

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA  
WYDZIAŁ MATEMATYKI

# Estymacja parametrów niejednorodnych procesów gamma

Paweł Skoliński

Rozprawa doktorska wykonana pod kierunkiem  
dr hab. Alicji Jokiel-Rokity, prof. uczelni

Kwiecień 2022  
Wrocław



Serdecznie dziękuję

Pani Promotor, dr hab. Alicji Jokieli-Rokicie, prof. uczelni  
za zaufanie, wyrozumiałość,  
poświęcony mi czas  
oraz ogromne zaangażowanie.

Rodzinie, w szczególności żonie, za cierpliwość  
i wsparcie w trudnych momentach.



## Streszczenie

Niejednorodne procesy gamma z potęgową (MPLP) oraz log-liniową (MGP) funkcją trendu są trzyparametrowymi modelami stochastycznymi procesów punktowych, które są stosowane do opisanego momentów występowania zdarzeń powracających.

W niniejszej pracy przedstawiono problem estymacji parametrów wymienionych procesów. Szczególną uwagę poświęcono estymatorom uzyskanym metodą największej wiarygodności. Oprócz opisanego postaci tych estymatorów, podano twierdzenia o ich istnieniu oraz własnościach asymptotycznych. Jako alternatywę dla estymatorów największej wiarygodności, zaproponowano estymatory wyprowadzone w oparciu o własności niejednorodnych procesów gamma. Opisano wybrane, znane z literatury, estymatory parametrów procesu MPLP i wyznaczono estymatory parametrów procesu MGP, w oparciu o analogiczne do procesu MPLP własności procesu MGP. Wykazano, że estymatory uzyskane przy użyciu metody momentów lub metody najmniejszych kwadratów nie powinny być stosowane w rozpatrywanych modelach. Zaproponowano również dwie nowe metody estymacji parametrów rozpatrywanych procesów.

Korzystając z symulacji komputerowych, dla wybranych zestawów parametrów procesów MPLP i MGP, porównano dokładność rozważanych estymatorów. W niektórych przypadkach, w zależności od rozpatrywanego zestawu parametrów i procesu, otrzymano dokładniejsze oszacowania, przy przyjętych kryteriach, stosując zaproponowane estymatory niż stosując estymatory największej wiarygodności. Różnice w dokładności oszacowań zaobserwowano przede wszystkim dla realizacji procesów o małej liczbie skoków.

Rozprawa kończy się zastosowaniem rozpatrywanych estymatorów do analizy dwóch zbiorów danych rzeczywistych. Na podstawie analizowanych danych, wyznaczono oszacowania punktowe parametrów wybranych modeli oraz w oparciu o udowodnione własności asymptotyczne estymatorów największej wiarygodności, wyznaczono realizacje asymptotycznych punktowo przedziałów ufności dla wartości nieznanymi parametrów modeli.

## Abstract

Inhomogeneous gamma processes with power (MPLP) and log-linear (MGP) trend functions are three-parameter stochastic point process models that are used to describe the times of occurrence of a recurring events.

This dissertation presents the problem of estimating the parameters of the above-mentioned processes. Particular attention is paid to the estimators obtained by the maximum likelihood method. Apart from describing the form of given estimators, theorems about their existence and asymptotic properties were given. As an alternative to the maximum likelihood method, estimators derived from the properties of inhomogeneous gamma processes are presented. Selected estimators of MPLP process parameters, known from the literature, are discussed and, using analogous to the MPLP properties of the MGP, new estimators of the MGP were proposed. It has been shown that the estimators obtained using the method of moments or the method of least squares should not be used in the cases considered. Moreover, two new estimation methods were also proposed.

The accuracy of the estimators considered, for selected sets of parameters of MPLP and MGP processes, was compared using computer simulations. In some cases, depending on the parameters and process, better estimates were obtained, according to the selected criteria, using the proposed estimators than using the maximum likelihood estimators. The differences in accuracy were mostly observed for realizations of processes with a small number of jumps.

The dissertation ends with applying estimators considered to real data analysis. Realizations of asymptotically pointwise confidence intervals for the values of unknown model parameters were determined on the basis of the asymptotic properties of the maximum likelihood estimators.

