

Autoreferat

Francisco J. Peña-Benítez

21 września 2023

Spis treści

1	Dyplomy i stopnie naukowe	2
2	Zatrudnienie	2
3	Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2021 r. poz. 478 z późn. zm.).	3
3.1	Wprowadzenie	3
3.2	Zasada zachowania ładunku-dipola	4
3.3	Rozmaitość grupowa i spontaniczne łamanie symetrii	5
3.4	Lokalna grupa fraktonowa	6
3.5	Hydrodynamika	8
3.6	Termodynamika z symetrią dipolową	9
3.6.1	Równanie stanu zachowujące moment dipolowy	9
3.6.2	Relacje termodynamiczne	10
3.7	Hydrodynamika zachowująca moment dipolowy	11
3.7.1	Rozwinięcie gradientowe	11
3.7.2	Hydrodynamika zerowego rzędu	11
3.7.3	Hydrodynamika pierwszego rzędu	15
3.8	Wnioski	18
4	Prezentacja znaczącej działalności naukowej	19
5	Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę.	20
6	Oprócz kwestii wymienionych w pkt. 1-6, wnioskodawca może podać inne informacje, ważne z jego punktu widzenia, dotyczące jego kariery zawodowej.	21

1 Dyplomy i stopnie naukowe

- 2009 - 2013 **PhD in Theoretical Physics**, Universidad Autonoma de Madrid (Hiszpania).
Thesis: “*Anomalous hydrodynamics, from weak to strong coupling*”
Advisor: Prof. Karl Landsteiner.
- 2007 - 2009 **Master in Theoretical Physics**, Univ. Autónoma de Madrid (84/120 ECTS)
(Hiszpania).
- 2004 - 2007 **M.Sc. Thesis:**, University Simón Bolívar (Wenezuela).
Thesis: “*Path formulation of non-commutative gauge theories*”.
Advisor: Prof. Alvaro Restuccia.
- 1999 - 2004 **Bachelor**, Central University of Venezuela (Wenezuela).
Thesis: “*Geometric equations for the Wilson loop in abelian gauge theories*”.
Advisor: Prof. Lorenzo Leal

2 Zatrudnienie

- 2021 - **Adiunkt**
Politechnika Wroclawska, Wroclaw (Poland)
- 2018 - 2021 **Senior Postdoctoral researcher**
Cluster of Excellence ct.qmat, Dresden (Germany)
- 2017 - 2021 **Senior Postdoctoral researcher**
Max-Planck-Institut für Physik komplexer Systeme, Dresden (Germany)
- 2015 - 2017 **INFN postdoctoral position**
INFN - Sezione di Perugia, Perugia (Italy).
- 2013 - 2015 **Postdoctoral fellow**
University of Crete, Heraklion (Greece).
- 2009 - 2013 **Research Assistant**
Univ. Autonoma de Madrid, Madrid (Spain).
- 2004 - 2007 **Research Assistant**
Simon Bolivar University, Caracas (Wenezuela).

3 Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2021 r. poz. 478 z późn. zm.).

Moje osiągnięcia badawcze obejmują różne obszary. Niemniej jednak, ostatnio szczególnie interesuję się tzw. 'Systemami z ograniczeniami kinematycznymi'. W szczególności, w ramach tej habilitacji zostanie omówiony następujący zestaw moich dokonań w tej dziedzinie:

- KT Grosvenor, C Hoyos, **F. Peña-Benítez**, P Surówka, *Hydrodynamics of ideal fracton fluids*, Physical Review Research 3 (2021) 4, 043186
- KT Grosvenor, C Hoyos, **F. Peña-Benítez**, P Surówka, *Space-Dependent Symmetries and Fractons*. Front. in Phys. 9 (2022) 792621
- **F. Peña-Benítez**, *Fractons, symmetric gauge fields and geometry*, Phys.Rev. Research 5 (2023) 1, 013101
- Aleksander Głódkowski, **F. Peña-Benítez**, Piotr Surówka *Hydrodynamics of dipole-conserving fluids*, Physical Review E 107 (2023) 3, 034142

3.1 Wprowadzenie

Fraktony są zwykle identyfikowane jako wzbudzenia układu, które są nieruchome lub mają ograniczoną mobilność - mogą się rozprzestrzeniać wzdłuż niektórych kierunków przestrzennych, ale nie wzdłuż innych. W dwóch przełomowych pracach [1, 2], Pretko pokazał, jak jednoczesne zachowanie ładunku i momentu dipolowego¹ naturalnie prowadzi do fraktonów, i zapoczątkował badania symetrycznych tensorowych teorii cechownaia jako modeli zawierających fraktonowe wzbudzenia bez przerwy masowej. Charakter wzbudzeń w tych teoriach tensorowych kontrastuje z modelami z przerwą masową, które były wcześniej badane w modelach sieciowych (np. kod Haah [3] i model 'X-cube' [4]). Później Gromov rozpoczął systematyczną klasyfikację faz materii fraktonowych opartą na zasadach symetrii, wyróżniając symetrie ładunku i momentu dipolowego oraz ich uogólnienia wyższego rzędu - algebrę multipolową [5].

W tej pracy skupiamy się na przypadku zachowania ładunku i momentu dipolowego. Dokładniej omówimy ogólne właściwości takich systemów, gdy grupa symetrii fraktonowych jest globalna oraz lokalna, i skonstruujemy teorię hydrodynamiczną z dyssypacją w skończonej temperaturze dla systemów zachowujących moment dipolowy.

¹Oraz ogólniej wyższych momentów

3.2 Zasada zachowania ładunku-dipola

Fazy fraktonowe bez przerwy masowej charakteryzują się zachowaniem pewnych ładunków i ich wyższych momentów. Najprostszy przypadek odpowiada zachowaniu ładunku Q i jego momentu dipolowego Q^a , który w n wymiarach przestrzennych na poziomie makroskopowym można sformułować przy pomocy gęstości ładunku ρ jako

$$\frac{d}{dt} \int d^n x (\lambda + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x}), \rho = 0, \quad (1)$$

gdzie $\lambda, \boldsymbol{\beta}$ są dowolnymi parametrami. W układzie z takim prawem zachowania ładunki są nieruchome, podczas gdy dipole mogą swobodnie się poruszać. Faktycznie, podobnie jak w przypadku pędu i momentu pędu², oba ładunki są zachowane, gdy tylko pojedyncze (ogólne) równanie ciągłości

$$\partial_t n + \partial_a \partial_b J^{ab} = 0, \quad a, b = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

jest spełnione. Cechą wyróżniającą tę klasę układów jest to, że ładunek rozprzestrzenia się za pomocą tensorowego prądu. Bezpośrednią konsekwencją takiego prawa zachowania jest to, że lokalna wersja symetrii wymaga obecności pól cechowania A_0, A_{ab} transformujących się następująco $A_0 \rightarrow A_0 - \partial_t \lambda$, i $A_{ab} \rightarrow A_{ab} + \partial_a \partial_b \lambda$, a 'pola cechowania' oddziałują z materią fraktonową w sposób następujący

$$S = S_0[A_0, A_{ab}] + \int d^{n+1}x (nA_0 + J^{ab}A_{ab}). \quad (3)$$

Tego rodzaju teorie zostały zaproponowane jako uogólnienie elektrodynamiki [2]. Jednakże, ze względu na nietypowe przekształcenia pól, nie jest jasne, w jakim sensie są to rzeczywiste teorie cechowania. Dodatkowo, z tego punktu widzenia nie jest oczywiste, czy możliwe jest przeniesienie teorii przestrzeni z krzywizną bez naruszenia symetrii cechowania [6].

Aby zrozumieć kontrast między przekształceniami czasoprzestrzennymi, a wprowadzoną wyżej symetrią cechowania, warto zauważyć, że ładunek dipolowy Q^a nie jest niezmienniczy względem transformacji przestrzennych. Głównym powodem jest to, że jego wartość zmienia się, gdy przesuniemy początek układu odniesienia, w przeciwieństwie do ładunku Q , który jest niezmienniczy. Jest to nietypowa cecha wewnętrznych symetrii. W rzeczywistości, po dokładnej analizie działania transformacji czasoprzestrzennych, obrotów i przekształceń generowanych przez ładunki fraktonowe o generatorach odpowiednio H, P_a, L_{ab}, Q^a, Q , można dojść do wniosku, że cały zbiór przekształceń tworzy ciągłą grupę Lie'go \mathcal{G} z odpowiadającą jej algebrą, która zdefiniowana jest poprzez nawiasy Lie'go [7]

$$\begin{aligned} [P_a, Q^b] &= \delta_a^b Q, \\ [P_a, L_{bc}] &= \delta_{ac} P_b - \delta_{ab} P_c, \\ [Q^a, L_{bc}] &= \delta_c^a Q_b - \delta_b^a Q_c, \\ [L_{ab}, L_{bc}] &= \delta_{ac} L_{bd} - \delta_{ad} L_{bc} - \delta_{bc} L_{ad} + \delta_{bd} L_{ac}. \end{aligned} \quad (4)$$

²W układzie z jednoczesnym zachowaniem pędu i momentu pędu, po zachowaniu pędu następuje zachowanie momentu pędu.

