partial_k u_l + \partial_l u_k$ . Pierwszy człon rozwinięcia  $\lambda_{ijkl}$  odpowiada uogólnionemu tensorowi elastyczności Hooke's, drugi człon  $\eta_{ijkl}$  to tensor lepkości. W ogólności  $\eta$  można podzielić na  $\eta = \eta_S + \eta_A$ , gdzie  $\eta_S$  jest symetryczny względem zamiany pierwszej pary indeksów ( $ij$ ) z ( $kl$ ) natomiast  $\eta_A$  jest antysymetryczny jeśli zamienimy ( $ij$ ) z ( $kl$ ). Ponieważ część antysymetryczna łamie parzystość przy odbiciach czasowych,  $\eta_A \neq 0$  tylko wtedy, gdy ta symetria jest złamana. Ponieważ antysymetryczna część tensora lepkości nie dyssypuje energii, może być ona niezerowa w temperaturze zera bezwzględnego. Poddanie systemu odkształceniu jest równoznaczne z deformacją metryki przestrzeni w rozwinięciu liniowym

$$g_{ij} = \delta_{ij} + u_{ij}, \quad (80)$$

gdzie  $\delta_{ij}$  to niezdeformowana metryka natomiast  $u_{ij}$  to tensor odkształceń. Ta interpretacja pozwala na powiązanie szybkości odkształcania z parametrami  $\tau$  i  $V$

$$du_{11} = \frac{1}{2} \left( \frac{dV}{V} - \frac{d\tau_2}{\tau_2} \right), \quad du_{22} = \frac{1}{2} \left( \frac{dV}{V} + \frac{d\tau_2}{\tau_2} \right), \quad du_{12} = \frac{1}{2} \frac{d\tau_1}{\tau_2}. \quad (81)$$



Rys. 6: Spektrum hamiltonianu.  $\Delta = 0$  odpowiada fazie krytycznej semi-Diraca.

Z drugiej strony krzywizna Berry'ego ma ogólną postać

$$\Omega = \Omega_{\tau_1 \tau_2} d\tau_1 \wedge d\tau_2 + \Omega_{\tau_1 V} d\tau_1 \wedge dV + \Omega_{\tau_2 V} d\tau_2 \wedge dV. \quad (82)$$

Korzystając z tych zależności, wyodrębniamy lepkości Halla

$$\eta_{xxxy} = \frac{B}{2\pi N} (\tau_2^2 \Omega_{\tau_1 \tau_2}) - \tau_2 \Omega_{\tau_1 V} \quad (83)$$

$$\eta_{xyyy} = \frac{B}{2\pi N} (\tau_2^2 \Omega_{\tau_1 \tau_2}) + \tau_2 \Omega_{\tau_1 V} \quad (84)$$

$$\eta_{xxyy} = -\tau_2 \Omega_{\tau_2 V}, \quad (85)$$

gdzie  $N$  odpowiada degeneracji magnetycznej.

### Efektywne działanie przy niskich energiach

W tej sekcji wprowadzamy technikę efektywnych działań niskoenergetycznych dla faz semi-Diraca. Skuteczność w generowaniu przewidywań fizycznych efektywnych działań wynika z faktu, że opierają się one głównie na symetriach danego układu, parametryzując naszą nieznaną mikroskopijnych szczegółów układu poprzez zbiór współczynników. Chociaż początkowo stosowano je do faz z dużymi grupami symetrii, takich jak symetrie Galileusza czy Poincaré, w ostatnich latach stosuje się je do zrozumienia fizyki stanów o bardziej egzotycznych lub zredukowanych grupach symetrii.

W kwantowym stanie Halla fermiony zyskują masę przez pole magnetyczne i mogą zostać wyciąkowane. Wynikające z tej procedury efektywne działanie będzie lokalnym funkcjonałem źródeł zewnętrznych, które musi być niezmiennie ze względu na lokalne przekształcenia symetrii ciągłych i dyskretnych symetrii działania fermionowego, w szczególności  $PT$ . Niezmienniczość lokalną można sformułować przy użyciu kowariantnych operatorów, których używamy do skonstruowania efektywnego działania. Następnie stosuje się dyskretne symetrie, aby określić, które z tych członów są dozwolone. Po ich zidentyfikowaniu strategia polega na zorganizowaniu ich w rozwinięcie w pochodnych, przy założeniu, że pola te powoli zmieniają się przy zmianie charakterystycznej długości i skali czasowej problemu. Biorąc to pod uwagę, można zapisać wszystkie możliwe wyrazy do wymaganego rzędu w rozwinięciu i uwzględnić kombinacje, które respektują symetrie dyskretne.

Pracujemy z dwupasmowym hamiltonianem, który sprzęgamy kowariantnie z geometrią tła za pomocą wektora  $l^a = (0, 0, 1)$ , który kontroluje anizotropię

$$S = \int d^3x \left( i\bar{\psi}\gamma^a \mathcal{P}_a^b \partial_b \psi - \bar{\psi} M[\Delta, l^a \partial_a] \psi \right), \quad (86)$$

gdzie  $\gamma^a = (\sigma_3, -i\sigma_2, i\sigma_1)$  są macierzami Diraca w 2+1 wymiarach. W powyższym działaniu występuje efektywny człon masowy zależny od pędu, tj.  $M(\Delta, l^a \partial_a) = \Delta - \frac{1}{2m}(l^a \partial_a)^2$ . Dlatego wprowadzamy projektor poprzeczny

$$\mathcal{P}_a^b = \delta_a^b - l_a l^b, \quad l^a l_a = 1. \quad (87)$$

$l^a$  łamie  $SO(2, 1)$  symetrię Lorentza dla relatywistycznych fermionów do  $SO(1, 1) \times C_2$ , gdzie  $SO(1, 1)$  odpowiada pchnięciom w płaszczyźnie poprzecznej do  $l^a$  oraz  $C_2$  odpowiada obrotom o  $180^\circ$  na płaszczyźnie przestrzennej zawierającej wektor  $l^a$ .