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Proces punktowy</b>	<b>13</b>
1.1	Definicja procesu punktowego i jego własności . . . . .	13
1.2	Szczególne przypadki procesów punktowych . . . . .	16
1.2.1	Proces Poissona . . . . .	16
1.2.2	Proces odnowy . . . . .	18
1.2.3	Niejednorodny proces gamma . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Estymacja parametrów procesu IGP metodą największej wiaro- godności</b>	<b>27</b>
2.1	Estymacja parametrów procesu MPLP metodą NW . . . . .	28
2.1.1	Wyznaczanie oszacowań NW parametrów procesu MPLP . . . . .	28
2.1.2	Własności asymptotyczne estymatorów NW parametrów pro- cesu MPLP . . . . .	31
2.2	Estymacja parametrów procesu MGP metodą NW . . . . .	34
2.2.1	Wyznaczanie oszacowań NW parametrów procesu MGP . . . . .	34
2.2.2	Własności asymptotyczne estymatorów NW parametrów pro- cesu MGP . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Estymacja parametrów procesu IGP w oparciu o jego własności</b>	<b>41</b>
3.1	Estymacja parametrów procesu IGP w oparciu o rozkład różnic trans- formowanych momentów zdarzeń . . . . .	42
3.1.1	Estymacja parametrów procesu IGP metodą momentów . . . . .	42
3.1.2	Estymacja parametrów procesu IGP metodą najmniejszych kwa- dratów . . . . .	46
3.2	Estymacja parametrów procesu IGP w oparciu o rozkłady ilorazów transformowanych momentów zdarzeń . . . . .	47
3.2.1	Estymator parametru $\beta$ procesu MPLP . . . . .	48
3.2.2	Estymator parametru $\beta$ procesu MGP . . . . .	49
3.3	Estymacja parametrów procesu IGP w oparciu o rozkłady transformato- wanych momentów zdarzeń . . . . .	50
3.3.1	Postać estymatorów parametrów procesu MPLP . . . . .	50
3.3.2	Postać estymatorów parametrów procesu MGP . . . . .	51
3.4	Estymacja parametrów procesu IGP w oparciu o estymatory paramet- rów rozkładu gamma . . . . .	53
3.4.1	Przypadek procesu MPLP . . . . .	54
3.4.2	Przypadek procesu MGP . . . . .	55

<b>4</b>	<b>Wyniki symulacji</b>	<b>57</b>
4.1	Porównanie estymatorów parametrów procesu MPLP . . . . .	59
4.2	Porównanie estymatorów parametrów procesu MGP . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Analiza danych rzeczywistych</b>	<b>83</b>
5.1	Generator lotniczy . . . . .	84
5.2	Silnik napędowy . . . . .	86
<b>6</b>	<b>Dowody twierdzeń</b>	<b>89</b>
6.1	Dowód twierdzenia 2.2.2 . . . . .	89
6.2	Dowód twierdzenia 2.2.3 . . . . .	97
6.3	Dowód twierdzenia 2.2.4 . . . . .	101
6.4	Dowód twierdzenia 2.2.5 . . . . .	104