Ta algebra jasno pokazuje, że zachowanie ładunku i momentu dipolowego są konsekwencją grupy symetrii czasoprzestrzennych. Kontrastuje to z przypadkiem zwykłego ładunku $U(1)$. Analogiczny przykład to zachowanie masy w teoriach Galileusza [8]. Faktycznie, równania (4) wykazują podobieństwo do algebry Bargmanna, gdy generator przesunięć Galileusza utożsamimy z generatorem dipola Q^a , a masa z ładunkiem Q . Patrz także [9, 10] w celu zrozumienia podobieństw z teoriami Carrolla.

3.3 Rozmaitość grupowa i spontaniczne łamanie symetrii

W tej sekcji nadamy geometryczną interpretację grupie \mathcal{G} w kontekście przestrzeni Heisenberga [11, 12] i rozważymy zjawisko spontanicznego złamania symetrii.

Algebra Heisenberga o generatorach $T^A = (P_a, Q^a, Q)$ ma $2n + 1$ wymiarów, a jej niezzerowe nawiasy wyglądają następująco:

$$[P_a, Q^b] = \delta_a^b Q. \quad (5)$$

Jest to więc podalgebra całej algebry fraktonowej wprowadzonej powyżej (patrz równanie (4)). Aby uzyskać intuicyjny obraz co do związku grupy Heisenberga z czasoprzestrzenią, przypomnijmy, że n -wymiarowa przestrzeń rzeczywista z działaniem składania jest warstwą grupy euklidesowej i grupy rotacji, tj. $\mathbb{R}^n = E_n/SO(n)$. Analogicznie definiujemy przestrzeń (fraktonową) Heisenberga jako $\mathbb{H}_{2n+1,1} = \mathcal{G}/SO(n)$.

Aby parametryzować taką przestrzeń, wprowadzamy elementy warstwy o współrzędnych (y^0, y^a, z_a, ϕ) za pomocą odwzorowania wykładniczego

$$\Omega = e^{y^0 H + y^a P_a} e^{z_a Q^a} e^{\phi Q}. \quad (6)$$

Korzystając z działania grupy na siebie samą, definiujemy przekształcony element warstwy jako $\Omega' = g\Omega e^{-\beta^{ab} L_{ab}}$, gdzie $g = e^{\zeta^0 H + \zeta^a P_a} e^{\beta_a Q^a + \lambda Q} e^{\beta^{ab} L_{ab}}$. Transformacje infinitezymalne wyglądają następująco

$$\begin{aligned} \delta y^0 &= \zeta^0, & \delta y^a &= y^b \beta_b^a + \zeta^a, \\ \delta z_a &= z_b \beta^b_a + \beta_a, & \delta \phi &= \lambda - \beta_a y^a, \end{aligned} \quad (7)$$

a formę Maurera-Cartana $\mathcal{A} = \Omega^{-1} d\Omega$ można zapisać jako

$$\mathcal{A} = \tau H + e^a P_a + \omega_a Q^a + v Q, \quad (8)$$

gdzie $\tau = dy^0$, $e^a = dy^a$, $\omega_a = dz_a$, $v = d\phi + z_a dy^a$. Równania Maurera-Cartana implikują $dv = \omega_a \wedge e^a$. Ponadto, (niezmiennicze) pola wektorowe odwrotne są określone jako

$$t = \frac{\partial}{\partial y^0}, \quad \mathcal{E}_a = \frac{\partial}{\partial y^a} - z_a \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \bar{\mathcal{E}}^a = \frac{\partial}{\partial z_a}, \quad V = \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (9)$$

Zauważmy, że definiują one bazę, w której \mathcal{E}_a i $\bar{\mathcal{E}}^b$ nie komutują. W szczególności, ich nawias Lie'go to $[\mathcal{E}_a, \bar{\mathcal{E}}^b] = \delta_a^b V$, co zgadza się z algebrą Heisenberga w równaniu (5). Od tej pory będziemy nazywać tę przestrzeń przestrzenią Heisenberga $\mathbb{H}_{2n+1,1}$.

Ponieważ naszym celem jest skonstruowanie teorii dla spontanicznie złamanej symetrii ładunku Q , wprowadzamy fizyczną czasoprzestrzeń \mathbb{M}_{n+1} jako przestrzeń bazową wiązki włóknistej, której przestrzeń całkowita to $\mathbb{H}_{2n+1,1}$. Bez utraty ogólności projekcję z $\mathbb{H}_{2n+1,1}$ na \mathbb{M}_{n+1} można ustalić jako $y^0 = x^0$, $y^a = \delta_\mu^a x^\mu$. To "ustalenie cechowania" identyfikuje przekształcenia współrzędnych na rozmaitości bazowej z parametrami ξ^μ z wewnętrznymi przesunięciami i rotacjami, tak że

$$\xi^\mu = \zeta^\mu + \delta_a^\mu \delta_\nu^b \beta^a{}_{,b} x^\nu. \quad (10)$$

Aby skonstruować naszą efektywną teorię Nambu-Goldstona'a, wygodnie jest narzucić tzw. odwrotny warunek Higgosa [13, 14, 15]. Ten warunek usuwa z systemu masywne stopnie swobody. W tym kontekście odwrotny mechnaizm Higgosa wymaga $z_a = -\partial_a \phi$. Ostatecznie pochodne kowariantne pola Nambu-Goldstone'a wyglądają następująco

$$v_0 = \partial_0 \phi, \quad \omega_{0a} = -\partial_a \partial_0 \phi, \quad \omega_{ab} = -\partial_a \partial_b \phi. \quad (11)$$

Mając skonstruowane odpowiednie niezmienniki układu, możemy zapisać najbardziej ogólne efektywne działanie dla spontanicznie złamanej fazy jako

$$S_{SSB} = \int d^{n+1}x, \mathcal{L}(v_0, (\omega_{0a})^2, (\omega_{ab})^2). \quad (12)$$

3.4 Lokalna grupa fraktonowa

Powyższy formalizm naturalnie umożliwia użycie procedury cechowania dla symetrii fraktonowych, analogicznie jak w teoriach grawitacji. W tym celu posłużymy się metodą opisaną w pracy [16]. Wykorzystując tę technikę, współrzędne czasoprzestrzeni interpretuje się jako pola Stueckelberga związane z łamaniem lokalnych przekształceń translacji. W naszym podejściu zanurzyliśmy czasoprzestrzeń w większej przestrzeni, dlatego też w pełnej analogii możemy oczekiwać, że lokalne przekształcenia fraktonowe mogą być łamane za pomocą pól Stueckelberga $(z_a(x), \phi(x))$. W takim przypadku koneksja musi być dana jako $\mathcal{A} = \Omega^{-1}(d + \tilde{\mathcal{A}})\Omega$, gdzie Ω jest zdefiniowane w równaniu (6), a $\tilde{\mathcal{A}}$ to odpowiadające pole cechowania. Ponieważ składowe $\tilde{\mathcal{A}}$ wzdłuż kierunków algebry są niezależne, wygodnie jest je parametryzować jako

$$\tilde{\mathcal{A}} = \tilde{\tau}H + \tilde{e}^a P_a + \tilde{\omega}_a Q^a + (\tilde{v} + y^a \tilde{\omega}_a)Q + \frac{1}{2}\omega^{ab}L_{ab}. \quad (13)$$

Z definicji koneksja \mathcal{A} będzie niezmiennicza względem generatorów odpowiadającym złamanym symetriom. Z drugiej strony, podczas działania obrotów będzie ona zachowywać się jak pole cechowania i można ją zapisać jako

$$\mathcal{A} = \tau H + e^a P_a + \omega_a Q^a + vQ + \frac{1}{2}\omega^{ab}L_{ab}, \quad (14)$$

gdzie $\tau = dy^0 + \tilde{\tau}$, $e^a = Dy^a + \tilde{e}^a$, $\omega_a = Dz_a + \tilde{\omega}_a$, $v = d\phi + z_a e^a + \tilde{v}$, a zewnętrzna pochodna kowariantna jest definiowana jako $Dp^a = dp^a - \omega^a{}_b \wedge p^b$. W szczególności interpretujemy (τ, e^a)

jako lokalną bazę z odwrotnymi wielonogami (t^μ, E^μ, a) , a ω^{ab} jako koneksja spinowa na rozmaitości bazowej. Z ich pomocą definiujemy metrykę czasoprzestrzeni $G_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} - \tau_\mu \tau_\nu$.

Podczas infinytezymalnej translacji $g(x) = 1 + \beta_a(x)Q^a + (\lambda(x) + y^a \beta_a(x))Q$, pola Stueckelberga i pola cechowania przekształcają się jak

$$\delta\phi = \lambda, \quad \delta z_a = \beta_a, \quad \delta\omega^{ab} = 0, \quad (15)$$

$$\delta\tilde{\omega}_a = -D\beta_a, \quad \delta\tilde{v} = -d\lambda - e^a \beta_a. \quad (16)$$

Tak jak wcześniej, identyfikujemy współrzędne wewnętrzne i fizyczne jako $(y^0 = x^0, y^a = \delta_\mu^a x^\mu)$, a także pole kalibru \tilde{v} jest dopasowane do wzorca $\tilde{v} = A_0\tau$. Dwuwymiarowa forma krzywizny teorii jest zdefiniowana jako $\mathcal{R} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$ i może być rozwinięta jako

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = & d\tau H + De^a P_a + \frac{1}{2} R^{ab} L_{ab} + (F_a + z_b R^b{}_{,a}) Q^a + \\ & (f + z_a De^a) Q, \end{aligned} \quad (17)$$

gdzie $R^{ab} = D\omega^{ab}$ to krzywizna związana z koneksją spinową, a natężenia pola fraktonowego

$$F_a = D\tilde{\omega}_a, \quad f = d\tilde{v} + e^a \wedge \tilde{\omega}_a. \quad (18)$$

Co ciekawe, F_a i f nie są niezmiennicze względem wewnętrznych translacji, jeśli krzywizna R^{ab} i torsja przestrzenna De^a nie znikają [17], co uzasadnia obecność pól Stueckelberga. Z tego punktu widzenia złamanie zachowania dipola ma taki samo źródło jak złamanie niezmienniczości względem translacji na krzywej przestrzeni [16, 18].

