UNT
EST. 1890
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
College of Science

RECENZJA/OCENA OSIAGNIECIA DOKTORA BARTOSZA FREJA

Osiagniecie dr. Freja sklada sie z czterech publikacji naukowych oznaczonych w jego referacie etykietkami [A1] [A4]. Wszystkie one dotycza zagadnienia przeniesienia pojecia metrycznej entropii Kolmogorowa–Sinaia na klase wszystkich operatorów Markowa. Chodzi o uogólnienie, które byloby mozliwie najlepsze. Jak autor slusznie zauwaza jednym z warunków koniecznych takiego uogólnienia jest spelnianie przez entropie odpowiedniej wersji twierdzenia Shannona–McMillana Breimana a takze twierdzenia Kusznirenki oraz twierdzenia Rochlina o typowosci zerowej entropii.

Dr Frej w cyklu prac [A1]–[A4] (i innych) przedstawia swoje wlasne podejście do tak postawionego problemu. Próby uogólnienia entropii metrycznej na przypadek operatorów Markova maja swoja historie i byly podejmowane miedzy innymi przez autorów takich jak E. Ghys, Langevin i Walczak, B. Kamiński i de Sam Lazaro. Dr Frej zauwazyl naturalny ogólny schemat wspólny dla tych propozycji i juz w pracy [DF] wspólnej z T. Downarowiczem przedstawil aksjomatyczne podejscie do zagadnienia. Wprowadzil on cztery aksjomaty: monotoniczności, ciaglości, aksjomat o rozbiciach i aksjomat o oszacowaniu. Pierwszym twierdzeniem, jeszcze z [DF], dobitnie wskazujacym na zasadność podanej przez Downarowicza i Freja aksjomatyzacji jest fakt, iz wartość entropii operatora Markowa jest przez te aksjomaty wyznaczona jednoznacznie. Ale to nie koniec. Oznaczmy za autorem entropie operatora Markowa T przez $\mathrm{h}_\mu(T)$. W pracy [A1] dr Frey udowodnil, ze jedna z pierwszych konstruktywnych definicji entropii operatora Markowa T, podana w roku 1987 przez Malicky'ego i Riecana, jest równa entropii aksjomatycznej $\mathrm{h}_\mu(T)$. Z pracy tej wynika tez, ze jeśli S jest przekształceniem mierzalnym z probabilistyczna, niezmiennicza miara μ, to entropia aksjomatyczna $\mathrm{h}_\mu(T)$ operatora Koopmana T stowarzyszonego z S jest równa entropii metrycznej $\mathrm{h}_\mu(S)$ przekształcenia S. Jest to właśnie, to czego należalo w pierwszej kolejności oczekiwać.

W pracy [A2] autorzy formuluja dwa dalsze naturalne warunki entropijne, których spelnienie nie jest automatycznie gwarantowane przez powyzej wymienione cztery aksjomaty. W zwiazku z tym proponuja oni taka definicje entropii statycznej $\mathrm{H}_\mu(\mathcal{F})$, wykorzystujaca klasyczna definicje entropii rozbicia, przy której bylyby spelnione te cztery aksjomaty a takze te dwa nowe naturalne warunki. Jest to kluczowy moment pracy.

Ponadto autorzy dowodza wzoru na entropie produktu dwóch operatorow Markova pokazujac, ze jest ona, podobnie jak dla zachowujacych miare niezmiennicza układów dynamicznych, równa sumie entropii tych operatorów. Interesujacy jest tez udowodniony przez autorów fakt ciaglości entropii statycznej $\mathrm{H}_\mu(C(X))$ w $*$-slabej topologii,

Date: March 19, 2020.

UNIVERSITY OF NORTH TEXAS®
1155 Union Circle #311430 Denton, Texas 76203-5017
940.565.2155 940.565.4805 fax www.math.unt.edu

gdzie $C(X)$ jest rodzina funkcji ciaglych na zadanej zwartej przestrzeni metryzowalnej X.