# Spis rysunków

1.1	Wykresy przykładowych funkcji intensywności procesu NHPP. Niebieskimi punktami oznaczone zostały realizacje momentów kolejnych skoków procesu o zadanej funkcji intensywności . . . . .	18
1.2	Przykładowe realizacje funkcji intensywności warunkowej procesu GRP. Niebieskimi punktami oznaczone zostały realizacje momentów kolejnych skoków procesu . . . . .	20
1.3	Wykres przykładowej realizacji funkcji intensywności warunkowej procesu IGP z parametrem $\kappa = 1.5$ oraz rosnącą funkcją trendu. Niebieskimi punktami oznaczone zostały momenty zdarzeń . . . . .	23
1.4	Szczególne przypadki procesu IGP . . . . .	24
3.1	Wykresy funkcji $\tilde{h}_M(\beta, \mathbf{t})$ argumentu $\beta$ dla przykładowych realizacji $\mathbf{t}$ procesu MPLP, (a) dla $n = 25$ , (b) dla $n = 40$ . . . . .	44
3.2	Wykresy funkcji $\hat{h}_M(\beta, \mathbf{t})$ argumentu $\beta$ dla przykładowych realizacji $\mathbf{t}$ procesu MGP (a) dla $n = 25$ , (b) dla $n = 40$ . . . . .	45
4.1	Zmiana $\widehat{\text{RMSE}}$ i $\widehat{\text{bias}}$ względem $n$ dla procesu MPLP(0.6, 0.75, 2) . . .	66
4.2	Zmiana $\widehat{\text{RMSE}}$ i $\widehat{\text{bias}}$ względem $n$ dla procesu MPLP(4, 1.5, 0.75) . . .	67
4.3	Wartości estymatorów parametrów procesu MPLP przedstawione w postaci wykresów pudełkowych. Odpowiednio od góry zaprezentowano wyniki dla parametru $\alpha$ , $\beta$ i $\kappa$ oraz przyjęto oznaczenia zgodne z tabelą 4.4 . . . . .	68
4.4	Wartości estymatorów parametru $\beta$ obliczone metodami NW i GD na zbiorze realizacji, dla których drugi rozpatrywany estymator nie istnieje. Wyniki dla dwóch wybranych zestawów parametrów procesu MGP . . . . .	70
4.5	Wartości estymatorów parametru $\beta$ obliczone metodami NW i GD na zbiorze realizacji, dla których estymator $\hat{\beta}^{BD}$ nie istnieje. Wyniki dla dwóch wybranych zestawów parametrów procesu MGP . . . . .	70
4.6	Zmiana $\widehat{\text{bias}}$ i $\widehat{\text{RMSE}}$ względem $n$ dla procesu MGP(0.6, 0.01, 0.75) . .	77
4.7	Zmiana $\widehat{\text{bias}}$ i $\widehat{\text{RMSE}}$ względem $n$ dla procesu MGP(1.8, 0.1, 2) . . . .	79
4.8	Uzyskane wartości estymatorów parametrów procesu MGP przedstawione w postaci wykresów pudełkowych. Odpowiednio od góry zaprezentowano wyniki dla parametrów $\rho$ , $\beta$ i $\kappa$ oraz przyjęto następujące oznaczenia zależne od wykresu: NW - estymatory $\hat{\rho}$ , $\hat{\beta}$ , $\hat{\kappa}$ , BD - $\hat{\rho}_Z^{BD}$ , $\hat{\beta}^{BD}$ , $\hat{\kappa}_Z^{BD}$ oraz GD - $\hat{\rho}_Z^{GD}$ , $\hat{\beta}^{GD}$ , $\hat{\kappa}_Z^{GD}$ . . . . .	80

5.1	Graficzna metoda wyboru metody estymacji parametrów procesu MPLP dla danych dotyczących awarii generatora lotniczego . . . . .	85
5.2	Czasy awarii silnika napędowego jednostki USS Halfbeak (czarna linia) oraz przykładowe realizacje procesów MPLP (czerwone linie) i procesów MGP (niebieskie linie), których parametry zostały oszacowane metodą NW. Dokładne wartości oszacowań parametrów podane są w tabeli 5.3 . . . . .	88
5.3	Graficzna metoda wyboru metody estymacji parametrów procesu MGP dla danych dotyczących awarii głównego silnika napędowego jednostki USS Halfbeak . . . . .	88