Bez utraty ogólności i dla uproszczenia zakładamy brak torsji ($d\tau = De^a = 0$). Takie ograniczenia pozwalają τ być formą zamkniętą, co pozwala wyrazić koneksję spinową poprzez wielonogi. Te warunki oznaczają, że f staje się niezmiennicze względem cechowania.

Dla wygody wprowadzamy redefinicję pola

$$\tilde{\omega}_a = E^\mu{}_a \partial_\mu A_0 \tau + A_{ab} e^b + \theta_a \tau + C_{ba} e^b, \quad (19)$$

gdzie $A_{ab} = A_{ba}$, a $C_{ab} = -C_{ba}$. Wykorzystując tę parametryzację, pole monopola przybiera postać

$$f = \theta_a e^a \wedge \tau - C_{ab} e^a \wedge e^b, \quad (20)$$

co oznacza, że podczas wewnętrznych transformacji fraktonowych $\delta\theta_a = \delta C_{ab} = 0$. Ogólnie rzecz biorąc, nawet na płaskiej przestrzeni te pola będą masywne. W związku z tym w przypadku niskich energii można narzucić $f = 0$.

Ostatecznie zbiór niezależnych pól cechowania to (A_0, A_{ab}) , i korzystając z równań (16) dochodzimy do wniosku, że ich reguła transformacji to

$$\delta A_{ab} = E^\mu{}_a E^\nu{}_b \nabla_\mu \nabla_\nu \lambda, \quad \delta A_0 = -t^\mu \partial_\mu \lambda, \quad (21)$$

gdzie $\nabla_\mu \zeta_\nu = \partial_\mu \zeta_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \zeta_\alpha$, a połączenie $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = t^\alpha \partial_\mu \tau_\nu + E^a{}_\mu D_\nu e^a$. Ostatnim niezbędnym składnikiem jest niezmiennicza forma objętości, którą definiujemy jako $vol_{n+1} \equiv \star 1 =$

$\det(\tau, e^a)d^{n+1}x$. Biorąc to wszystko pod uwagę, można wyrazić działanie kwadratowe dla pól cechowania, niezmiennicze względem dyfeomorfizmów, jako

$$S = -\frac{1}{2} \int \star(F_a + z_b R^b{}_a) \wedge (F_a + z_c R^c{}_a). \quad (22)$$

Zauważmy, że jeśli weźmiemy granicę przestrzeni płaskiej ($e^a = dx^a$, $\tau = dx^0$), działanie staje się niezależne od z_a , co pozwala odzyskać niezmienniczość ze względu na symetrie cechowania. Możemy więc napisać teorię niezmienniczą względem pełnej grupy cechowania

$$S = -\frac{1}{2} \int \star F_a \wedge F_a = \int \left[F_{0ab} F_{0ab} - \frac{1}{2} F_{abc} F_{abc} \right], \quad (23)$$

co jest zgodne z teorią zbudowaną w [1]. Teoria ta jest niezmiennicza ze względu na transformacje cechowania dyskutowane przed równaniem (3).

3.5 Hydrodynamika

Hydrodynamika oferuje fenomenologiczny opis oddziałujących układów wielu ciał. Skupia się na podzbiore wielkości fizycznych, które pozostają zachowane przy niskich energiach, takich jak liczba cząsteczek lub pęd. Egzotyczne wzbudzenia zachowują nie tylko ładunek, ale także jeden lub kilka wyższych momentów ładunku. Wynika z tego, że niskie energie charakteryzują się długim czasem termalizacji, subdyfuzyjnym zachowaniem układów, które nie zachowują pędu oraz inną strukturą równań ciągłości.

Aby skonstruować teorię hydrodynamiczną dla teorii zachowujących moment dipolowy, przydatne jest zrozumienie własności transformacyjnych odpowiadających zachowanym prądom. W tym celu rozważamy układ wielu ciał, który jednocześnie zachowuje energię H , pęd P_i , ładunek $U(1)$ Q , moment dipolowy Q^i i moment pędu L_{ij} . Przy niskich energiach ładunki zachowane można wyrazić w postaci gęstości lokalnych.

Dodatkowo, narzucimy niezmienniczość względem odbić w przestrzeni i czasie. Niskoenergetyczna dynamika bliska równowadze termodynamicznej będzie dotyczyła bezmasowych stopni swobody. Oczywiście, istotne pozostają tylko lokalne gęstości zachowanych wielkości, ponieważ oczekujemy, że wielkości niezachowane szybko zanikają w układzie. Dlatego też równania hydrodynamiczne stanowią lokalne prawa zachowania

$$\begin{aligned} \partial_t n + \partial_i \partial_j J^{ij} &= 0, \\ \partial_t p_i + \partial_j T^{ji} &= 0, \\ \partial_t \epsilon + \partial_i J_\epsilon^i &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Należy zauważyć, że ani zachowanie momentu dipolowego, ani momentu pędu nie prowadzą do dodatkowych równań hydrodynamicznych, ponieważ ich zachowanie wynika z równań (24), o ile tensor naprężeń T^{ij} jest symetryczny.

Zauważmy, że równanie (5) implikuje, że pęd nie jest niezmienniczy podczas transformacji generowanej przez Q^i . W rzeczywistości transformuje się on w następujący sposób:

$$\delta_\beta P_i = -\beta_j Q. \quad (25)$$

W rezultacie gęstość pędu i tensor naprężeń muszą transformować się podczas przesunięcia dipola w następujący sposób:

$$\delta_\beta p_i = -n\beta_i, \quad \delta_\beta T^{ij} = \partial_k J^{ij} \beta_k - \partial_k J^{kj} \beta_i - \partial_k J^{ki} \beta_j. \quad (26)$$

Ta własność transformacji została również uzyskana w Ref. [19], umieszczając układ w przestrzeni zakrzywionej i sprzęgając go z arystotelesowskimi źródłami tła oraz odpowiednimi polami cechowania. Jak zobaczymy w kolejnych sekcjach, te nietypowe właściwości transformacji prowadzą do wielu egzotycznych cech w hydrodynamice (i termodynamice) płynów zachowujących moment dipolowy.

3.6 Termodynamika z symetrią dipolową

Termodynamika systemów zachowujących moment dipolowy nie może być uchwycona standardowym podejściem z podręcznika. Wymaga ona modyfikacji, które systematycznie uwzględniają ograniczenia kinematyczne wynikające z zachowania momentu dipolowego. W tej sekcji konstruujemy spójną teorię termodynamiczną, w której uwzględnione jest zachowanie momentu dipolowego.

3.6.1 Równanie stanu zachowujące moment dipolowy

Gęstość energii wewnętrznej układu w równowadze jest funkcją gęstości entropii i zachowanych ładunków, na przykład $\epsilon \equiv \epsilon(n, s, p_i)$. Jednakże, ze względu na nieliniową strukturę algebraiczną równań (4), systemy zachowujące moment dipolowy nie są uniwersalne. W naszym przypadku rozważamy kombinację p_i/n , która ma symetrię przesunięć ze względu na transformacje dipolowe, analogicznie do modów Nambu-Goldstone'a; dlatego może dawać wkład za pośrednictwem niezmienniczej kombinacji $V_{ij} = \partial_i(n^{-1}p_j)$. Konieczne jest wprowadzenie odpowiedniej zmiennej sprzężonej F_{ij} , która, jak zobaczymy, może być interpretowana jako strumień dipoli. Stąd wnioskujemy, że różne (stałe) wartości V_{ij} charakteryzują różne stany termodynamiczne. Dla takich systemów postulujemy, że pierwsza zasada termodynamiki ma postać

$$d\epsilon = Tds + \mu dn + F_{ij}dV_{ij}. \quad (27)$$

Oprócz niezmienniczości ze względu na obroty zakładamy również, że mikroskopowo system zachowuje parzystość. Zauważywszy, że podczas przekształceń parzystości $V_{[ij]}$ zachowuje się jak pseudoskalar, a w dwóch i trzech wymiarach jak pseudowektor, dochodzimy do wniosku, że gęstość energii musi zależeć tylko od symetrycznej części V_{ij} . Następnie ciśnienie układu jest definiowane za pomocą standardowego związku termodynamicznego

$$P = Ts + \mu n - \epsilon, \quad dP = nd\mu + sdT - F_{ij}dV_{(ij)}. \quad (28)$$

Od teraz będziemy odnosić się do tensora symetrycznego jako V_{ij} . W naszej konstrukcji przyjmiemy, jako zmienne hydrodynamiczne, n, ϵ, p_i . Z tego powodu wygodnie jest używać gęstości entropii jako potencjału termodynamicznego. W tym kontekście

$$ds = \frac{1}{T}d\epsilon - \frac{\mu}{T}dn - \frac{F_{ij}}{T}dV_{ij}, \quad (29)$$

gdzie zdefiniowaliśmy wielkości termodynamiczne

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial s}{\partial \epsilon}, \quad \frac{\mu}{T} = -\frac{\partial s}{\partial n}, \quad \frac{F_{ij}}{T} = -\frac{\partial s}{\partial V_{ij}}. \quad (30)$$

Związek $s \equiv s(\epsilon, n, V_{ij})$ jest interpretowany jako równanie stanu, a wielkości termodynamiczne są rozumiane jako funkcje zmiennych zachowujących moment dipolowy (ϵ, n, V_{ij}) .

