Warszawa, 20.09.2019

Prof. dr hab. Adam Idzik
Instytut Podstaw Informatyki PAN
ul. Jana Kazimierza 5
01-248 Warszawa
email: adidzik@ipipan.waw.pl

Recenzja rozprawy habilitacyjnej dr. inż. Piotra Więcka
GRY STOCHASTYCZNE Z CONTINUUM GRACZY Z WYPŁATAMI INNYMI NIŻ DYSKONTOWANE - TEORIA I ZASTOSOWANIA
i jego całego dorobku naukowego
dla
Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej we Wrocławiu

Dr inż. Piotr Więcek jest autorem lub współautorem kilkunastu prac naukowych opublikowanych, między innymi, w takich czasopismach jak *Dynamic Games and Applications, IEEE Transactions on ..., International Game Theory Review, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Journal of Optimization Theory and Applications, Mathematical Methods of Operations Research.*

Studia matematyczne ukończył na Wydziale Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej we Wrocławiu w roku 2000. Pracę magisterską *Strategiczne gry rynkowe* napisał pod kierunkiem prof. dr. hab. Andrzeja Nowaka.

Pracę doktorską *Proste równowagi w dynamicznych strategicznych grach rynkowych*, napisaną pod kierunkiem prof. dr. hab. Tadeusza Radzika, obronił też na Wydziale Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej we Wrocławiu w roku 2004.

Obecnie pracuje jako adiunkt w Katedrze Matematyki Stosowanej na Wydziale Matematyki Politechniki Wrocławskiej we Wrocławiu.

Zainteresowania naukowe dr. inż. Piotra Więcka dotyczą problemów teorii gier, teorii optymalizacji i matematyki stosowanej.

1. Problematyka rozprawy

Gry stochastyczne z czasem dyskretnym o sumie zerowej zostały sformułowane przez Shapleya (1953) dla skończonej liczby stanów systemu i skończonej liczby decyzji obu graczy. Wykorzystując prace Blackwella z programowania dynamicznego (lata sześćdziesiąte ubiegłego wieku) T. Parthasarathy (również ze współautorami, lata siedemdziesiąte ubiegłego wieku) rozszerzył teorię na niekooperacyjne gry stochastyczne o skończonej liczbie graczy, gdzie przestrzenie stanów systemu były przestrzeniami metrycznymi a przestrzenie decyzji graczy były przestrzeniami metrycznymi zwartymi.

W grze stochastycznej rozpatrywanej przez dr. inż. Piotra Więcka, decyzje gracza są ograniczane przez pewną multifunkcję zależną nie tylko od stanu systemu, lecz również od miary probabilistycznej określonej na przestrzeni stanów systemu. Wypłata gracza też zależy nie tylko od stanu systemu i decyzji gracza, ale również od miary probabilistycznej określonej na iloczynie kartezjańskim przestrzeni stanów systemu i przestrzeni decyzji gracza. Analogicznie, funkcja przejścia (miara na przestrzeni stanów systemu) zależy nie tylko od stanu systemu i decyzji gracza na danym etapie gry, ale również od miary probabilistycznej określonej na przestrzeni będącej iloczynem kartezjańskim przestrzeni stanów systemu i przestrzeni decyzji gracza. Gracz prowadzi politykę stacjonarną, to znaczy na każdym etapie wybiera tę samą strategię: miarę probabilistyczną określoną na przestrzeni decyzji gracza, zależną od stanu systemu i miary probabilistycznej określonej na przestrzeni stanów systemu (nazywanej stanem globalnym systemu). Definiowane są dwie wypłaty dla gracza: na jednostkę czasu i całkowita.

Gry stochastyczne z czasem dyskretnym przedstawione w pracach [H2] i [H5] (według numeracji w Autoreferacie), są uogólnieniem problemów programowania dynamicznego jak i wariacją dwustopniowych niekooperacyjnych gier stochastycznych w przypadku dwóch graczy i wypłaty na jednostkę czasu [AI] (Adam Idzik, *Two-stage noncooperative stochastic games with denumerable state spaces*, Optimization Techniques, Proceedings of the 9th IFIP Conference on Optimization Techniques, Warsaw, September 4-8, 1979, Part 1, Edited by K. Iracki, K. Malanowski, S. Walukiewicz, Lecture Notes in Control and Information Sciences 22, Springer-Verlag, Berlin Heedelberg New York 1980). Podane są twierdzenia o istnieniu równowag stacjonarnych w

takich grach oraz związki z pewnymi grami n-osobowymi określonymi na iloczynach kartezjańskich przestrzeni stanów systemu n graczy i na iloczynach kartezjańskich przestrzeni decyzji n graczy.