# Spis tabel

4.1	Estymatory parametrów procesu MPLP i MGP rozpatrzone w symulacjach . . . . .	59
4.2	Oszacowania obciążeń (podane w nawiasie) i pierwiastków średnich błędów kwadratowych estymatorów parametrów $\alpha$ i $\kappa$ procesu MPLP, gdy parametr $\beta$ został oszacowany przy użyciu estymatora $\tilde{\beta}^{BD}$ . Pogrubieniem zaznaczono najmniejszą wartość $\widehat{RMSE}$ , w grupie estymatorów rozpatrywanego parametru, dla danego zestawu parametrów i liczby $n$ skoków procesu . . . . .	60
4.3	Oszacowania obciążeń (podane w nawiasie) i pierwiastków średnich błędów kwadratowych estymatorów parametrów $\alpha$ i $\kappa$ procesu MPLP, gdy parametr $\beta$ został oszacowany przy użyciu estymatora $\tilde{\beta}^{GD}$ . Pogrubieniem zaznaczono najmniejszą wartość $\widehat{RMSE}$ , w grupie estymatorów rozpatrywanego parametru, dla danego zestawu parametrów i liczby $n$ skoków procesu . . . . .	61
4.4	Estymatory wybrane do porównania dokładności oszacowań parametrów procesu MPLP, względem estymatorów NW . . . . .	62
4.5	Oszacowania obciążeń (podane w nawiasie) i pierwiastków średnich błędów kwadratowych estymatorów parametrów procesu MPLP dla wybranych zestawów parametrów $\alpha$ , $\beta$ i $\kappa$ oraz liczby $n$ skoków procesu. Pod wartością $\widehat{RMSE}$ podano, pochyloną czcionką, procentową zmianę względem odpowiedniego estymatora NW. Pogrubieniem zaznaczono najmniejszą wartość $\widehat{RMSE}$ w grupie estymatorów rozpatrywanego parametru dla danego zestawu parametrów i liczby skoków procesu . . . . .	63
4.6	Wyniki analogiczne do przedstawionych w tabeli 4.5, dla innych zestawów parametrów $\alpha$ , $\beta$ i $\kappa$ . . . . .	64
4.7	Oszacowania obciążeń (podane w nawiasie) i pierwiastków średnich błędów kwadratowych predykcji momentu kolejnego zdarzenia przy zastosowaniu wybranych metod estymacji parametrów procesu MPLP. Pogrubieniem zaznaczono najmniejszą wartość $\widehat{RMSE}$ dla danego zestawu parametrów i liczby skoków procesu . . . . .	69
4.8	Udział procentowy realizacji procesu MGP w próbce symulacyjnej, dla których można było wyznaczyć dodatnią wartość odpowiadających estymatorów parametru $\beta$ . W nawiasach podano procent realizacji, dla których został wyznaczony wyszczególniony w kolumnie estymator, a nie były spełnione warunki istnienia dodatniego oszacowania NW . . . . .	71

4.9	Oszacowania obciążeń (podane w nawiasie) i pierwiastków średnich błędów kwadratowych estymatorów parametrów $\varrho$ i $\kappa$ procesu MGP, gdy parametr $\beta$ został oszacowany przy zastosowaniu $\hat{\beta}^{BD}$ . Pogrubieniem zaznaczono najmniejszą wartość $\widehat{RMSE}$ , w grupie estymatorów rozpatrywanego parametru, dla danego zestawu parametrów i liczby $n$ skoków procesu . . . . .	72
4.10	Oszacowania obciążeń (podane w nawiasie) i pierwiastków średnich błędów kwadratowych estymatorów parametrów $\varrho$ i $\kappa$ procesu MGP, gdy parametr $\beta$ został oszacowany przy zastosowaniu $\hat{\beta}^{GD}$ . Pogrubieniem zaznaczono najmniejszą wartość $\widehat{RMSE}$ , w grupie estymatorów rozpatrywanego parametru, dla danego zestawu parametrów i liczby $n$ skoków procesu . . . . .	73
4.11	Estymatory wybrane do porównania dokładności oszacowań parametrów procesu MGP względem estymatorów NW . . . . .	74
4.12	Oszacowanie obciążenia (podane w nawiasie) i pierwiastka średniego błędu kwadratowego RMSE estymatorów parametrów procesu MGP dla wybranych zestawów parametrów $\varrho$ , $\beta$ i $\kappa$ oraz długości procesu $n$ . Pod wartością RMSE podano, pochyloną czcionką, procentową zmianę względem odpowiedniego estymatora NW. Pogrubieniem zaznaczono najmniejszą wartość RMSE w grupie estymatorów rozpatrywanego parametru dla danego zestawu parametrów i liczby $n$ skoków procesu . . . . .	75
4.13	Wyniki analogiczne do przedstawionych w tabeli 4.12, dla innych zestawów parametrów $\varrho$ , $\beta$ i $\kappa$ . . . . .	76
4.14	Oszacowanie obciążenia (podane w nawiasie) i pierwiastka średniego błędu kwadratowego predykcji czasu kolejnego zdarzenia przy wybranych metodach estymacji parametrów procesu MGP. Pogrubieniem zaznaczono najmniejszą wartość $\widehat{RMSE}$ dla danego zestawu parametrów i liczby $n$ skoków procesu . . . . .	81
5.1	Wartości estymatorów parametrów procesu MPLP wyznaczone na podstawie danych dotyczących awarii generatora lotniczego . . . . .	84
5.2	Realizacje 95% przedziałów ufności dla wartości nieznanymi parametrów modelu MPLP, uzyskane na podstawie własności asymptotycznych estymatorów NW . . . . .	85
5.3	Wartości estymatorów parametrów procesu MPLP i MGP wyznaczone na podstawie danych rzeczywistych dotyczących awarii głównego silnika napędowego jednostki USS Halfbeak . . . . .	86
5.4	Realizacje 95% przedziałów ufności dla wartości nieznanymi parametrów modelu MGP, uzyskane na podstawie własności asymptotycznych estymatorów NW . . . . .	87