3.6.2 Relacje termodynamiczne

W kolejnej sekcji badamy liniową hydrodynamikę wokół stanu równowagi globalnej ($n = n_0, \epsilon = \epsilon_0, V_{ij} = 0$). Dlatego przydatne będzie wprowadzenie zestawu tożsamości termodynamicznych, które pozwolą nam związać zmiany (ϵ, n, V_{ij}) z ich odpowiadającymi zmiennymi sprzężonymi.

W tym celu rozwijamy funkcję gęstości entropii wokół stanu równowagi do drugiego rzędu we fluktuacjach

$$\begin{aligned} s = s_0 - \frac{\mu_0}{T_0} \delta n + \frac{1}{T_0} \delta \epsilon + \frac{1}{2} s_{nn} \delta n^2 + \frac{1}{2} s_{\epsilon\epsilon} \delta \epsilon^2 + s_{n\epsilon} \delta \epsilon \delta n \\ - \frac{1}{2T_0} f_{||} \delta V_{kk}^2 - \frac{1}{2T_0} f_{\perp} \delta V_{\langle ij \rangle}^2, \end{aligned} \quad (31)$$

gdzie s_0 to entropia obliczona w stanie równowagi. Bezśladowa symetryzacja część tensora A_{ij} zdefiniowana jest jako $A_{\langle ij \rangle} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji} - \frac{2}{d} A_{kk} \delta_{ij})$, a $A_{kk} = \delta_{ik} A_{ik}$ oznacza ślad. Stabilność termodynamiczna narzuca następujące ograniczenia

$$f_{||}, f_{\perp} \geq 0, \quad s_{\epsilon\epsilon}, s_{nn} < 0, \quad s_{n\epsilon}^2 - s_{nn} s_{\epsilon\epsilon} \leq 0. \quad (32)$$

Dlatego zmiany wielkości termodynamicznych, równanie (30), można wyrazić jako

$$\begin{aligned} \delta \frac{1}{T} &= s_{\epsilon\epsilon} \delta \epsilon + s_{n\epsilon} \delta n, \\ \delta \frac{\mu}{T} &= -s_{n\epsilon} \delta \epsilon - s_{nn} \delta n, \\ \delta F_{ij} &= f_{||} \delta V_{kk} \delta_{ij} + f_{\perp} \delta V_{\langle ij \rangle}. \end{aligned} \quad (33)$$

Następnie, po użyciu równań (33) i równania (28), możemy zapisać zmianę ciśnienia względem zmiennej termodynamicznej jako

$$\delta P = -T_0 (P_{\epsilon} \delta \epsilon + P_n \delta n), \quad (34)$$

gdzie zdefiniowaliśmy

$$\begin{aligned} P_{\epsilon} &= n_0 s_{n\epsilon} + (P_0 + \epsilon_0) s_{\epsilon\epsilon}, \\ P_n &= n_0 s_{nn} + (P_0 + \epsilon_0) s_{n\epsilon}. \end{aligned} \quad (35)$$

3.7 Hydrodynamika zachowująca moment dipolowy

W tej sekcji opracowujemy opis hydrodynamiczny dla płynów zachowujących moment dipolowy, stosując formalizm prądu entropii. Konstruujemy relacje konstytutywne, stosując rozwinięcie w pochodnych i narzucamy drugą zasadę termodynamiki. Na początek rozważamy hydrodynamikę rzędu pierwszego, a następnie badamy liniowe poprawki pierwszego rzędu. Po uzyskaniu ogólnych relacji konstytutywnych, współczynniki transportu są ograniczone przez warunek produkcji entropii.

3.7.1 Rozwinięcie gradientowe

Podążając za klasycznym paradygmatem dynamiki płynów, rozważamy niskoenergetyczny układ bliski równowadze, która jest opisana zmiennymi hydrodynamicznymi, czyli gęstościami n, ϵ, p_i ładunków zachowanych. Makroskopowe prądy są wtedy wyrażane jako lokalne funkcje zachowanych gęstości systematycznie uporządkowanych w pochodnych. W trakcie tworzenia tych relacji konstytutywnych pojawia się zestaw nieznanymi parametrów, nazywanych współczynnikami transportu, które niezerowe wartości są następnie identyfikowane, narzucając prawa termodynamiki oraz relacje Onsagera.

Mimo to, nietypowa struktura symetrii dipolowej sugeruje, że powinniśmy rozważyć moment pędu systemu p_i jako rzędu $\mathcal{O}(p_i) \sim \mathcal{O}(\partial_i)^{-1}$ w pochodnych, co oznacza, że $V_{ij} \sim \mathcal{O}(\partial_i)^0$. Dlatego nasze rozwinięcie jest definiowane w odniesieniu do rzędu, w jakim rozważane są równania ruchu. Na przykład, będziemy odnosić się do hydrodynamiki rzędu n , jeśli zestaw równań różniczkowych jest konstruowany w następujący sposób³:

$$\begin{aligned}\partial_t \epsilon &= -\partial_i J_\epsilon^i + \mathcal{O}(\partial_i)^{2n+3}, \\ \partial_t p_i &= -\partial_j T^{ji} + \mathcal{O}(\partial_i)^{2n+2}, \\ \partial_t n &= -\partial_i \partial_j J^{ij} + \mathcal{O}(\partial_i)^{2n+3}.\end{aligned}\tag{36}$$

3.7.2 Hydrodynamika zerowego rzędu

Zacniemy od wyprowadzenia relacji konstytutywnych odpowiadających hydrodynamicie rzędu zerowego dla płynów zachowujących moment dipolowy. Nasze wyniki stanowią uzupełnienie teorii skonstruowanej w Ref. [20], gdzie idealne równania konstytutywne dla układów w zerowej temperaturze zostały znalezione za pomocą formalizmu nawiasów Poissona.

Lokalna postać pierwszej zasady termodynamiki wyprowadzona z równania (29) wygląda w następujący sposób:

$$\begin{aligned}T\partial_t s &= \partial_t \epsilon - \mu \partial_t n - F_{ij} \partial_t V_{ij}, \\ &= \partial_t \epsilon - \partial_i \left(F_{ij} \partial_t \left(\frac{p_j}{n} \right) \right) - \tilde{\mu} \partial_t n - V_j \partial_t p_j,\end{aligned}\tag{37}$$

³Warto zauważyć, że pochodne czasowe na powłoce masy, będące rozważanymi zmiennymi, nie są niezależne od gradientów przestrzennych. W szczególności mamy hierarchię $\mathcal{O}(\partial_t) \sim \mathcal{O}(\partial_i)^2$.

w ostatnim kroku zdefiniowaliśmy efektywny potencjał chemiczny i prędkość:

$$\tilde{\mu} = \mu - \frac{V_i p_i}{n}, \quad V_i = -\frac{\partial_j F_{ji}}{n}. \quad (38)$$

Korzystając z równań ruchu (24), można przekształcić równanie (37) do następującej postaci:

$$T\partial_t s = -\partial_i \mathcal{E}^i + \tilde{\mu} \partial_i \partial_j J^{ij} + V_i \partial_j T^{ji}, \quad (39)$$

gdzie zdefiniowaliśmy *przesunięty prąd energii*:

$$J_\epsilon^i = \mathcal{E}^i - F_{ij} \partial_t \left(\frac{p_j}{n} \right). \quad (40)$$

Przy użyciu równania (39) warunek produkcji entropii $\partial_t s + \partial_i S^i \geq 0$ możemy wyrazić jako:

$$\partial_i S^i - \frac{1}{T} \partial_i \mathcal{E}^i + \frac{\tilde{\mu}}{T} \partial_i \partial_j J^{ij} + \frac{V_i}{T} \partial_j T^{ji} \geq 0. \quad (41)$$

Po połączeniu relacji termodynamicznej równanie (28) z równaniem (41) i serii algebraicznych manipulacji można stwierdzić, że związki konstytutywne hydrodynamiki zerowego rzędu przyjmują poniższą postać:

$$\begin{aligned} J_\epsilon^i &= (\epsilon + P)V_i - F_{ij} \partial_t \left(\frac{p_j}{n} \right) + \alpha \partial_i \frac{1}{T}, \\ J^{ij} &= -F_{ij}, \\ T^{ij} &= P\delta_{ij} + V_i p_j + V_j p_i + \partial_k F_{ij} \frac{p_k}{n} + F_{ij} V_{kk}, \\ S^i &= \frac{1}{T} \mathcal{E}^i + P \frac{V_i}{T} - \frac{\tilde{\mu}}{T} \partial_j J^{ij} - \frac{V_j}{T} T^{ij} \\ &\quad + \frac{V_j}{T} F_{ik} \partial_j \frac{p_k}{n} + \frac{V_j}{T} \partial_k \left(F_{ij} \frac{p_k}{n} - F_{kj} \frac{p_i}{n} \right) \end{aligned} \quad (42)$$

gdzie α jest współczynnikiem transportu, który może być interpretowany jako przewodnictwo cieplne systemu, spełniającym nierówność:

$$\alpha \geq 0. \quad (43)$$

Warto zaznaczyć, że tensor naprężeń transformuje się w odpowiedni sposób przy transformacji dipolowej równanie (26). Ponadto można pokazać, że prąd entropii upraszcza się do postaci:

$$S^i = sV_i + \frac{\alpha}{T} \partial_i \frac{1}{T}. \quad (44)$$

Należy podkreślić, że oba człony w prądzie entropii są tego samego rzędu w rozwinięciu gradientowym. Dlatego w przypadku układów zachowujących moment dipolowy, teoria płynów idealnych, opracowana w pracy Ref. [7], odpowiada dokładnemu dostrojeniu $\alpha = 0$, a nie hydrodynamicznie rzędu zerowego. Dzieje się tak dlatego, że hydrodynamika zerowego rzędu dopuszcza istnienie współczynnika transportu związanego z dyssypacją co kontrastuje z płynami niezachowującymi momentu dipolowego.