Wykorzystujemy opracowany do tej pory formalizm do badania odpowiedzi prądu stałego na pole elektryczne, odkształcenie i wirowość. Wśród tych odpowiedzi znajdują się odpowiedzi topologiczne, których znaczenie wynika z faktu, że często opisują uniwersalne właściwości stanów kwantowych. Są one niezbędne do lepszego zrozumienia silnie sprzężonych ułamkowych stanów Halla.

Definiujemy poprzeczne i podłużne składowe tensora naprężeń na podstawie wariacji efektywnego działania ze względu na zmiany wektorów bazowych i pól cechowania

$$\delta S = - \int d^3x \sqrt{-g} (\tau_\mu{}^a \delta e_a{}^\mu + j^\mu \delta A_\mu) \quad (88)$$

Najprostszą z tych odpowiedzi jest przewodnictwo Halla. Wynika ono z członu Chern-Simonsa, który jest taki sam jak w przypadku izotropowym. Następnie rozważamy odpowiedź tensora naprężenia na zastosowane odkształcenia. W naszym sformułowaniu geometrycznym będą one odpowiadać fluktuacjom metryki. Takie fluktuacje można łatwo osadzić w naszej konstrukcji jako niezależne zmiany wektorów bazowych. Druga różniczka działania po wektorach bazowych daje dwupunktowe funkcje naprężenie-naprężenie, z których można wyodrębnić współczynniki transportu za pomocą wzorów Kubo dla tensora lepkości używając projektorów [65]

$$\eta_{ab}^{\mu\nu} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{i}{\omega} \langle \tau_a^\mu \tau_b^\nu \rangle. \quad (89)$$

Poniżej pokazujemy, że stany anizotropowe zachowujące symetrię  $PT$  mogą mieć dwa niezależne wkłady Halla do tensora lepkości odpowiadającego takim odpowiedziom. Pochodne wektorów bazowych naturalnie obejmują nieizotropowe i niesymetryczne odpowiedzi lepkościowe. Przed wyodrębnieniem współczynników zauważamy, że odwrócony w czasie tensor nieparzystej lepkości w teorii nieziennej  $PT$  można rozłożyć w następujący sposób

$$\eta^{ijkl} = 8\eta_{\text{iso}}^{ijkl} + 8\eta_{\text{nem}}^{ijkl} + 8\eta_{\text{vor}}^{ijkl}, \quad (90)$$

gdzie używamy projektorów zdefiniowanych jako

$$\begin{aligned} P_{\text{iso}}^{ijkl} &= -\frac{1}{16} \left( \epsilon^{ik} \delta^{jl} + (i \leftrightarrow j) + (k \leftrightarrow l) + (ik \leftrightarrow jl) \right), \\ P_{\text{nem}}^{ijkl} &= \frac{1}{8} l^{(i} \tilde{l}^{j)} \delta^{lk} - (ij \leftrightarrow kl), \\ P_{\text{vor}}^{ijkl} &= \frac{1}{8} l^{[i} \tilde{l}^{j]} \delta^{lk} - (ij \leftrightarrow kl), \end{aligned} \quad (91)$$

gdzie  $\tilde{l}^i = \epsilon^{ij} l_j$ . Korzystając z powyższych wzorów, możemy wyodrębnić odpowiedzi Halla w fazie semi-Diraca. Pierwszy współczynnik to modyfikacja wkładu izotropowego. Następnie możemy wyróżnić

lepkość Halla opisująca odpowiedź na symetryczne odkształcenia, obecną w konsekwencji anizotropii sytemu. Te właściwości są charakterystyczne dla fazy nematycznej, dlatego współczynnik transportu nazwaliśmy lepkością nematyczną. Nie znajdujemy żadnego innego anizotropowego wkładu w symetryczną część tensora lepkości w fazie semi-Diraca, chociaż argumenty oparte na ciągłej grupie symetrii nie zabraniają trzeciego współczynnika. Na koniec identyfikujemy, dotychczas niezbadaną, lepkość wirową, która pojawia się w fazie semi-Diraca. Ponadto możemy zauważyć, że ten człon jest również odpowiedzialny za odpowiedź w antysymetrycznym tensorze naprężenia ze względu na symetryczne odkształcenia.

## Podsumowanie

Rezultaty przedstawione w serii publikacji będących przedmiotem tego osiągnięcia badawczego są zgodne z następującymi długoterminowymi celami badawczymi:

- Odkrywanie, projektowanie i wykorzystywanie nowatorskich elektronowych materiałów kwantowych.
- Wykorzystanie pojęć z fizyki wysokich energii do badań materii kwantowej.
- Kontrolowanie i manipulowanie płynami w nanoskali, w celu opracowania nowych nanotechnologii.

W ramach programu badawczego opracowałem efektywną teorię pola i modele na sieciach opisujące półmetale multi-Weyla [2] oraz badałem ich dynamikę półklasyczną [1]. Skonstruowałem także efektywną teorię pola faz semi-Diraca i przeanalizowałem ich topologiczne zjawiska transportu [5]. Zbadałem też mechanikę płynów kwazicząstek w skali nano i zaproponowałem inżynierię warunków brzegowych w tych układach [4] oraz wpływ zewnętrznego pola oscylującego, który prowadzi do zjawisk warstwy granicznej [3].