# Wstęp

Niewątpliwie ciekawym zagadnieniem statystycznym jest modelowanie momentów występowania zdarzeń powracających. Zagadnienie to jest często rozważane w analizie niezawodności w kontekście modelowania momentów występowania awarii systemów naprawialnych. Przez system naprawialny rozumiemy układ, który po awarii jest w stanie zostać przywrócony do w pełni satysfakcjonującego stanu operacyjnego, poprzez zastosowanie dowolnej metody poza całkowitą wymianą. Najczęściej pojęcie systemu naprawialnego jest kojarzone z dowolnym układem mechanicznym, a zdarzeniami są występujące w trakcie pracy awarie. Jednak systemem naprawialnym może być także sytuacja finansowa spółki na giełdzie, a zdarzeniami – zmiany trendu. Innym przykładem systemu naprawialnego może być program informatyczny, a zdarzeniami – wykrywane błędy kodu.

Znane podejście do modelowania momentów występowania zdarzeń powracających bazuje na wykorzystaniu procesów punktowych. W ogólności procesy te są modelami probabilistycznymi losowego rozproszenia punktów w pewnej przestrzeni, najczęściej w podzbiorze  $\mathbb{R}^d$ . Na potrzeby modelowania losowych momentów występowania określonych zdarzeń, przestrzeń tę ograniczamy do  $\mathbb{R}_0 = (0, \infty)$ .

W literaturze do modelowania momentów występowania zdarzeń powracających często wykorzystuje się procesy punktowe, które należą do jednej z dwóch podstawowych klas procesów punktowych jakimi są niejednorodny proces Poissona (NHPP) oraz proces odnowy (RP). Proces NHPP charakteryzuje się tym, że prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia w określonym przedziale czasowym, powiedzmy  $(t, t + \Delta t)$ , nie zależy od momentu wystąpienia poprzedniego zdarzenia, ale zależy od  $t$ . Z drugiej strony, proces RP charakteryzuje się tym, że prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia w przedziale  $(t, t + \Delta t)$  zależy wyłącznie od czasu jaki upłynął od momentu wystąpienia poprzedniego zdarzenia, ale nie zależy od  $t$ .

W praktyce, w wielu przypadkach, ani proces NHPP ani proces RP nie wydaje się być realistycznym odwzorowaniem rzeczywistości i właściwym modelem. Model RP, który zakłada, że po naprawie system wraca do stanu w jakim był na początku obserwacji (naprawa kompletna), jest nazbyt optymistyczny. Z drugiej strony, model NHPP, który zakłada, że system, po wystąpieniu awarii i jego naprawie, wraca do stanu tuż przed jej wystąpieniem (naprawa minimalna), jest nazbyt pesymistyczny. W wielu przypadkach, naprawiony system jest w lepszej kondycji niż bezpośrednio przed wystąpieniem awarii, ale w gorszej niż na początku pracy. Stąd, rozsądnymi modelami wydają się być procesy, które stanowią kompromis pomiędzy procesami NHPP a RP. Zaproponowane przez Bermana [5] niejednorodny proces gamma (IGP) stanowią klasę takich procesów.