Przejdźmy teraz do analizy wzbudzeń hydrodynamicznych. W tym celu rozważamy liniowe perturbacje wokół stanu równowagi ($\epsilon_0, n_0, \mathbf{p}_0 = 0$). Stąd wynika, że fluktuacje przyjmują następującą postać

$$n = n_0 + \delta n, \quad \epsilon = \epsilon_0 + \delta \epsilon, \quad \mathbf{p} = \delta \mathbf{p}, \quad (45)$$

a odpowiadające im prądy (42) przyjmują poniższą formę:

$$\begin{aligned} J_\epsilon^i &= (\epsilon_0 + P_0)V_i + \alpha \partial_i \frac{1}{T}, \\ J^{ij} &= -F_{ij}, \quad T^{ij} = (P_0 + \delta P)\delta_{ij}. \end{aligned} \quad (46)$$

Aby wyznaczyć ewolucję zmiennych hydrodynamicznych, należy wyrazić wszystkie wielkości występujące w powyższych prądach przy pomocy gęstości odpowiadającym zachowanym wielkościom $\delta n, \delta \epsilon$ i $\delta \mathbf{p}$. W tym celu należy skorzystać z relacji termodynamicznych równania (33) i (34), a także definicji efektywnej prędkości równanie (38). Po tym przekształceniu równania hydrodynamiczne zerowego rzędu przyjmują następującą postać:

$$\begin{aligned} \partial_t \delta n - \bar{f} \nabla^2 \nabla \cdot \delta \mathbf{p} &= 0, \\ \partial_t \delta \mathbf{p} - T_0 P_\epsilon \nabla \delta \epsilon - T_0 P_n \nabla \delta n &= 0, \\ \partial_t \delta \epsilon + \alpha s_{ee} \nabla^2 \delta \epsilon + \alpha s_{ne} \nabla^2 \delta n - \bar{f} \frac{\epsilon_0 + P_0}{n_0} \nabla^2 \nabla \cdot \delta \mathbf{p} &= 0 \end{aligned} \quad (47)$$

gdzie $\bar{f} = n_0^{-1} \left(f_{\parallel} + f_{\perp} \frac{d-1}{d} \right)$.

Aby rozwiązać ten układ równań i znaleźć relację dyspersji dla wzbudzeń hydrodynamicznych, stosujemy dekompozycję Fouriera, która pozwala przedstawić powyższy układ jako liniowy układ równań zawierający częstotliwości i wektory falowe (ω, \mathbf{k}_i) . Dla tego układu równań sektor poprzeczny ($\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{p} = 0$) zawiera trywialne wzbudzenia $\omega_{shear} = 0$.

Sektor podłużny ($\mathbf{k} \times \delta \mathbf{p} = 0, \delta n, \delta \epsilon$) jest natomiast określony przez poniższy wielomian charakterystyczny:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^3 + ia_2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - \frac{\omega}{\omega_0} - ia_1 = 0 \quad (48)$$

gdzie $\omega_0 = \sqrt{a_0} k^2$, oraz zdefiniowaliśmy

$$\begin{aligned}
a_0 &= -T_0 \bar{f} n_0^{-1} [n_0 P_n + (\epsilon_0 + P_0) P_\epsilon], \\
a_1 &= -a_0^{-\frac{3}{2}} \alpha T_0 \bar{f} [s_{n\epsilon} P_\epsilon - s_{\epsilon\epsilon} P_n], \\
a_2 &= -a_0^{-\frac{1}{2}} \alpha s_{\epsilon\epsilon}.
\end{aligned} \tag{49}$$

Nierówności (32) i (43) implikują $a_0 \geq 0$ oraz $0 \leq a_1 < a_2$.
Rozwiązania równania (48) to

$$\begin{aligned}
\frac{\omega_1}{\omega_0} &= -i \frac{x}{3} \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right) - \frac{1}{3} i a_2, \\
\frac{\omega_2}{\omega_0} &= \frac{x}{2\sqrt{3}} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + i \frac{x}{6} \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right) - i \frac{1}{3} a_2, \\
\frac{\omega_3}{\omega_0} &= -\frac{x}{2\sqrt{3}} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + i \frac{x}{6} \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right) - i \frac{1}{3} a_2.
\end{aligned} \tag{50}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
x^2 &= 3 - a_2^2, \\
2y^3 &= -27a_1 + 9a_2 - 2a_2^3 \\
&+ 3\sqrt{81a_1^2 + 6a_1a_2(2a_2^2 - 9) - 3a_2^2 + 12}.
\end{aligned} \tag{51}$$

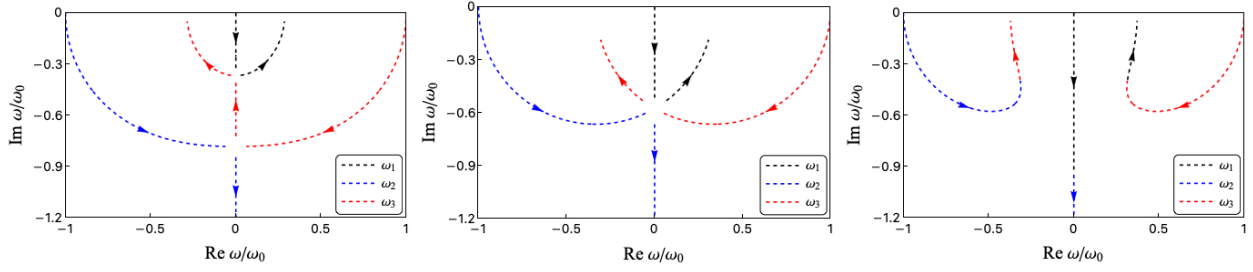
Zauważmy, że wszystkie wzbudzenia są proporcjonalne do k^2 .

Powyższe rozwiązania można rozwinąć w granicy małych i dużych wartości przewodnicstwa cieplnego. W pierwszym przypadku, co odpowiada $a_2 \ll 1$ przy stałym ilorazie a_1/a_2 , wzbudzenia przyjmują następującą postać:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &\approx -i\sqrt{a_0} a_1 k^2, \\
\omega_2 &\approx \sqrt{a_0} \left(1 - \frac{1}{2} i (a_2 - a_1) \right) k^2 \\
\omega_3 &\approx -\sqrt{a_0} \left(1 + \frac{1}{2} i (a_2 - a_1) \right) k^2.
\end{aligned} \tag{52}$$

Podczas gdy w przypadku dużych wartości a_2 i stałym ilorazie a_1/a_2 asymptotyczne zachowanie relacji dyspersji to:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &\approx \sqrt{a_0} \left(\sqrt{\frac{a_1}{a_2}} - i \frac{a_2 - a_1}{2a_2^2} \right) k^2, \\
\omega_2 &\approx -i\sqrt{a_0} \left(a_2 - \frac{a_2 - a_1}{a_2^2} \right) k^2, \\
\omega_3 &\approx -\sqrt{a_0} \left(\sqrt{\frac{a_1}{a_2}} + i \frac{a_2 - a_1}{2a_2^2} \right) k^2.
\end{aligned} \tag{53}$$



Rysunek 1: Trajektorie modów podłużnych na płaszczyźnie zespolonej częstotliwości jako funkcja przewodnictwa cieplnego przy stałym pędzie. Strzałki wskazują kierunek wzrostu przewodnictwa cieplnego. **Lewa strona:** Częstotliwości jako funkcja przewodnictwa cieplnego dla $a_1/a_2 = 0.75(a_1/a_2)_c$. **Środek:** Wzbudzenia podłużne w regionie krytycznym $(a_1/a_2)_c$, mody przecinają się dla $a_2 = \sqrt{3}$. **Prawa strona:** Trajektorie w Regionie II dla $a_1/a_2 = 1.25(a_1/a_2)_c$.