## 5. Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej.

Moje zainteresowania naukowe obejmują różne dziedziny fizyki wysokich energii i materii skondensowanej. Tutaj omawiam kierunki, które nie są przedmiotem sekcji 4.

### Przed uzyskaniem doktoratu

Podczas moich studiów doktoranckich skupiałem się głównie na aspektach fizyki plazmy w supersymetrycznej teorii Yanga-Millsa  $\mathcal{N} = 4$ . We współpracy z J. Große, R. Janikiem [66], rozważałem wpływ rozszerzającej się plazmy na próbną cząstkę, w ramach korespondencji AdS/CFT, określając zależne od czasu zanurzenia D7-brany w holograficznym modelu rozszerzającej się lepkiej plazmy. Obliczyliśmy widma chiralnego kondensatu i mezonów, z uwzględnieniem współczynnika lepkości. Znaleźliśmy zgodność z oczekiwaniami statycznej czarnej dziury. Dla widm mezonów zaproponowaliśmy rachunek zgodny z przybliżeniem adiabatycznym. Odkryliśmy nowe wkłady dla mezonów wektorowych od członów lepkości. We współpracy z M. P. Hellerem, R. Loganayagamem, M. Spalińskim, S. E. Vázquezem [67] skonstruowałem grawitacyjną teorię dualną w ramach korespondencji AdS/CFT, opisującą przepływ w plazmie  $\mathcal{N} = 4$  w supersymetrycznej teorii Yanga-Millsa niezmienniczej ze względu na pchnięcia Lorentza, wolną od pozornych osobliwości krzywizny w późnym okresie ekspansji. Pokazaliśmy, jak poprzednich osobliwości można uniknąć przez wybór parametru ekspansji,

udowadniając w ten sposób, że holografia niezmienna ze względu na pchnięcia Lorentza może być przybliżona przez supergrawitację. We współpracy z N. Banerjee, J. Bhattacharya, S. Bhattacharyya, S. Dutta, R. Loganayagamem [68] rozszerzyłem korespondencję płyn/grawitacja na naładowane czarne brany, określając metryki dualne do dowolnej konfiguracji naładowanego płynu do drugiego rzędu w rozwinięciu w pochodnych. Wyprowadziliśmy tensor energii-pędu i prąd dla tych konfiguracji. Znaleźliśmy nowy człon w prądzie, rozwiązując w ten sposób wcześniejszą rozbieżność między termodynamiką naładowanych obracających się czarnych dziur a hydrodynamiką na brzegu przestrzeni anty-de Sittera. Potwierdziliśmy również, że wszystkie nasze wyrażenia są kowariantne ze względu na transformacje Weyla, zgodnie z oczekiwaniami. We współpracy z D. T. Sonem [12] rozważyłem hydrodynamikę z anomaliami kwantowymi dla prądów globalnych. Pokazaliśmy, że dotychczas odrzucony człon w zachowanym prądzie jest nie tylko dozwolony przez symetrie, ale w rzeczywistości jest wymagany przez anomalie i drugą zasadę termodynamiki. W ten sposób niniejszy artykuł wykazał, że anomalie mają wpływ na zjawiska transportu.

Oprócz powyższego zajmowałem się aspektami fizyki matematycznej. We współpracy z R. A. Janikiem, A. Wereszczyńskim [69] zbadałem, jak obliczać, klasycznie przy silnym sprzężeniu, funkcje korelacji lokalnych operatorów odpowiadające stanom wirującej struny w korespondencji AdS/CFT. Przeanalizowaliśmy rozwiązania strunowe i obliczyliśmy najprostszy przypadek funkcji dwupunktowej. Ponadto odtworzyliśmy prawidłowe skalowanie z anomalnymi wymiarami odpowiadającymi energiom wirujących strun. We współpracy z A. Karchem, E. G. Thompsonem [70] badałem defekty w niereleatywistycznych konformalnych teoriach pola. Podobnie jak w dobrze zbadanym przypadku relatywistycznych defektów konforemnych, odkryliśmy, że użytecznym narzędziem do organizowania funkcji korelacji jest rozwinięcie operatora defektu (dOPE). Przeanalizowaliśmy, w jaki sposób dOPE pojawia się w teoriach holograficznych, podkreślając niektóre aspekty mapowania operator/stan w nierelatywistycznej holografii. Zaproponowaliśmy możliwe rozszerzenia tego modelu o fermiony zlokalizowane na defekcie.

## Po uzyskaniu doktoratu

Po uzyskaniu stopnia doktora skupiłem się na badaniu silnie sprzężonych płynów relatywistycznych. Ich znaczenie wynika z faktu, że jest to efektywny opis w dużych skalach dla danego klasycznego lub kwantowego relatywistycznego układu wielu ciał w niezerowej temperaturze. Zastosowania płynów relatywistycznych obejmują zderzenia ciężkich jonów, kosmologię i fizykę materii skondensowanej. W pracy [71] skonstruowałem powoli zmieniający się holograficzny płyn wykazujący zjawisko nadciekłości i obliczyłem jego współczynniki transportu. Nadciekłość można traktować jako płyn o spontanicznie złamanej symetrii globalnej. W grawitacji i w najprostszej możliwej konfiguracji odpowiada to naładowanemu polu skalarnemu i polu cechowania  $U(1)$  sprzężonych z metryką. Innym kierunkiem, który zgłębiałem, były układy o symetriach nieabelowych. Przykłady takich systemów obejmują plazmę kwarkowo-gluonową i układy spinowe. W pracy [72] zaproponowałem konstrukcję płynów nieabelowych na podstawie kompaktyfikacji Kaluzy-Kleina.