Niniejsza rozprawa dotyczy estymacji parametrów procesów IGP. Składa się ona ze wstępu oraz sześciu rozdziałów.

Rozdział 1 stanowi wprowadzenie do pracy. Obejmuje on definicje procesu punktowego i pojęć z nim związanych. Zawiera również opis szczególnych przypadków procesów punktowych, w tym definicję niejednorodnego procesu gamma (IGP). Wyróżnione są dwie rodziny procesów IGP: z potęgową funkcją trendu (MPLP) oraz z log-liniową funkcją trendu (MGP).

Rozdział 2 poświęcony jest estymacji parametrów procesu IGP metodą największej wiarygodności. Został on podzielony na dwie części: pierwsza z nich dotyczy procesu MPLP, druga MGP. Dla obu procesów i ich szczególnych przypadków, podana jest postać równań wiarygodności. W przypadku procesu MGP przedstawiono twierdzenie dotyczące warunków istnienia dodatnich rozwiązań tych równań. Następnie podano własności asymptotyczne estymatorów NW.

W rozdziale 3 zaproponowano metody estymacji parametrów procesu IGP alternatywne do metody największej wiarygodności. W obrębie każdego podrozdziału, po ogólnym przedstawieniu metody, zaprezentowano wyniki dla procesu MPLP i MGP. W podrozdziale 3.1 do estymacji parametrów procesu IGP zastosowano dwie popularne metody estymacji: metodę momentów i metodę najmniejszych kwadratów. Podano uzasadnienie, że w przypadku procesów MPLP i MGP metody te nie powinny być stosowane. W dalszej części rozdziału zaproponowane są metody estymacji w oparciu o własności procesu IGP.

Rozdział 4 zawiera wnioski z symulacji komputerowych, których celem było porównanie wybranych, z przedstawionych w pracy, estymatorów. Ponadto, porównano predyktory momentu wystąpienia kolejnego zdarzenia, które zostały uzyskane w oparciu o różne estymatory parametrów. Rezultaty symulacji przedstawiono dla procesu MPLP i procesu MGP.

W rozdziale 5 przedstawiona jest analiza znanych z literatury dwóch zbiorów danych. Dla analizowanych danych obliczono wartości estymatorów parametrów rozważanych procesów, przeanalizowano problem wyboru modelu na podstawie analitycznego i graficznego kryterium wyboru oraz porównano dokładność predykcji. Dodatkowo, zaprezentowane zostało zastosowanie podanych w rozdziale 2 własności asymptotycznych estymatorów największej wiarygodności do wyznaczenia realizacji asymptotycznych punktowo przedziałów ufności dla nieznanymi parametrów rozważanych procesów.

Rozdział 6 zawiera dowody twierdzeń przedstawionych w rozdziale 2. Twierdzenia te dotyczą własności asymptotycznych estymatorów największej wiarygodności parametrów procesu MGP i szczególnego przypadku procesu MGP – niejednorodnego procesu Poissona z log-liniową funkcją intensywności.

W pracy przyjęta została następująca konwencja dotycząca cytowań twierdzeń i lematów. W przypadku twierdzeń i lematów znanych z literatury, po ich numerze porządkowym podane jest odwołanie do publikacji źródłowej, w której można znaleźć dane twierdzenie bądź lemat wraz z dowodem, łącznie z numerem porządkowym pod jakim w niej występuje. Dotyczy to również twierdzeń autorskich zawartych w publikacji autora. Brak takiego odwołania oznacza, że dane twierdzenie zostało opracowane na potrzeby tej rozprawy.

# Rozdział 1

## Proces punktowy

W niniejszym rozdziale podajemy definicję procesu punktowego i jego własności, które będą wykorzystywane w dalszej części pracy. Przedstawiamy również pewne szczególne przypadki procesów punktowych, ich interpretacje i zastosowania.