Pełną zależność wzbudzeń od bezwymiarowego przewodnictwa cieplnego a_2 przy stałym ilorazie a_1/a_2 przedstawiono na rysunku 1. Warto zwrócić uwagę na istnienie dwóch jakościowo różnych regionów odpowiadających $a_1/a_2 < 1/9$ (Region I) i $a_1/a_2 > 1/9$ (Region II). W regionie krytycznym $(a_1/a_2)_c = 1/9$ istnieje punkt, w którym trzy wzbudzenia przecinają się w jednym miejscu i są urojone. Sytuacja ta przedstawiona jest na środkowym wykresie na rysunku 1. Główną różnicą między Regionem I a Regionem II jest istnienie okna w przestrzeni parametrów, w którym trzy wzbudzenia są czysto urojone (Region I), podczas gdy w Regionie II zawsze będą dwa wzbudzenia z niezerową częścią rzeczywistą.

Warto zaznaczyć, że ograniczenia termodynamiczne $a_1/a_2 < 1$ i $\alpha \geq 0$ są wystarczające, aby zagwarantować, że część urojona wzbudzeń będzie ujemna i nie wystąpi niestabilność nieliniowa.

3.7.3 Hydrodynamika pierwszego rzędu

W poprzednim rozdziale przedstawiliśmy hydrodynamikę rzędu zerowego i pokazaliśmy istnienie jednego współczynnika transportu dyssypatywnego α , który reguluje rozprzestrzenianie się podłużnych fluktuacji w układzie. Niemniej jednak, wzbudzenia w sektorze prostopadłym ($\omega_{shear} = 0$) pozostały niewrażliwe na przewodnictwo cieplne. Z tego wynika, że w zerowym rzędzie rozwinięcia gradientowe fluktuacje poprzeczne nie będą się rozprzestrzeniać. Chociaż mogłoby się wydawać, że jest to związane z fraktoniczną naturą układu, w tym rozdziale udowodnimy, że tak nie jest. Pokażemy, że człony odpowiadające hydrodynamicznie pierwszego rzędu wprowadzą poprawki do równań, które przewidują subdyfuzyjny transport wzbudzeń w sektorze poprzecznym.

Zacznijmy od rozłożenia makroskopowych prądów na składniki zerowego i pierwszego

rzędu w rozwinięciu gradientowym:

$$\begin{aligned} J^{ij} &= J_0^{ij} + J_1^{ij}, & \mathcal{E}^i &= \mathcal{E}_0^i + \mathcal{E}_1^i, \\ T^{ij} &= T_0^{ij} + T_1^{ij}, & S^i &= S_0^i + S_1^i. \end{aligned} \quad (54)$$

Wstawiając równanie (54) do równania (37) oraz eliminując niższe rzędy pochodnych (ponieważ spełniają one drugą zasadę termodynamiki pod warunkiem, że $\alpha \geq 0$), drugą zasadę termodynamiki można przedstawić w poniższy sposób

$$\partial_i S_1^i - \frac{1}{T} \partial_i \mathcal{E}_1^i + \frac{\mu}{T} \partial_i \partial_j J_1^{ij} + \frac{V_i}{T} \partial_j T_1^{ji} \geq 0. \quad (55)$$

Zauważmy, że dla fluktuacji wokół (45) mamy $\tilde{\mu} = \mu$ i $J_\epsilon^i = \mathcal{E}^i$ (zobacz równania (38) i (40)). Ponieważ naszym celem jest zidentyfikowanie najbardziej ogólnych związków konstytutywnych, które są zgodne z powyższą nierównością, warto przekształcić równanie (55) w następujący sposób

$$\begin{aligned} &\partial_i \left(S_1^i - \frac{1}{T} \partial_j E^{ji} + \partial_j \frac{1}{T} E^{ij} + \frac{\mu}{T} \partial_j J_1^{ij} - \partial_j \frac{\mu}{T} J_1^{ij} + \frac{V_j}{T} T_1^{ij} \right) \\ &+ J_1^{ij} \partial_i \partial_j \frac{\mu}{T} - E^{ij} \partial_i \partial_j \frac{1}{T} - T_1^{ij} \partial_i \frac{V_j}{T} \geq 0, \end{aligned} \quad (56)$$

gdzie pomineliśmy człony nieliniowe i wyraziliśmy prąd energii jako $\mathcal{E}_1^i = \partial_j E^{ji}$. Następnie, postulujemy następujące wyrażenie na korektę pierwszego rzędu do prądu entropii

$$S_1^i = \frac{1}{T} \partial_j E^{ji} - \partial_j \frac{1}{T} E^{ij} - \frac{\mu}{T} \partial_j J_1^{ij} + \partial_j \frac{\mu}{T} J_1^{ij} - \frac{V_j}{T} T_1^{ij}, \quad (57)$$

aby pierwszy składnik w równaniu (56) zaniknął. W związku z tym problem sprowadza się do znalezienia odpowiednich związków konstytutywnych, żeby pozostałe człony utworzyły półdodatnią formę kwadratową. Najbardziej ogólne wyrażenia na prądy, które zagwarantują pozytywną produkcję entropii, to:

$$\begin{aligned} J_1^{ij} &= \left(\frac{\gamma_{\parallel}}{T_0} \partial_k V_k + \sigma_{\parallel} \nabla^2 \frac{\mu}{T} + \beta_{\parallel} \nabla^2 \frac{1}{T} \right) \delta_{ij} \\ &+ \frac{\gamma_{\perp}}{T_0} \partial_{\langle i} V_{j \rangle} + \sigma_{\perp} \partial_{\langle i} \partial_{j \rangle} \frac{\mu}{T} + \beta_{\perp} \partial_{\langle i} \partial_{j \rangle} \frac{1}{T}, \\ -T_1^{ij} &= \left(\frac{\zeta}{T_0} \partial_k V_k + \bar{\gamma}_{\parallel} \nabla^2 \frac{\mu}{T} + \alpha_{\parallel} \nabla^2 \frac{1}{T} \right) \delta_{ij} \\ &+ \frac{\eta}{T_0} \partial_{\langle i} V_{j \rangle} + \bar{\gamma}_{\perp} \partial_{\langle i} \partial_{j \rangle} \frac{\mu}{T} + \alpha_{\perp} \partial_{\langle i} \partial_{j \rangle} \frac{1}{T}, \\ -E^{ij} &= \left(\frac{\bar{\alpha}_{\parallel}}{T_0} \partial_k V_k + \bar{\beta}_{\parallel} \nabla^2 \frac{\mu}{T} + \kappa_{\parallel} \nabla^2 \frac{1}{T} \right) \delta_{ij} \\ &+ \frac{\bar{\alpha}_{\perp}}{T_0} \partial_{\langle i} V_{j \rangle} + \bar{\beta}_{\perp} \partial_{\langle i} \partial_{j \rangle} \frac{\mu}{T} + \kappa_{\perp} \partial_{\langle i} \partial_{j \rangle} \frac{1}{T}. \end{aligned} \quad (58)$$

Gdzie wprowadziliśmy 18 współczynników transportu dyssypatywnego. W szczególności zasada wzajemności Onsagera zmniejsza liczbę współczynników, jeśli założymy, że system jest symetryczny pod względem odbicia czasowego:

$$\bar{\alpha}_{||(\perp)} = \alpha_{||(\perp)}, \quad \bar{\beta}_{||(\perp)} = \beta_{||(\perp)}, \quad \bar{\gamma}_{||(\perp)} = \gamma_{||(\perp)}. \quad (59)$$

Po wprowadzeniu relacji Onsagera pozostaje Nam łącznie 12 niezależnych współczynników transportu, które klasyfikujemy na dwie różne kategorie. Pierwsza kategoria obejmuje współczynniki diagonalne ($\zeta, \eta, \sigma_{\perp}, \sigma_{||}, \kappa_{\perp}, \kappa_{||}$), które spełniają warunek dodatniości

$$\zeta, \eta, \sigma_{\perp}, \sigma_{||}, \kappa_{\perp}, \kappa_{||} \geq 0. \quad (60)$$

Do drugiej kategorii należą współczynniki znajdujące się poza przekątną macierzy dyssypacji ($\alpha_{\perp}, \alpha_{||}, \beta_{\perp}, \beta_{||}, \gamma_{\perp}, \gamma_{||}$), które spełniają nierównościami ze współczynnikami z grupy diagonalnej

$$\begin{aligned} \alpha_{\perp}^2 &\leq \sigma_{\perp} \kappa_{\perp}, & \alpha_{||}^2 &\leq \sigma_{||} \kappa_{||}, & \beta_{\perp}^2 &\leq \eta \kappa_{\perp}, \\ \beta_{||}^2 &\leq \zeta \kappa_{||}, & \gamma_{\perp}^2 &\leq \eta \sigma_{\perp}, & \gamma_{||}^2 &\leq \zeta \sigma_{||}. \end{aligned} \quad (61)$$

Wprowadzona kategoryzacja współczynników wynika z faktu, że wartości współczynników transportu spoza przekątnej są ograniczone z góry przez współczynniki diagonalne. Ostatni warunek dotyczący drugiego prawa termodynamiki odpowiada warunkowi koniecznemu, jakim jest pozytywny wyznacznik macierzy dyssypacji

$$\begin{aligned} \zeta(\sigma_{||} \kappa_{||} - \beta_{||}^2) - \kappa_{||} \gamma_{||}^2 - \sigma_{||} \alpha_{||}^2 &\geq 0, \\ \eta(\sigma_{\perp} \kappa_{\perp} - \beta_{\perp}^2) - \kappa_{\perp} \gamma_{\perp}^2 - \sigma_{\perp} \alpha_{\perp}^2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (62)$$