Oprócz powyższych badań kontynuowałem pracę nad płynami z anomaliami chiralnymi - tematem zapoczątkowanym w mojej pracy doktorskiej. Wraz z R. Loganayagamem zaproponowaliśmy funkcjonal generujący dla anomalnej hydrodynamiki i modyfikacje w przestrzeni fazowej, które służą jako podstawa teorii kinetycznej z anomaliami [73]. Wyprowadziliśmy również precyzyjne powiązanie między anomalnymi właściwościami transportu w płynach a topologią przy użyciu uogólnionej funkcji "A-genus" w skończonej temperaturze i potencjale chemicznym. Z G. S. Ng, doktorantem na uniwersytecie Harvarda, zrozumieliśmy rolę anomalii w formalizmie "heat kernel" [74]. Po rozpoczęciu pracy w instytucie Maxa Plancka w Dreźnie rozszerzyłem swoje zainteresowania o materiały topologiczne Weyla, które realizują transport z anomaliami w ciele stałym, koncentrując się przede wszystkim na problemach materii skondensowanej. Zacząłem pracować nad nowymi odpowiedziami topolog-

icznymi napędzanych półmetali. Prace, które nie są ujęte w osiągnięciu habilitacyjnym obejmują ścisłą współpracę z eksperymentatorami nad nieliniowymi odpowiedziami w półmetalach Diraca i Weyla pod wpływem pól laserowych THz [75].

Postęp w dziedzinie półmetali Diraca i Weyla uzupełniają badania układów dwuwymiarowych. Przykłady obejmują grafen i tzw. "superfluid films". Moje zaangażowanie w badania nad tymi systemami koncentruje się na efektach łamania parzystości. Wraz z doktorantem z uniwersytetu Harvarda, Andrew Lucasem, zainicjowaliśmy fenomenologiczne badania płynów z lepkością Halla [76] w dwóch wymiarach. Opracowaliśmy również efektywną teorię dwuwymiarowych płynów z wirami która uwzględnia oddziaływania z fononami [77]. Jestem również zaangażowany w pogłębienie wiedzy na temat fraktonowych faz materii i ich związku z elastycznością [78].

Fenomenologia płynów łamiących parzystość dopiero zaczęła się rozwijać. Jest one ważna zarówno w przepływach elektronowych w polu magnetycznym w aktywnych układach biologicznych, jak i w metamateriałach. Materiały aktywne to układy napędzane, w których energia jest dostarczana bezpośrednio, izotropowo i niezależnie od poszczególnych składników - cząstek aktywnych. Uwolnione z ograniczeń stanu równowagi, materiały te zyskują nowe funkcjonalności. Na przykład, w przeciwieństwie do konwencjonalnych żeli, które pozostają nieruchome, chyba że napędzane są przez siły zewnętrzne, spontanicznie generowane przepływy w aktywnych żelach wywierają makroskopową siłę na brzegi. Takie płyny wytwarzające siłę to tylko jeden przykład poszukiwanych funkcji biomimetycznych, które można znaleźć w materiałach aktywnych. Niestety w pełni funkcjonalne struktury biologiczne są delikatne i trudne do kontrolowania, a zatem są słabo przystosowane do aplikacji materiałoznawczych. Aby pokonać to ograniczenie, należy rozwinąć lepsze zrozumienie aktywności i jej makroskopowych przejawów. Doprowadzi to do opracowywania nowatorskich zastosowań materiałów, testowania podstawowych modeli materii aktywnej dalekiej od równowagi i potencjalnie rzuci światło na samoorganizację w żywych komórkach. Opierając się na moich poprzednich wynikach dotyczących układów z łamaniem parzystości, we współpracy z C. Scheibnerem, A. Souslovem, D. Banerjee, W. Irvine, V. Vitellim zaproponowaliśmy nową klasę materiałów aktywnych, opartą na elastyczności łamiącej parzystość [79] tzw. "odd elasticity". Praca ta uogólnia pojęcie elastyczności poprzez włączenie aktywnych współczynników sprężystości do układu izotropowego. Taka konstrukcja prowadzi do nowych zjawisk, których nie ma w pasywnej sprężystości. Obecnie kontynuuję pracę nad aktywną elastycznością.

Aktualną listę publikacji i preprintów można znaleźć na moim profilu w bazie Google Scholar <https://scholar.google.com/citations?user=iv2yY8EAAA&hl=pl>

## Dane bibliometryczne

- Cytowania 20.09.2020: 1081, bez autocytowań 1059 (Web of Science).
- h-index: 10.

## 6. Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę.

### Granty

- Grant Narodowego centrum Nauki Sonata Bis "Gapless critical phases, from topology to geometry," 2020.
- Grant w klastrze ct.qmat "Quantum field theory, hydrodynamics and topological matter," na zatrudnienie stażysty po doktoracie, 2019.

- Associate Member w the Würzburg-Dresden excellence cluster "Complexity and Topology in Quantum Matter," 2019.
- Marie Curie International Outgoing Fellowship
- ESF Exchange Grant 'Algebraic curves in AdS/CFT for systems with boundaries' przez program ESF 'Holographic Methods for Strongly Coupled Systems'.
- Short Term Scientific Mission grant 'Fluid/gravity correspondence and turbulence' przez program COST Action Number MP1210 'The String Theory Universe'.
- Flemish Science Foundation (FWO) Fellowship
- Visiting student scholarship, University of Washington, Seattle, WA
- Grant promotorski KBN.