W rozprawie zbadany został również model gry semimarkowskiej z czasem ciągłym [H4]. Podane zostały warunki na istnienie równowag stacjonarnych w takiej grze oraz zostały zbadane własności takich równowag.

Ponadto przedstawione zostały zastosowania obu tych gier stochastycznych w telekomunikacji bezprzewodowej do :

(a) automatycznego sterowania mocą baterii w urzadzeniach mobilnych [H1],

(b) systemów kolejkowych typu $M/M/\infty$ z kosztem obsługi dzielonym pomiędzy użytkowników [H3].

2. Ocena osiągnięć naukowych

Rozprawa składa się z pięciu prac opublikowanych w następujących czasopismach: *IEEE Transactions on Automatic Control* : [H1], *Journal of Optimization Theory and Applications* : [H2] oraz *Dynamic Games and Applications* : [H3], [H4], [H5].

Główne osiągnięcia naukowe dr. inż. Piotra Więcka, uwzględniające oświadczenia współautorów, omówię po kolei:

[H2] , [H5] W rozpatrywanej grze stochastycznej z czasem dyskretnym, w rzeczywistości grają dwaj gracze. Pierwszy gracz i drugi gracz (= pozostali gracze) określają przy pomocy swoich strategii stacjonarnych wybranych na każdym etapie gry, miarę probabilistyczną na historii procesu decyzyjnego (przeliczalnym iloczynie kartezjańskim iloczynu kartezjańskiego przestrzeni stanów i przestrzeni decyzji pierwszego gracza). Obaj gracze mają ustalone miary probabilistyczne (rozkłady) początkowych stanów systemu (stanów prywatnych ?), potrzebne do określenia funkcji $\mathcal{A} : S \times \Delta(S) \to A$ ograniczającej decyzje gracza pierwszego, funkcji przejścia $Q : S \times A \times \Delta(S \times A) \to \Delta(S)$ i wypłaty (na jednostkę czasu lub całkowitej) dla gracza pierwszego (założenie (1)). Miary te, jak i funkcje $\mathcal{A}$ i Q, określają również miarę probabilistyczną na historii procesu decyzyjnego. Określone są dwie równowagi w grze : równowaga stacjonarna z wypłatą na jednostkę czasu (Definicja 3) i równowaga stacjonarna z wypłatą całkowitą (Definicja 4). W przypadku gdy funkcja $\mathcal{A}$ ograniczająca decyzje gracza pierwszego, funkcja przejścia Q i funkcja wypłaty dla gracza pierwszego $r : S \times A \times \Delta(S \times A) \to \mathbf{R}$ nie zależą

od stanu globalnego systemu i miary probabilistycznej określonej na $S \times A$ (rozkładu globalnego), gra stochastyczna sprowadza się do programowania dynamicznego. Mówienie o continuum (?) graczy jest nadinterpretacją. Równie dobrze można mówić o zbiorze graczy dowolnej mocy.

Dla dowodu istnienia równowagi stacjonarnej w grze stochastycznej z wypłatą na jednostkę czasu (Twierdzenie 3.1 w [H2]), przyjmuje się założenia (A1) - (A5). Założenie (A4) jest karkołomne. Zauważmy, że jeśli zbiór stanów systemu S i zbiór decyzji gracza A są skończone, to przestrzeń miar probabilistycznych na $S \times A$, oznaczana $\Delta(S \times A)$, jest identyczna z sympleksem skończenie wymiarowym i zamiast twierdzenia Glicksberga (znanego w literaturze jako twierdzenie Fana), można stosować klasyczne twierdzenie Kakutaniego.

Dla dowodu istnienia równowagi stacjonarnej w grze stochastycznej z wypłatą całkowitą (Twierdzenie 4.1 w [H2]), zamiast założenia (A4) przyjmuje się założenie (A6). Równie karkołomne.

W przypadku gdy S i A są przestrzeniami metrycznymi zwartymi, to przy założeniach (B1) - (B4) gra stochastyczna z wypłatą na jednostkę czasu ma równowagę stacjonarną (Twierdzenie 1 w [H5]). W dowodzie tego twierdzenia dr inż. Piotr Więcek powołuje się na twierdzenie Glicksberga. Nie wyjaśnia jednak w jakiej przestrzeni lokalnie wypukłej znajduje się zbiór zwarty i metryzowalny $\Delta(S \times A)$.