Po uzyskaniu wyrażeń na poprawki pierwszego rzędu, możemy wstawić pełne relacje konstytutywne do równań zachowania, aby uzyskać równania ruchu odpowiadające hydrodynamicie rzędu pierwszego

$$\begin{aligned} \partial_t \delta n + j_n \nabla^4 \delta n - (\bar{f} - j_v \nabla^2) \nabla^2 (\nabla \cdot \delta \mathbf{p}) + j_e \nabla^4 \delta \epsilon &= 0, \\ \partial_t \delta \mathbf{p} + t_{v||} \nabla^2 \nabla (\nabla \cdot \delta \mathbf{p}) + t_{v\perp} \nabla^4 \delta \mathbf{p} \\ - (T_0 P_n - t_n \nabla^2) \nabla \delta n - (T_0 P_{\epsilon} - t_e \nabla^2) \nabla \delta \epsilon &= 0, \\ \partial_t \epsilon + (\alpha_{s_{ee}} + e_e \nabla^2) \nabla^2 \delta \epsilon + (\alpha_{s_{ne}} + e_n \nabla^2) \nabla^2 \delta n \\ - \left(\bar{f} \frac{\epsilon_0 + p_0}{n_0} - e_v \nabla^2 \right) \nabla^2 (\nabla \cdot \delta \mathbf{p}) &= 0. \end{aligned} \quad (63)$$

Główną różnicą wynikającą z uwzględnienia poprawek rzędu pierwszego jest pojawienie się subdyfuzyjnego wzbudzenia w sektorze poprzecznym

$$\omega_{shear} = -i\eta \frac{f_{\perp}}{T_0 n_0^2} k^4. \quad (64)$$

Wzbudzenia podłużne otrzymują natomiast poprawki, których wkład do relacji dyspersji pojawia się w wyższym rzędzie pędu. Wielomian charakterystyczny dla sektora podłużnego w tym przypadku ma taką samą postać jak w rzędzie zerowym równanie (48):

$$\left(\frac{\omega}{\bar{\omega}_0}\right)^3 + i\bar{a}_2 \left(\frac{\omega}{\bar{\omega}_0}\right)^2 - \frac{\omega}{\bar{\omega}_0} - i\bar{a}_1 = 0 \quad (65)$$

gdzie $\bar{\omega}_0 = \sqrt{\bar{a}_0}k^2$ oraz

$$\begin{aligned} \bar{a}_0 &= (a_0 + b_0k^2) + \mathcal{O}(k^4), \\ \bar{a}_1 &= \bar{a}_0^{-\frac{3}{2}}(a_0^{\frac{3}{2}}a_1 + b_1k^2) + \mathcal{O}(k^4), \\ \bar{a}_2 &= \bar{a}_0^{-\frac{1}{2}}(a_0^{\frac{1}{2}}a_2 + b_2k^2) + \mathcal{O}(k^4). \end{aligned} \quad (66)$$

Wprowadzone parametry b_0 , b_1 i b_2 są stałymi, które zależą od mikroskopowych szczegółów teorii. Rozwiązania równań (50) są w dalszym ciągu właściwe, pod warunkiem że podstawimy $a_1 \rightarrow \bar{a}_1$ oraz $a_2 \rightarrow \bar{a}_2$ w (51).

3.8 Wnioski

Inspirując się egzotycznymi właściwościami fraktonów, odkryto cały szereg fascynujących teorii, z których wiele zrealizowano na sieciach krystalicznych oraz w innych układach materii skondensowanej. Symetrie multipolowe, także inne symetrie z transformacjami zależnymi od współrzędnych przestrzennych mogą stanowić zasadniczą zasadę kierującą budową i klasyfikacją tych nowatorskich teorii w granicy ciągłej, tak jak staraliśmy się to podkreślić w tym krótkim przeglądzie.

Nadal otwartych pozostaje wiele pytań dotyczących cechowania symetrii pól tensorowych. W szczególności niejasne jest, czy należy je traktować na równi ze zwykłymi symetriami, czy może stany fizyczne nie muszą być niezmiennicze względem symetrii cechowania pól tensorowych.

Różnice między konwencjonalnymi, a tensorowymi teoriami cechowania stają się szczególnie widoczne podczas próby sprzężenia ich do grawitacji. Podczas gdy przekształcenia konwencjonalnych teorii cechowania pozostają niezależne od metryki (z wyjątkiem anomalii kwantowych), nie jest to oczywiste w przypadku symetrii tensorowych, gdzie pojawiają się pochodne kowariantne w transformacji cechowania⁴. Konstrukcja grupy Heisenberga, która umożliwia spójne sprzężenie teorii zachowujących moment dipolowy z teorią grawitacji [17], może być użyteczna jako wskazówka do sprzężania bardziej ogólnych, zależnych od współrzędnych symetrii.

Innym aspektem, który nie był dokładnie badany poza modelami na sieciach, jest dynamika wzbudzeń fraktonowych, zarówno pojedynczych, jak i tych kolektywnych. W paradygmatycznym przykładzie elastyczności fraktony są defektami w kryształach, a z tego punktu widzenia można je traktować jako osobliwe konfiguracje pól przemieszczeń, których z reguły nie da opisać za pomocą ciągłej teorii pola. Analogiczna sytuacja zachodzi w przypadku wirów w stanie nadciekłym, które są osobliwymi konfiguracjami fazy kondensatu. Niemniej jednak kolektywny opis wirów nadciekłych można sformułować za pomocą efektywnej teorii

⁴Ostatnio ten problem został omówiony w pracy [21, 22] z wykorzystaniem geometrii arystoteleskiej.

ciągłej (patrz np. [23, 24]). Być może analogiczna teoria może zostać skonstruowana także dla teorii ze wzbudzeniami fraktonowymi.

Podsumowując, jest to dynamicznie rozwijająca się dziedzina badań, która otwiera wiele nowych dróg badawczych i prawdopodobnie w niedalekiej przyszłości doprowadzi do znaczącego postępu.

4 Prezentacja znaczącej działalności naukowej

Po ukończeniu mojego doktoratu zostałem zatrudniony na stanowisku naukowca z doktoratem pod nadzorem Profesora Eliasa Kiritsisa na Krecie. Profesor Kiritsis to światowej klasy ekspert w dziedzinie teorii kwantowych pól, teorii strun i holografii. W ciągu dwuletniego okresu mojej pracy otrzymałem finansowanie z renomowanych projektów europejskich, takich jak program UE Thales (MIS375734) oraz Siódmy Program Ramowy Unii Europejskiej w ramach umów grantowych (FP7-REGPOT-2012-2013-1) nr 316165. Następnie podjąłem drugi dwuletni okres zatrudnienia jako naukowiec z doktoratem w INFN w Perugii. Po tym okresie pracowałem jako starszy naukowiec z doktoratem przez cztery lata w Instytucie Maxa Plancka ds. Fizyki Układów Złożonych w Dreźnie, wspierany przez Centrum Doskonałości - Complexity and Topology in Quantum Matter (Drezno-Wuerzburg). Obecnie zajmuję stanowisko lidera grupy w Instytucie Fizyki Teoretycznej na Politechnice Wrocławskiej. Moje badania obejmują różne obszary, z których poniżej przedstawiam dwa:

Systemy kinematycznie ograniczone

Fraktony to wzbudzenia, które w izolacji wykazują ograniczony ruch w przestrzeni, w odróżnieniu od konfiguracji złożonych. Te systemy można zrealizować, narzucając zachowanie określonych ładunków $U(1)$ i ich momentów dipolowych (patrz poprzedni rozdział).

Półprzewodniki Weyla

Półprzewodniki Weyla to trójwymiarowe półprzewodniki bez przerwy energetycznej, charakteryzujące się bezmasowymi wzbudzeniami fermionowymi znanych jako fermiony Weyla. Te fermiony posiadają spin, który jest albo równoległy (prawoskrętny), albo antyrównoległy (lewoskrętny) do kierunku ich propagacji. W pewnym sensie te materiały można traktować jako trójwymiarowe odpowiedniki grafenu. Mój główny wkład w ten temat jest podsumowany w następującej serii prac:

- G. Grignani, A. Marini, F. Peña-Benítez, S. Speziali. *AC conductivity for a holographic Weyl semimetal*. Journal of High Energy Physics 1703 (2017) 125. Citations: 17 (Scopus)

Prędkość Fermiego elektronów w półprzewodnikach Weyla jest porównywalna z prędkością Fermiego w grafenie, która jest co najmniej o dwa rzędy wielkości niższa niż prędkość światła. W rezultacie analog wartości stałej struktury subtelnej w półprzewodnikach Weyla może być znacznie większy niż w kwantowej elektrodynamice, co wskazuje na możliwość istnienia silnie sprzężonego obszaru. Ze względu na znaczenie fenomenologii tych materiałów, zaproponowałem mojej grupie badawczej w INFN wykorzystanie

modelu holograficznego do badania optycznej przewodności silnie sprzężonego półprzewodnika Weyla w zerowej temperaturze. Nasze obliczenia wykazały znaczącą zgodność z przewodnością optyczną w materiale Weyla⁵ i przewidziały, że obecność punktu krytycznego w diagramie fazowym materiału może być odpowiedzialna za obserwowane właściwości skalowania przewodności w "średnim" zakresie energii.