### **Działalność zawodowa**

- recenzent artykułów w czasopismach recenzowanych (Journal of High Energy Physics, Physics Letters B, Acta Physica Polonica B, Journal of Physics A, Annals of Physics, Journal of Mathematical Physics, Phys. Rev. Lett., Phys. Rev. A, B, D, SciPost). Zostałem wyróżniony Elsevier Reviewer Recognition w roku 2015.
- organizator seminarium materii skondensowanej w Instytucie Maxa Plancka PKS
- członek komitetów organizacyjnych konferencji: 1. Quantum Matter Academy Meissen 2019, współorganizatorzy: Felix Friedrich, Philipp Kagerer, Berengar Leikert (Julius-Maximilians-Universität Würzburg), Francisco Peña-Benitez (MPI PKS); 2. Mathematical aspects of quantum phases of matter, Banach Center 2021, współorganizatorzy: Semyon Klevtsov (University of Strasbourg) Paul Wiegmann (University of Chicago); 3. Emergent Hydrodynamics in Condensed Matter and High-energy Physics, Dresden 2022, współorganizatorzy: Andrey Gromov (Brown University), Dam T. Son (University of Chicago).
- działalność popularyzatorska: the Science Festival (Kraków), Sciencemakers (Gent), Theory at Sea (Oostduinkerke), Science Retreat (Boston), Marie Curie Workshop (Munich).
- członek towarzystw: European Mechanics Society (2015-), American Physical Society (2015-2019), European Physical Society (2014-2015).
- uczestnik kursów: Mathematica and Matlab (2nd Mathematica Summer School on Theoretical Physics on Condensed Matter and Two-dimensional Physics, Porto 2010; Matlab Programming Techniques, Harvard CompuFest Workshop 2015; Matlab Advanced Programming Techniques, MathWorks Training Course, Natick 2015)

### **Zajęcia dydaktyczne i opieka nad studentami**

- Wprowadzenie do algebry komputerowej, 2006; C++, 2007, 2008 (Uniwersytet Jagielloński) (ocena dydaktyczna 5.0/5.0)
- Opiekun magistrantów: Pieter Taels na Vrije Universiteit Brussel (2013).
- Promotor doktorantów w Max Planck Institute for the Physics of Complex Systems: Piotr Witkowski (2017-2020), Renato Dantas (2017-), Ruben Lier (2019-).

- Opiekun studentów w Max Planck Institute for the Physics of Complex Systems: Nicolás A. Morales-Durán from the University of Los Andes (2018), Marianne Moore from McGill University (2019), Lark Wang from Stanford University (2020).
- Opiekun stażystów po doktoracie w MPI PKS: Francisco Peña-Benitez, Denys Rybalka, Andres Schlieff-Raether.

## **7. Oprócz kwestii wymienionych w pkt. 1-6, wnioskodawca może podać inne informacje, ważne z jego punktu widzenia, dotyczące jego kariery zawodowej.**

### **Krótkie staże po uzyskaniu stopnia doktora**

- Harvard University, 3 miesiące (Prof. Andrew Strominger) 2011
- Wits University, 1 miesiąc (Prof. Robert de Mello Koch) 2012
- Oxford University, 1 miesiąc (Dr. Andrei Starinets) 2012
- Wigner Research Center, 1 miesiąc (Prof. György Wolf, Dr. Zoltán Bajnok), 2013
- Weizmann Institute, 1 miesiąc (Prof. Gregory Falkovich, Dr. Zohar Komargodski), 2014
- California Institute of Technology, 1 tydzień (Prof. Hiroshi Ooguri), 2014
- The New England Complex Systems Institute, 3 miesiące (Prof. Yaneer Bar-Yam), 2016

### **Uczestnictwo w konferencjach i warsztatach po uzyskaniu stopnia doktora**

- Max Born Symposium on String Theory, University of Wrocław, 2012
- P- and CP-odd Effects in Hot and Dense Matter, BNL Brookhaven, 2012
- Quantum Anomalies, Topology, and Hydrodynamics, Simons Center Stony Brook, 2014
- Quantum Gravity, Black Holes and Strings, KITPC Beijing, 2014
- String theory and its applications, MITP Mainz, 2014
- Progress and Applications of Modern Quantum Field Theory, Aspen Center for Physics 2015
- American Physical Society March Meeting, 2015
- Equilibration Mechanisms in Weakly and Strongly Coupled Quantum Field Theory, INT Seattle 2015
- The 68th Annual Meeting of the American Physical Society's Division of Fluid Dynamics, Boston 2015
- EMN Meeting on Liquid Crystals, Orlando 2016
- IUTAM Symposium on Helicity, structures and singularity in fluid and plasma dynamics, Venice 2016
- Holography and Dualities 2016, Nordita 2016
- Geometry of Quantum Hall States, Simons Center Stony Brook, 2016



- String Theory, Warsaw 2017
- Open Problems and Opportunities in Chiral Fluids, Santa Fe 2018
- Quantum Anomalies and Chiral Magnetic Phenomena, Nordita 2018
- Bangkok workshop on high-energy physics, 2019
- Auxetics, Poznań 2019
- Effective Theories of Quantum Phases of Matter, Stockholm 2019
- New Trends in Physics, Paris 2019

### Wyłoszone seminaria na zaproszenie po uzyskaniu stopnia doktora

University of Washington, Université Libre de Bruxelles, KU Leuven, Max Planck Institute for Physics, INT Seattle, Technical University of Munich, University of Witwatersrand, University of Johannesburg, INP Polish Academy of Sciences, Loránd Eötvös University, Wigner Research Centre for Physics, Oxford University, Harvard University, Euler International Mathematical Institute, Sogang University, Weizmann Institute of Science, Simons Center for Geometry and Physics, Yukawa Institute for Theoretical Physics, Kavli Institute for Theoretical Physics China, Massachusetts Institute of Technology, University of Chicago, California Institute of Technology, Perimeter Institute for Theoretical Physics, University of Toronto, Center for Theoretical Physics Polish Academy of Sciences, Yang Institute for Theoretical Physics Stony Brook University, Princeton University, Leiden University, Central European Institute for Cosmology and Fundamental Physics Czech Academy of Science, Uppsala University, Maria Skłodowska-Curie Univeristy in Lublin, University of Cologne, Brown University, University of Stavanger.