Zdefiniowaną powyżej grę stochastyczną można zmodyfikować w następujący sposób: dla ustalonej liczby naturalnej n, za przestrzeń stanów systemu przyjmujemy S^n a za przestrzeń decyzji gracza i przyjmujemy A^n. Funkcję $\mathcal{A}_i : S^n \times \Delta(S^n) \to A^n$ ograniczającą decyzje gracza i oraz wypłatę gracza i, $r_i : S^n \times A^n \times \Delta(S^n \times A^n) \to \mathbf{R}$, uzależnić od stanu na współrzędnej i oraz wyrazić przez $\mathcal{A}$ i r, odpowiednio. A funkcję przejścia

$$Q_n : S^n \times A^n \times \Delta(S^n \times A^n) \to \Delta(S^n)$$

też wyrazić przez Q.
W pracach [H2] i [H5] pokazane zostały związki pomiędzy równowagą stacjonarną a ϵ-równowagą Nasha (Definicja 6), w tak zdefiniowanej grze n-osobowej (Twierdzenie 5.2 w [H2] oraz Twierdzenie 2 i Twierdzenie 3 w [H5]).

[H4] W pracy przedstawiony został model gry semimarkowskiej z czasem ciągłym, z continuum graczy i z wypłatą całkowitą. Model jest podobny do

gry stochastycznej zdefiniowanej w pracach [H2] i [H5]. Zbiór stanów S i zbiór decyzji A są skończonymi podzbiorami liczb rzeczywistych. Gra rozgrywana jest w czasie ciągłym ($t \geqslant 0$). Dla każdego gracza α stan systemu może zmieniać się w przeliczalnym zbiorze chwil. Czas pomiędzy kolejnymi zmianami stanu systemu jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z intensywnością λ, zależną od stanu systemu i stanu globalnego gry X_t (miara?) w chwili t (funkcją o wartościach dodatnich i lipschitzowską funkcją stanu globalnego gry). Dynamika stanu globalnego gry opisana jest przez układ równań różniczkowych (wzór (4)), nazywana dynamiką Kurtza. Funkcje $\mathcal{A}$ i Q są takie same a wypłatę całkowitą gracza α oraz równowagę stacjonarną w grze, definiuje się podobnie. Dowodzi się, że gra semimarkowska z czasem ciągłym, z continuum graczy i z wypłatą całkowitą spełniająca założenia (C1) - (C5), ma równowagę stacjonarną (Twierdzenie 1 w [H4]). Frustrujące jest to, że w dowodach używa się skomplikowanego języka teorii krat do przypadku gdy S i A są podkratami zupełnymi jako skończone podzbiory $\mathbf{R}$. Ponadto, przy definiowaniu średniej polityki stacjonarnej (average stationary policy), używanej przez graczy, dowiadujemy się wreszcie, że gracze są elementami odcinka $[0, 1]$ (continuum !), (wyjaśnienie wzoru (4), str. 510 w [H4]).

[H1] W pracy przedstawiony został model sterowania mocą baterii przy przesyłaniu własnych danych w urządzeniach mobilnych. Z każdym graczem jest związany markowski proces decyzyjny. Model ten jest adaptacją modelu Jovanovica i Rosenthala (1988) na przypadek gry stochastycznej z wypłatą całkowitą. Większa moc baterii gracza daje możliwość zwiększenia wielkości przesyłania swoich danych i zmniejszenia wielkości przesyłania danych pozostałych graczy. Natomiast zwiększenie wielkości przesyłania swoich danych powoduje szybsze zużycie baterii. Stanami S są stany baterii (skończony podzbiór $\mathbf{R}$) i skończony zbiór decyzji A (również skończony podzbiór $\mathbf{R}$). Określone są również funkcje $\mathcal{A}$, Q i r . Dla tak zdefiniowanej gry stochastycznej można stosować teorię rozwiniętą w pracach [H2], [H4] i [H5], by wykazać istnienie równowagi stacjonarnej w takiej grze. Celem pracy jest określenie klasy możliwie najprostszych strategii, która będzie zawierała również strategie w równowadze stacjonarnej w tej grze oraz określenie efektywnych algorytmów numerycznych szukania strategii w równowadze stacjonarne w tej grze. Zdefiniowano dwie klasy strategii stacjonarnych :
(1) strategie wykorzystujące wyłacznie najmniejsze i największe moce baterii dostępne w poszczególnych stanach oraz
(2) strategie progowe używające najmniejszych i największych mocy baterii dostępnych w poszczególnych stanach.
Pokazano, że rozważana gra ma równowagę stacjonarną w klasie strategii progowych (Twierdzenie 2 w [H1]). Sformułowane zostały algorytmy, które

prowadzą do równowagi stacjonarnej (Twierdzenie 4, Twierdzenie 5 i Twierdzenie 6 w [H1]). Klasa strategii progowych była badana w pozostałej części pracy.