Kolejna praca rozprawy habilitacyjnej dr. Freja jest artykul [A3]. Stanowi on kontynuacje prac [A2] oraz [Fr]. Przyjeta jest tu ta sama definicja entropii operatorowej, ale wprowadza sie nowe elementy, zwlaszcza entropie rodziny $\mathcal{F}$ na dowolnym poziomie $t \in [0,1]$ oznaczana przez $\mathrm{H}_\mu(\mathcal{F}, t)$. Calość pracy koncentruje sie wokól odpowiednich wersji twierdzenia Shannona–McMillana–Breimana. Punktem wyjścia jest odpowiednie uogólnienie klasycznej definicji funkcji informacji i otrzymany w ten sposób wzór na entropie statyczna zadanej rodziny funkcji $\mathcal{F}$ jako calki funkcji informacji. Praca [A3] zawiera dwa glówne twierdzenia o zbiezności średnich wartości funkcji informacji do entropii operatora Markova wzgledem rodziny $\mathcal{F}$. Jest to bardo dobry analogon klasycznej wersji twierdzenia Shannona–McMillana–Breimana, który, obok wczesniej uzyskanych rezultatów, dobitnie wskazuje jak bardzo udane jest przyjete przez dr. Freja podejście do entropii operatorów Markowa. Decydujacym punktem dowodu jest rozpatrywanie w pierwszym kroku operatorów Markowa zadanych przez prawdopodobieństwa przejścia. Wprowadza sie tu równiez pomocniczy, klasyczny uklad dynamiczny σ, bedacy przeksztalceniem jednostronnego przesuniecia na przestrzeni $X^{\mathbb{N}}$, i dowodzi sie równości jego metrycznej entropii z entropia operatorowa. Odpowiednikami, do pewnego stopnia, twierdzenia Shannona–McMillana–Breimana sa twierdzenia 4.1 i 4.2 szacujace z góry miare "wiekszości" atomów coraz drobniejszych rozbić. Ich dowody bazuja na pomocniczym ukladzie σ i zachodzacej dla niego klasycznej wersji twierdzenia Shannona–McMillana–Breimana.

W sytuacji ogólnej, kiedy operator Markowa nie musi być generowany przez prawdopodobieństwa przejścia, dr Frej proponuje interesujaca konstrukcje. Przy pomocy twierdzenia Gelfanda konstruuje on izomorfizm wyjściowego operatora T z pewnym odpowiednio zdefiniowanym operatorem Markowa $\hat{T}$ dzialajacym na przestrzeni funkcji ciaglych odpowiednio skonstruowanej zwartej przestrzeni Hausdorffa. O takich zaś operatorach juz wiadomo, ze zawsze mozna je zadać poprzez prawdopodobieństwa przejścia.

Praca [A4] w pierwszej ze swych cześci odpowiada na postawione przez A. Vershika 14 lat temu pytanie o typowość entropii zero operatorów Markowa. Jest to naturalne pytanie motywowane klasycznym rezultatem Rochlina o typowosci entropii zero dla automorfizmów zachowujacych miare probabilistyczna. Mówiac dokladniej, Vershik pyta o typowość entropii w sensie [DF]. Frej and Huczek w [FH] udzielaja na pytanie Vershika odpowiedzi twierdzacej. Jak to czesto w tego typu problemach bywa, odpowiedź sklada sie z dwóch cześci. Pierwsza z nich, dowodzaca gestości operatorów z entropia zero, polega na konkretnej konstrukcji malych zaburzeń wyjściowego operatora. Dowodzenie, ze operatory o entropii zero tworza zbiór G_δ jest dokonane przez konkretne przedstawienie tego zbioru jako przeliczalnego przekroju zbiorów otwartych skladajacych sie z operatorów o entropii zero.

Druga czesc pracy [A4] poswiecona jest, troche juz chyba zarzuconemu, ale wciaz zywemu w dynamice topologicznej, pojeciu ciagowej entropii. Autorzy pracy wprowadzaja odpowiednie pojecie entropii ciagowej dla operatorów Markowa i koncentruja

sie na odpowiedniku ponad pólwiecznego twierdzenia Kusznirenki charakteryzujacego uklady dynamiczne z dyskretnym spektrum Koopmana jako te, których entropia znika wzdluz kazdego ciagu. Definicja entropii ciagowej dla operatorów Markowa jest naturalna i chociaz doslowny odpowiednik twierdzenia Kusznirenki dla niej nie zachodzi, to jednak autorzy uzyskuja jego bardzo interesujaca wersje bazujaca na rozkladzie Jacobsa–de Leeuwa–Glicksberga.

Intrygujace jest twierdzenie 5.12 z [A4] o znikaniu entropii ciagowej wzdluz kazdego ciagu dla quasi–zwartych ukladów markowowskich. Narzuca mi sie tu pytanie o entropie ukladu sprzezonego (dualnego) do zadanego ukladu markowowskiego T. Jaki jest jej zwiazek z entropia T? W rozszerzajacych bowiem ukladach dynamicznych, przy szeregu dodatkowych naturalnych zalozeń, zachodzi wlasność K–mieszania a nawet slabego Bernoulli, podczas gdy operator sprzezony, obciety do mniejszej ale ciagle interesujacej przestrzeni (zazwyczaj sa to funkcje holderowskie z ustalonym wykladnikiem) Banacha, jest quasi–zwarty i dodatkowo, promień spektralny jest jedynym punktem spektrum (w istocie wartościa wlasna) o maksymalnym module. Jak sie maja do siebie entropie tych wszystkich trzech operatorow?