### Literatura

- [1] R. M. Dantas, F. Peña-Benitez-Benitez, B. Roy, and P. Surówka, *Magnetotransport in multi-Weyl semimetals: A kinetic theory approach*, Journal of High Energy Physics **12** (2018) 069.
- [2] R. M. A. Dantas, F. Peña-Benitez, B. Roy, and P. Surówka, *Non-abelian anomalies in multi-weyl semimetals*, Physical Review Research **2** (Jan., 2020) 013007.
- [3] R. Moessner, P. Surówka, and P. Witkowski, *Pulsating flow and boundary layers in viscous electronic hydrodynamics*, Physical Review B **97** (Apr., 2018) 161112.
- [4] R. Moessner, N. Morales-Durán, P. Surówka, and P. Witkowski, *Boundary-condition and geometry engineering in electronic hydrodynamics*, Physical Review B **100** (Oct., 2019) 155115.
- [5] F. Peña Benitez, K. Saha, and P. Surówka, *Berry curvature and hall viscosities in an anisotropic dirac semimetal*, Physical Review B **99** (Jan, 2019) 045141.
- [6] C. Hoyos, R. Lier, F. Peña Benitez, and P. Surówka, *Quantum hall effective action for the anisotropic dirac semimetal*, Physical Review B **102** (Aug, 2020) 081303.
- [7] D. Xiao, M.-C. Chang, and Q. Niu, *Berry phase effects on electronic properties*, Reviews of Modern Physics **82** (July, 2010) 1959–2007.

- [8] D. T. Son and B. Z. Spivak, *Chiral anomaly and classical negative magnetoresistance of weyl metals*, Physical Review B **88** (Sept., 2013).
- [9] M. A. Stephanov and Y. Yin, *Chiral kinetic theory*, Physical Review Letters **109** (Oct., 2012).
- [10] T. Morimoto, S. Zhong, J. Orenstein, and J. E. Moore, *Semiclassical theory of nonlinear magneto-optical responses with applications to topological dirac/weyl semimetals*, Physical Review B **94** (Dec., 2016).
- [11] C. Duval, Z. Horváth, P. A. Horváthy, L. Martina, and P. C. Stichel, *Berry Phase Correction to Electron Density in Solids and "Exotic" Dynamics*, Modern Physics Letters B **20** (Mar., 2006) 373–378.
- [12] D. T. Son and P. Surówka, *Hydrodynamics with triangle anomalies*, Physical Review Letters **103** (Nov., 2009) 191601.
- [13] D. E. Kharzeev and H. J. Warringa, *Chiral Magnetic conductivity*, Physical Review D **80** (2009) 034028.
- [14] Y. Neiman and Y. Oz, *Relativistic Hydrodynamics with General Anomalous Charges*, Journal of High Energy Physics **03** (2011) 023.
- [15] K. Landsteiner, E. Megias, and F. Peña-Benitez, *Gravitational Anomaly and Transport*, Physical Review Letters **107** (2011) 021601.
- [16] A. Vilenkin, *Macroscopic parity-violating effects: Neutrino fluxes from rotating black holes and in rotating thermal radiation*, Physical Review D **20** (Oct, 1979) 1807–1812.
- [17] A. Vilenkin, *Equilibrium parity-violating current in a magnetic field*, Physical Review D **22** (Dec, 1980) 3080–3084.
- [18] N. Mueller and R. Venugopalan, *Constructing phase space distributions with internal symmetries*, Physical Review D **99** (Mar, 2019) 056003.
- [19] R. Loganayagam and P. Surówka, *Anomaly/Transport in an Ideal Weyl gas*, Journal of High Energy Physics **04** (2012) 097.
- [20] K. Jensen, R. Loganayagam, and A. Yarom, *Thermodynamics, gravitational anomalies and cones*, Journal of High Energy Physics **2013** (Feb, 2013) 88.
- [21] G. Xu, H. Weng, Z. Wang, X. Dai, and Z. Fang, *Chern semimetal and the quantized anomalous hall effect in  $\text{HgCr}_2\text{Se}_4$* , Physical Review Letters **107** (2011) 186806.
- [22] C. Fang, M. J. Gilbert, X. Dai, and B. A. Bernevig, *Multi-weyl topological semimetals stabilized by point group symmetry*, Physical Review Letters **108** (2012) 266802.
- [23] S.-M. Huang, S.-Y. Xu, I. Belopolski, C.-C. Lee, G. Chang, T.-R. Chang, B. Wang, N. Alidoust, G. Bian, M. Neupane, D. Sanchez, H. Zheng, H.-T. Jeng, A. Bansil, T. Neupert, H. Lin, and M. Z. Hasan, *New type of weyl semimetal with quadratic double weyl fermions*, Proceedings of the National Academy of Sciences **113** (Jan., 2016) 1180–1185.
- [24] B.-J. Yang and N. Nagaosa, *Classification of stable three-dimensional dirac semimetals with nontrivial topology*, Nature Communications **5** (2014) 4898.