[H3] Przedstawione zostały dwa modele typu gry zatłoczenia (game of congestion). Przy pomocy systemu kolejkowego typu $M/M/\infty$, gracze (terminale komórkowe) widzac długość kolejki X_t (stan systemu w chwili t), decydują się ustawić w kolejce do dostepu pewnego zasobu (np. transmisji telewizyjnej na żywo), na podstawie obserwowanej długości kolejki. W modelu dyskretnym przestrzeń stanów S jest przeliczalnym podzbiorem liczb nieujemnych. Przestrzenią decyzji każdego gracza jest zbiór dwuelementowy $\{E, N\}$. Gracz k przybywający w chwili t_k decyduje czy ustawić się w kolejce (E), czy nie (N). Zdefiniowane zostały polityki: impulsowa i jej wariant: progowa (Definicje: 1,2) oraz pojęcie równowagi w takiej grze. W modelu płynnym (fluid model) dynamika jest określona przez równanie różniczkowe zwyczajne. Podstawowe twierdzenie (Twierdzenie 1 w [H3]) mówi, że w modelu płynnym istnieje równowaga Nasha dla pewnych polityk progowych graczy.
Niestety, oba przedstawione modele gier mają niewiele wspólnego z grami stochastycznymi omawianymi w poprzednich pracach.

3. Aktywność naukowa

Dr inż. Piotr Więcek współpracował z dwoma ośrodkami naukowymi we Francji. Brał udział w kilkunastu konferencjach międzynarodowych.

Po doktoracie dr inż. Piotr Więcek napisał kilkanaście prac naukowych (3 samodzielne). Większość z nich dotyczy problemów matematyki stosowanej. W przedstawionej liście prac ([P1] - [P11]) część tych prac zawiera wyniki ze swojej pracy magisterskiej i ze swojej pracy doktorskiej.

[P6] Korzystając z pomysłu zawartego w pracy Nikaidô i Isoda (1955), osłabiającego założenie ciągłości funkcji wypłat graczy, zostało przedstawione łagodne (mild) uogólnienienie Twierdzenia 2.1 z pracy [AI] o istnieniu równowagi Nasha w niekooperacyjnych dyskontowanych grach stochastycznych.

[P8] Przedstawione zostało zastosowanie pewnej n-osobowej gry stochastycznej z wypłatą dyskontowaną do badania pewnego modelu ekonomicznego, w którym każdy z n graczy posiada pewne zasoby pieniężne przeznaczone

na zakup porcji pewnego dobra. Stanem w grze jest wektor zasobów pieniężnych $s = (s_1, ..., s_n) \in \mathbf{N}^n$, a decyzjami są oferty składane przez nich:

$$a_i \in [s_i], (i \in [n] = \{1, ..., n\})$$

Przy pomocy matematycznych środków (twierdzenie Banacha o punkcie stałym, twierdzenie Kakutaniego), badana jest struktura strategii w symetrycznej równowadze Nasha w rozważanej grze.

[**P5**] , [**P9**] Badane były n-osobowe gry niekooperacyjne pod kątem istnienia równowag Nasha dla strategii graczy będących miarami probabilistycznymi o nośnikach w zbiorze co najwyżej dwóch decyzji. Zakłada się, że każdy z graczy ma co najwyżej przeliczalny zbiór decyzji.

[**P10**] Badany jest problem podłączenia telefonów komórkowych do dwóch rodzajów sieci bezprzewodowych. Przedstawiony został model n-osobowej gry jednoetapowej z niepełną informacją. Przedstawiono twierdzenia o postaci równowag typu Bayesa-Nasha w powyższej grze (Proposition 1, Proposition 5). Przeprowadzono analizę złożoności obliczeniowej algorytmu zdefiniowanego w Proposition 6.

[**P11**] Przedstawiony został model gry niekooperacyjnej opisujący sytuację, w której dwa telefony komórkowe przesyłają dane korzystając z sieci bezprzewodowej z K kanałami. Podane zostały algorytmy obliczania rozwiązania Stackelberga (Proposition 3 i Proposition 4) w powyższym modelu oraz porównanie wydajności uzyskanego rozwiązania ze znanym w literaturze algorytmem obliczającym równowagę Nasha (Proposition 7 - Proposition10).

W **konkluzji** stwierdzam, że przedstawiane do oceny, rozprawa habilitacyjna jak i cały dorobek naukowy dr. inż. Piotra Więcka, nie spełniają warunków Ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym z dnia 14.03.2003. Ewentualną uchwałę Komisji Habilitacyjnej w sprawie nadania dr. inż. Piotrowi Więckowi stopnia doktora habilitacyjnego w dyscyplinie matematyka nie poprę.

Adam Idzik

Adam Idzik