### 1.1 Definicja procesu punktowego i jego własności

Procesy punktowe są modelami probabilistycznymi losowego rozproszenia punktów w pewnej przestrzeni (najczęściej w podzbiorze  $\mathbb{R}^d$ ). Niniejsza rozprawa dotyczy pewnej klasy procesów punktowych, które stanowią modele dla losowych momentów występowania określonych zdarzeń. Stąd, poniżej przedstawiamy definicję procesu punktowego w przypadku, gdy tą przestrzenią jest  $\mathbb{R}_0 = (0, \infty)$ .

Niech  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  będzie przestrzenią probabilistyczną, gdzie  $\Omega$  jest zbiorem niepustym,  $\mathcal{F}$  jest  $\sigma$ -algebrą podzbiorów zbioru  $\Omega$  oraz  $P$  jest miarą probabilistyczną określoną na  $\mathcal{F}$ .

**Definicja 1.1.1.** *Procesem punktowym nazywamy ciąg  $\mathcal{T} = (T_n)_{n \geq 1}$  zmiennych losowych, określonych na przestrzeni  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , przyjmujących wartości ze zbioru  $\mathbb{R}_0 = (0, \infty)$ , spełniający następujące warunki:*

- (i)  $P(0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots) = 1$ ,
- (ii)  $P(T_n < T_{n+1}, T_n < \infty) = P(T_n < \infty)$ ,
- (iii)  $P(\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty) = 1$ .

W zastosowaniach,  $T_1, T_2, \dots$  oznaczają najczęściej losowe momenty wystąpienia pewnego zdarzenia, np. awarii systemu. W dalszej części pracy będziemy przyjmować  $T_0 = 0$ .

**Definicja 1.1.2.** *Procesem liczącym nazywamy proces stochastyczny  $\mathcal{N} = \{N(t), t \geq 0\}$  taki, że*

- (i)  $N(0) = 0$ ,
- (ii)  $N(t) \in \{0, 1, 2, \dots\}$  dla każdego  $t > 0$ ,

(iii) jeżeli  $s \leq t$ , to  $N(s) \leq N(t)$ .

Jeżeli  $\mathcal{T} = (T_n)_{n \geq 1}$  jest procesem punktowym, to odpowiadający mu proces liczący  $\mathcal{N} = \{N(t), t \geq 0\}$  jest taki, że

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}(T_n \leq t). \quad (1.1)$$

Jeżeli  $T_1, T_2, \dots$  interpretujemy jako losowe momenty wystąpienia pewnego zdarzenia, to  $N(t)$  jest losową liczbą zdarzeń, które wystąpiły w przedziale  $[0, t]$ .

Ze względu na związek procesu punkowego z procesem liczącym, często ten drugi nazywany jest w literaturze również procesem punktowym. Poniżej, proces liczący  $\mathcal{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ , który odpowiada procesowi punkowemu  $\mathcal{T} = (T_n)_{n \geq 1}$  będziemy również zamiennie nazywać procesem punktowym.

Oznaczmy przez  $N(t, t+s)$ , gdzie  $t, s \geq 0$ , liczbę zdarzeń, które wystąpiły w przedziale  $(t, t+s]$ , czyli

$$N(t, t+s) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}(t < T_n \leq t+s).$$

**Definicja 1.1.3.** *Proces punktowy  $\mathcal{N}$  ma przyrosty stacjonarne, jeżeli dla każdego  $k \in \mathbb{N}$  i dla każdego  $s > 0$ ,  $P(N(t, t+s) = k)$  jest niezależne od  $t$ .*

**Definicja 1.1.4.** *Proces punktowy ma przyrosty niezależne, jeżeli dla dowolnej skończonej rodziny przedziałów rozłącznych  $(s_1, t_1], (s_2, t_2], \dots, (s_n, t_n]$ , gdzie  $s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \dots \leq s_n < t_n$ , zmienne losowe  $N(t_1) - N(s_1), N(t_2) - N(s_2), \dots, N(t_n) - N(s_n)$  są niezależne.*