- [25] Q. Liu and A. Zunger, *Predicted realization of cubic dirac fermion in quasi-one-dimensional transition-metal monochalcogenides*, Physical Review X **7** (2017) 021019.
- [26] I. Amado, N. Lisker, and A. Yarom, *Universal chiral conductivities for low temperature holographic superfluids*, Journal of High Energy Physics **06** (2014) 084.
- [27] C. Copetti, J. Fernández-Pendás, and K. Landsteiner, *Axial hall effect and universality of holographic weyl semi-metals*, Journal of High Energy Physics **2017** (Feb., 2017).
- [28] R. Jackiw, *When radiative corrections are finite but undetermined*, Int. J. Mod. Phys. **B14** (2000) 2011–2022.
- [29] P. Goswami and S. Tewari, *Axionic field theory of (3 + 1)-dimensional weyl semimetals*, Physical Review B **88** (Dec, 2013) 245107.
- [30] A. G. Grushin, *Consequences of a condensed matter realization of Lorentz violating QED in Weyl semi-metals*, Physical Review D **86** (2012) 045001.
- [31] A. Rebhan, A. Schmitt, and S. A. Stricker, *Anomalies and the chiral magnetic effect in the Sakai-Sugimoto model*, Journal of High Energy Physics **01** (2010) 026.
- [32] K. Landsteiner, E. Megías, and F. Peña-Benítez, *Frequency dependence of the chiral vortical effect*, Physical Review D **90** (Sept., 2014).
- [33] A. A. Zyuzin and A. A. Burkov, *Topological response in weyl semimetals and the chiral anomaly*, Physical Review B **86** (Sep, 2012) 115133.
- [34] S. A. Parameswaran, T. Grover, D. A. Abanin, D. A. Pesin, and A. Vishwanath, *Probing the chiral anomaly with nonlocal transport in three-dimensional topological semimetals*, Physical Review X **4** (Sep, 2014) 031035.
- [35] A. Gynther, K. Landsteiner, F. Peña-Benitez, and A. Rebhan, *Holographic anomalous conductivities and the chiral magnetic effect*, Journal of High Energy Physics **2011** (Feb., 2011).
- [36] K. Landsteiner, E. Megias, and F. Peña-Benitez, *Anomalous Transport from Kubo Formulae*, Lect. Notes Phys. **871** (2013) 433–468.
- [37] L. Molenkamp and M. de Jong, *Observation of knudsen and gurzhi transport regimes in a two-dimensional wire*, Solid-State Electronics **37** (apr, 1994) 551–553.
- [38] M. J. M. de Jong and L. W. Molenkamp, *Hydrodynamic electron flow in high-mobility wires*, Physical Review B **51** (may, 1995) 13389–13402.
- [39] J. Crossno, J. K. Shi, K. Wang, X. Liu, A. Harzheim, A. Lucas, S. Sachdev, P. Kim, T. Taniguchi, K. Watanabe, T. A. Ohki, and K. C. Fong, *Observation of the dirac fluid and the breakdown of the wiedemann-franz law in graphene*, Science **351** (feb, 2016) 1058–1061.
- [40] D. A. Bandurin, I. Torre, R. K. Kumar, M. B. Shalom, A. Tomadin, A. Principi, G. H. Auton, E. Khestanova, K. S. Novoselov, I. V. Grigorieva, L. A. Ponomarenko, A. K. Geim, and M. Polini, *Negative local resistance caused by viscous electron backflow in graphene*, Science **351** (feb, 2016) 1055–1058.
- [41] P. J. W. Moll, P. Kushwaha, N. Nandi, B. Schmidt, and A. P. Mackenzie, *Evidence for hydrodynamic electron flow in PdCoO<sub>2</sub>*, Science **351** (feb, 2016) 1061–1064.

- [42] R. K. Kumar, D. A. Bandurin, F. M. D. Pellegrino, Y. Cao, A. Principi, H. Guo, G. H. Auton, M. B. Shalom, L. A. Ponomarenko, G. Falkovich, K. Watanabe, T. Taniguchi, I. V. Grigorieva, L. S. Levitov, M. Polini, and A. K. Geim, *Superballistic flow of viscous electron fluid through graphene constrictions*, Nature Physics (aug, 2017).
- [43] A. P. Mackenzie, *The properties of ultrapure delafossite metals*, Reports on Progress in Physics **80** (jan, 2017) 032501.
- [44] J. Gooth, F. Menges, N. Kumar, V. Süß, C. Shekhar, Y. Sun, U. Drechsler, R. Zierold, C. Felser, and B. Gotsmann, *Thermal and electrical signatures of a hydrodynamic electron fluid in tungsten diphosphide*, Nature Communications **9** (Oct., 2018).
- [45] R. N. Gurzhi, *Minimum of resistance in impurity-free conductors*, JETP **44** (1963), no. 2 771–772.
- [46] R. N. Gurzhi, *Hydrodynamic Effects in Solids at Low Temperature*, Soviet Physics Uspekhi **11** (feb, 1968) 255–270.
- [47] H. K. Moffatt, *Viscous and resistive eddies near a sharp corner*, Journal of Fluid Mechanics **18** (jan, 1964) 1.
- [48] F. Pan and A. Acrivos, *Steady flows in rectangular cavities*, Journal of Fluid Mechanics **28** (jun, 1967) 643.
- [49] A. M. J. Davis, *Periodic blocking in parallel shear or channel flow at low reynolds number*, Physics of Fluids A: Fluid Dynamics **5** (apr, 1993) 800–809.
- [50] M. Branicki and H. K. Moffatt, *Evolving eddy structures in oscillatory stokes flows in domains with sharp corners*, Journal of Fluid Mechanics **551** (mar, 2006) 63.
- [51] C. Y. Wang, *Stokes flow through a transversely finned channel*, Journal of Fluids Engineering **119** (1997), no. 1 110.
- [52] D. Einzel, P. Panzer, and M. Liu, *Boundary condition for fluid flow: Curved or rough surfaces*, Physical Review Letters **64** (May, 1990) 2269–2272.
- [53] C. M. Marcus, A. J. Rimberg, R. M. Westervelt, P. F. Hopkins, and A. C. Gossard, *Conductance fluctuations and chaotic scattering in ballistic microstructures*, Physical Review Letters **69** (jul, 1992) 506–509.
- [54] H. Ishio and J. Burgdörfer, *Quantum conductance fluctuations and classical short-path dynamics*, Physical Review B **51** (jan, 1995) 2013–2016.
- [55] C. D. Schwieters, J. A. Alford, and J. B. Delos, *Semiclassical scattering in a circular semiconductor microstructure*, Physical Review B **54** (oct, 1996) 10652–10668.
- [56] L. Rayleigh, *On the flow of viscous liquids, especially in two dimensions*, Philosophical Magazine **36** (oct, 1893) 354–372.
- [57] D. G. Mabey, *Slow viscous flow within circular cylinders*, Journal of the Royal Aeronautical Society **61** (apr, 1957) 281–283.
- [58] S. C. R. Dennis, *Application of the series truncation method to two-dimensional internal flows*, in Proceedings of the Fourth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, pp. 138–143. Springer-Verlag.