- R. M.A. Dantas, F. Peña-Benítez, B. Roy, P. Surówka. *Magnetotransport in multi-Weyl semimetals: A kinetic theory approach*. Journal of High Energy Physics 1812 (2018) 069. Citations: 35 (Scopus)

W tej publikacji wykorzystaliśmy standardową metodę, chiralną teorię kinetyczną do zbadania anomalii chiralnej i jej wpływu na magnetoaresystancję półmetali typu multi-Weyl. Jak się spodziewaliśmy, stwierdziliśmy, że magnetoaresystancja jest ujemna, gdy pola elektryczne i magnetyczne są równoległe, a ten efekt jest wzmacniany przez ładunek monopola Berry'ego. Pomimo anizotropowej natury tych półmetali, dokonaliśmy zaskakującego odkrycia, że wkład anomalii do magnetoaresystancji jest nieczuły na kierunek przepływu prądu.

- R. M.A. Dantas, F. Peña-Benítez, B. Roy, P. Surówka. *Non-Abelian anomalies in multi-Weyl semimetals*. Physical Review Research. 2 (2020) 013007. Citations: 30 (Scopus)

Półmetale typu multi-Weyl stanowią nierelatywistyczną, uogólnioną wersję półmetali Weyla. W tej pracy zaproponowaliśmy dobrze zdefiniowaną teorię kwantową, która uchwyciła te same właściwości o niskiej energii co modele półmetali typu multi-Weyl i wyjaśniła ich strukturę anomalii, korzystając z standardowych narzędzi teorii kwantowej związanej z relatywistyczną teorią pola. Nasza teoria przewidziała nowe prądy indukowane anomaliami, które są związane z ukrytą globalną symetrią SU(2). Bez naszego modelu, byłoby trudne ustalenie istnienia tych niabelowych anomalii.

5 Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę.

Podczas mojego pobytu na Krecie, odegrałem rolę w organizacji seminariów grupy badawczej. Grupa zajmująca się fizyką wysokich energii prowadziła program gościnny, organizując średnio dwa seminaria tygodniowo. W Perugii byłem również zaangażowany w organizację XII Spotkania Avogadro poświęconego strunom, supergrawitacji i teoriom cechowania, które odbyło się w dniach od 21 do 23 grudnia 2016 roku. Niedawno wziąłem także udział w organizacji pierwszego wyjazdu ct.qmat Quantum Matter Academy, który odbył się od 8 do 10 października 2019 roku w Miśni. Obecnie jestem odpowiedzialny za organizację seminariów w Instytucie Fizyki Teoretycznej na Politechnice Wrocławskiej.

Podczas moich studiów doktoranckich skutecznie kierowałem pracą magisterską oraz udzielałem wsparcia doktorantom w grupie na MPI w Dreźnie. Oprócz moich działań ba-

⁵Physical Review B 93 (2016) 121110

dawczych we Wrocławiu, od semestru letniego 2021 roku prowadzę kurs Fizyki Ogólnej dla studentów informatyki inżynierskiej. Nadzorowałem również pracę licencjacką Agaty Pawełkiewicz, wprowadzając ją w koncepcje teorii pola i teorii grup w kontekście opisu układów fraktonowych. Projekt nosił tytuł *Badanie Grupy Heisenberga i Jej Związków z Fraktonami*.

Ponadto, jesienią 2021 roku prowadziłem dwugodzinne cotygodniowe wykłady na temat *Podstaw Teorii Pól w Teorii Skondensowanej Materii* dla stowarzyszenia studentów fizyki NABLA na Politechnice Wrocławskiej.

6 Oprócz kwestii wymienionych w pkt. 1-6, wnioskodawca może podać inne informacje, ważne z jego punktu widzenia, dotyczące jego kariery zawodowej.

Przez całą moją karierę miałem przywilej być zapraszany na wygłaszanie seminariów, uczestniczenie w warsztatach i prowadzenie wykładów w prestiżowych międzynarodowych instytucjach. Miałem zaszczyt być prelegentem seminariów w takich instytucjach jak DAMPT (Cambridge, Wielka Brytania), École Normale Supérieure i École Polytechnique (Paryż, Francja), Technion (Izrael), Uniwersytet w Utrechcie (Holandia), Uniwersytet Beihang (Chiny), IFT-UAM/CSIC (Hiszpania), między innymi. Dodatkowo, byłem zapraszany do wygłaszania prelekcji na warsztatach, konferencjach i cyklach wykładów organizowanych w renomowanych instytucjach, takich jak Instytut Nordita (Szwecja) i Simons Center for Geometry and Physics (USA), między innymi. Te interakcje dostarczyły mi różnorodnych doświadczeń i zaowocowały licznymi międzynarodowymi współpracami. W mojej obecnej sieci współpracowników znajdują się znani badacze, w tym Prof. Roderich Moessner, Prof. Elias Kiritsis (Grecja), Prof. Kush Saha (Indie), Dr. Carlos Hoyos (Hiszpania), Dr. Bitan Roy (USA), Prof. Yan Liu (Chiny), Dr. Piotr Surowka (Polska) i Prof. Laurens Molenkamp (Niemcy).

F. J. PEÑA BENÍTEZ
Francisco José Peña Benítez

Literatura

- [1] Michael Pretko. Subdimensional Particle Structure of Higher Rank $U(1)$ Spin Liquids. *Phys. Rev. B*, 95(11):115139, 2017.
- [2] Michael Pretko. Generalized Electromagnetism of Subdimensional Particles: A Spin Liquid Story. *Phys. Rev. B*, 96(3):035119, 2017.
- [3] Jeongwan Haah. Local stabilizer codes in three dimensions without string logical operators. *Phys. Rev. A*, 83:042330, Apr 2011.
- [4] Sagar Vijay, Jeongwan Haah, and Liang Fu. Fracton Topological Order, Generalized Lattice Gauge Theory and Duality. *Phys. Rev. B*, 94(23):235157, 2016.
- [5] Andrey Gromov. Towards classification of Fracton phases: the multipole algebra. *Phys. Rev. X*, 9(3):031035, 2019.
- [6] Kevin Slagle, Abhinav Prem, and Michael Pretko. Symmetric Tensor Gauge Theories on Curved Spaces. *Annals Phys.*, 410:167910, 2019.
- [7] Kevin T. Grosvenor, Carlos Hoyos, Francisco Peña-Benitez, and Piotr Surówka. Hydrodynamics of ideal fracton fluids. 5 2021.
- [8] Roel Andringa, Eric Bergshoeff, Sudhakar Panda, and Mees De Roo. Newtonian gravity and the bargmann algebra. *Classical and Quantum Gravity*, 28(10):105011, 2011.
- [9] Jelle Hartong. Gauging the carroll algebra and ultra-relativistic gravity. *Journal of High Energy Physics*, 2015(8):1–26, 2015.
- [10] Christian Copetti. Torsion and anomalies in the warped limit of lifschitz theories. *Journal of High Energy Physics*, 2020(1):1–37, 2020.
- [11] Ovidiu Calin, D Chang, and Peter Greiner. Geometric mechanics on the heisenberg group. *Bulletin-Institute of Mathematics Academia Sinica*, 33(3):185, 2005.
- [12] Srdjan Vukmirović. Classification of left-invariant metrics on the heisenberg group. *Journal of Geometry and Physics*, 94:72–80, 2015.
- [13] C. J. Isham, Abdus Salam, and J. A. Strathdee. Nonlinear realizations of space-time symmetries. Scalar and tensor gravity. *Annals Phys.*, 62:98–119, 1971.
- [14] Ian Low and Aneesh V. Manohar. Spontaneously broken space-time symmetries and Goldstone’s theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 88:101602, 2002.
- [15] Ivan Kharuk and Andrey Shkerin. Solving puzzles of spontaneously broken spacetime symmetries. *Phys. Rev. D*, 98(12):125016, 2018.

- [16] EA Ivanov and J Niederle. Gauge formulation of gravitation theories. i. the poincaré, de sitter, and conformal cases. *Physical Review D*, 25(4):976, 1982.
- [17] Francisco Peña Benitez. Fractons, symmetric gauge fields and geometry. *Phys. Rev. Res.*, 5(1):013101, 2023.
- [18] G Grignani and G Nardelli. Gravity and the poincaré group. *Physical Review D*, 45(8):2719, 1992.
- [19] Akash Jain and Kristan Jensen. Fractons in curved space. *SciPost Physics*, 12(4):142, April 2022.
- [20] Kevin T. Grosvenor, Carlos Hoyos, Francisco Peña Benitez, and Piotr Surówka. Space-Dependent Symmetries and Fractons. *Front. in Phys.*, 9:792621, 2022.
- [21] Leo Bidussi, Jelle Hartong, Emil Have, Jørgen Musaeus, and Stefan Prohazka. Fractons, dipole symmetries and curved spacetime. 11 2021.
- [22] Akash Jain and Kristan Jensen. Fractons in curved space. 11 2021.
- [23] Haruki Watanabe and Hitoshi Murayama. Redundancies in Nambu-Goldstone Bosons. *Phys. Rev. Lett.*, 110(18):181601, 2013.
- [24] Sergej Moroz, Carlos Hoyos, Claudio Benzonì, and Dam Thanh Son. Effective field theory of a vortex lattice in a bosonic superfluid. *SciPost Physics*, 5(4):039, 2018.