Tematyka badawcza dr. Freja nie ogranicza sie do badania entropii operatorów Markowa. Jego osiagniecia matematyczne sa szersze. Calość dorobku sklada sie z dwunastu artykulów naukowych opublikowanych w recenzowanych czasopismach o miedzynarodowym zasiegu oraz kilku innych publikacji. Publikacje naukowe dr. Freja dziela sie w zasadzie na dwie podkategorie. Pierwsza z nich, obejmujaca publikacje osiagniecia i kilku prac z tej samej tematyki, które nie weszly w sklad rozprawy, sklada sie z prac poświeconych entropii operatorów Markowa. Druga natomiast dotyczy dzialań grup $\mathbb{Z}^d$, i bardziej ogólnie, grup ze średnia. Chce zaznaczyć na marginesie, ze podana w autoreferacie dr. Freja definicja grup ze średnia jest troche dziwna. Jeśli przyjać te definicje w jej doslownym brzmieniu, to kazda grupa jest grupa ze średnia ($F_n = G$ dla kazdego n). Jeśli uznać to za przeoczenie (drobna pomylke), to az nasuwa sie sugestia, aby zaznaczyć w autoreferacie, ze chodzi o przeliczalne grupy ze średnia. Prace w tej kategorii z grubsza mówiac dotycza róznych form reprezentowalności dzialań grup $\mathbb{Z}^d$ i grup ze średnia, zwlaszcza jako ukladów minimalnych oraz badaniu ich miar niezmienniczych. Jedno z interesujacych twierdzeń dr. Freja w tym kierunku mówi, ze kazdy aperiodyczny uklad generowany przez grupe $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$, i dzialajacy na zwartej, metryzowalnej przestrzeni o topologicznym wymiarze zero, co, przy majacym wlaśnie miejsce, zalozeniu zwartości i metryzowalności oznacza po prostu calkowita niespójność, jest izomorficzny z pewnym ukladem minimalnym.

Podoba mi sie, ze dr Frej nie calkiem stroni od popularyzacji matematyki. Szkoda jedynie, ze napisal tylko jeden artykul tego typu. Powinien spróbować jeszcze raz (aluzja do tytulu artykulu).

Od 2001 roku dr Frej, w sposób ciagly, byl wykonawca w kilku grantach w tym w najbardziej prestizowym grancie Maestro. W zadnym z tych grantów nie pelnil jednak funkcji kierownika.

Należy pogratulować dr. Frejowi aż czterech nagród Rektora Politechniki Wrocławskiej.

Kończąc opis działalności naukowej dr. Freja trzeba zauważyć, że jest on uczonym rozpoznawalnym w międzynarodowym środowisku naukowym. Zauważalna jest liczba zaproszeń do wygłoszenia wykładów na krajowych i zagranicznych konferencjach matematycznych.

Przechodząc do oceny osiągnięcia/rozprawy habilitacyjnej i pozostałego dorobku dr. Freja, stwierdzam, że chociaż dorobek naukowy dr. Freja jest raczej skromny i nieco niszowy, w mojej opinii uprawia on solidną i interesującą matematykę. Potwierdzeniem mojego zdania o niszowości są niskie wskaźniki cytowań (21 cytowań wliczając autocytowania).

Mimo wszystko uznaję dr. Freja za jednego z najlepszych specjalistów w dziedzinie entropijnej teorii operatorów Markowa a jego dorobek uznaję za istotny wkład do szeroko rozumianej teorii układów dynamicznych. W przedstawianej recenzji zadałem tylko jedno pytanie. W istocie pytań takich ciśnie się więcej, recenzja nie jest chyba jednak stosownym miejscem do ich formułowania. Dla mnie jest to w każdym razie oznaka, że tematyka entropijnej teorii operatorów Markowa jest ciągle żywa i ma dobrze zapowiadającą się przyszłość.

Pozostałe prace dr. Freja również przynoszą zauważalny wkład w teorię układów dynamicznych i przedstawiają niezaniedbywalną część jego dorobku naukowego.

Kończąc, jednoznacznie popieram nadanie doktorowi Frejowi tytułu doktora habilitowanego.

Mariusz Urbański

Mariusz Urbański,
Profesor,
Department of Mathematics,
University of North Texas,
P.O. Box 311430,
Denton, TX 76203-1430,
USA
Email address: urbanski@unt.edu
Web: www.math.unt.edu/~urbanski