- [59] R. D. Mills, *Computing internal viscous flow problems for the circle by integral methods*, Journal of Fluid Mechanics **79** (mar, 1977) 609.
- [60] S. Dennis, M. Ng, and P. Nguyen, *Numerical solution for the steady motion of a viscous fluid inside a circular boundary using integral conditions*, Journal of Computational Physics **108** (sep, 1993) 142–152.
- [61] V. Pardo and W. E. Pickett, *Half-metallic semi-dirac-point generated by quantum confinement in  $TiO_2/VO_2$  nanostructures*, Physical Review Letters **102** (Apr, 2009) 166803.
- [62] S. Katayama, A. Kobayashi, and Y. Suzumura, *Pressure-induced zero-gap semiconducting state in organic conductor  $\alpha - (BEDT - TTF)_2I_3$* , J. Phys. Soc. Jpn. **75** (May, 2006) 054705.
- [63] Y. Wu, *A semi-dirac point and an electromagnetic topological transition in a dielectric photonic crystal*, Opt. Express **22** (Jan, 2014) 1906–1917.
- [64] L. Tarruell, D. Greif, T. Uehlinger, G. Jotzu, and T. Esslinger, *Creating, moving and merging dirac points with a fermi gas in a tunable honeycomb lattice*, Nature **483** (Mar, 2012) 10871.
- [65] B. Bradlyn, M. Goldstein, and N. Read, *Kubo formulas for viscosity: Hall viscosity, ward identities, and the relation with conductivity*, Physical Review B **86** (Dec, 2012) 245309.
- [66] J. Große, R. A. Janik, and P. Surówka, *Flavors in an expanding plasma*, Physical Review D **77** (Mar., 2008) 066010.
- [67] M. P. Heller, P. Surówka, R. Loganayagam, M. Spaliński, and S. E. Vázquez, *Consistent holographic description of boost-invariant plasma*, Physical Review Letters **102** (Jan., 2009) 041601.
- [68] N. Banerjee, J. Bhattacharya, S. Bhattacharyya, S. Dutta, R. Loganayagam, and P. Surówka, *Hydrodynamics from charged black branes*, Journal of High Energy Physics **2011** (Jan., 2011) 094.
- [69] R. A. Janik, P. Surówka, and A. Wereszczyński, *On correlation functions of operators dual to classical spinning string states*, Journal of High Energy Physics **2010** (May, 2010) 030.
- [70] A. Karch, P. Surówka, and E. G. Thompson, *A holographic perspective on non-relativistic conformal defects*, Journal of High Energy Physics **2009** (June, 2009) 038.
- [71] C. P. Herzog, N. Lisker, P. Surówka, and A. Yarom, *Transport in holographic superfluids*, Journal of High Energy Physics **2011** (Aug., 2011) 052.
- [72] J. J. Fernández-Melgarejo, S.-J. Rey, and P. Surówka, *A new approach to non-abelian hydrodynamics*, Journal of High Energy Physics **2017** (Feb., 2017) 122.
- [73] R. Loganayagam and P. Surówka, *Anomaly/transport in an ideal weyl gas*, Journal of High Energy Physics **2012** (Apr., 2012) 097.
- [74] G. S. Ng and P. Surówka, *One-loop effective actions and 2d hydrodynamics with anomalies*, Physics Letters B **746** (June, 2015) 281–284.
- [75] S. Kovalev, R. M. A. Dantas, S. Germanskiy, J.-C. Deinert, B. Green, I. Ilyakov, N. Awari, M. Chen, M. Bawatna, J. Ling, F. Xiu, P. H. M. van Loosdrecht, P. Surówka, T. Oka, and Z. Wang, *Non-perturbative terahertz high-harmonic generation in the three-dimensional dirac semimetal  $Cd_3As_2$* , Nature Communications **11** (May, 2020) 2451.

- [76] A. Lucas and P. Surówka, *Phenomenology of nonrelativistic parity-violating hydrodynamics in 2+1 dimensions*, Physical Review E **90** (Dec., 2014) 063005.
- [77] A. Lucas and P. Surówka, *Sound-induced vortex interactions in a zero-temperature two-dimensional superfluid*, Physical Review A **90** (Nov., 2014) 053617.
- [78] A. Gromov and P. Surówka, *On duality between cosserat elasticity and fractons*, SciPost Physics **8** (Apr., 2020) 065.
- [79] C. Scheibner, A. Souslov, D. Banerjee, P. Surówka, W. T. M. Irvine, and V. Vitelli, *Odd elasticity*, Nature Physics **16** (Mar., 2020) 475–480.