**Definicja 1.1.5.** *Funkcją intensywności procesu punkowego  $\mathcal{N} = \{N(t), t \geq 0\}$  nazywamy funkcję*

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(N(t, t+\Delta t) \geq 1)}{\Delta t}.$$

**Definicja 1.1.6.** *Funkcją wartości oczekiwanej procesu  $\mathcal{N} = \{N(t), t \geq 0\}$  nazywamy funkcję*

$$\Lambda(t) = E(N(t)).$$

Dla każdego  $t \geq 0$ , wartość  $\Lambda(t)$  jest oczekiwaną liczbą zdarzeń do momentu  $t$ . Z definicji procesu punkowego  $\mathcal{N} = \{N(t), t \geq 0\}$  wynika, że funkcja wartości oczekiwanej jest niemalejąca.

**Definicja 1.1.7.** *Niech funkcja  $\Lambda(t)$  wartości oczekiwanej procesu punkowego  $\mathcal{N} = \{N(t), t \geq 0\}$  będzie różniczkowalna dla każdego  $t \geq 0$ . Wówczas funkcję ROCOF (ang. rate of occurrence of failures) procesu punkowego  $\mathcal{N} = \{N(t), t \geq 0\}$  nazywamy funkcję*

$$\mu(t) = \frac{d}{dt} \Lambda(t).$$



Zgodnie z przyjętą przez nas definicją procesu punktowego, prawdopodobieństwo wystąpienia więcej niż jednego zdarzenia w dowolnym ustalonym momencie jest równe zero. Zatem dla rozważanych procesów punktowych zawsze zachodzi poniższe twierdzenie.

**Twierdzenie 1.1.1.** ([36], Theorem 13) *Jeżeli prawdopodobieństwo wystąpienia jednocześnie więcej niż jednego zdarzenia jest równe zero, to  $\lambda(t) = \mu(t)$ .*

Z powyższego twierdzenia wynika, że jeżeli funkcja  $\Lambda(t)$  wartości oczekiwanej procesu punktowego  $\mathcal{N} = \{N(t), t \geq 0\}$  jest różniczkowalna, to

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du,$$

gdzie  $\lambda(t)$  jest funkcją intensywności procesu  $\mathcal{N}$ . W dalszej części pracy, funkcję wartości oczekiwanej procesu punktowego będziemy nazywać funkcją skumulowanej intensywności tego procesu.

Niech  $\mathcal{F}_{t-} = \sigma\{N(u); u < t\}$  będzie  $\sigma$ -ciałem generowanym przez proces  $\mathcal{N} = \{N(t), t \geq 0\}$  do chwili  $t$ , które nazywane jest w literaturze historią procesu do chwili  $t$ .

**Definicja 1.1.8.** *Funkcją intensywności warunkowej procesu punktowego  $\mathcal{N}$  nazywamy funkcję*

$$g(t) := \lambda(t|\mathcal{F}_{t-}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(N(t, t + \Delta t) \geq 1 | \mathcal{F}_{t-})}{\Delta t}.$$

Funkcja intensywności warunkowej procesu punktowego nazywana jest również funkcją intensywności całkowitej (ang. *complete intensity function*) procesu punktowego (zob. np. [36]).

**Definicja 1.1.9.** *Funkcją skumulowanej intensywności warunkowej procesu punktowego  $\mathcal{N} = \{N(t), t \geq 0\}$  nazywamy funkcję*

$$G(t) := \Lambda(t|\mathcal{F}_{t-}) = \int_0^t g(u) du.$$

**Twierdzenie 1.1.2.** *Niech  $\mathcal{T} = (T_n)_{n \geq 1}$  będzie procesem punktowym o funkcji  $G$  skumulowanej intensywności warunkowej. Wówczas zmienne losowe  $G(T_i) - G(T_{i-1})$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , są niezależne, o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1.*

Wnioskowanie dotyczące procesów punktowych przeprowadza się na podstawie obserwacji procesu do ustalonej chwili  $\tau$  (ang. *time truncation scheme*) lub do ustalonej liczby zdarzeń (ang. *failure truncation scheme*).

W przypadku, gdy proces punktowy  $\mathcal{T} = (T_n)_{n \geq 1}$  obserwujemy do ustalonej chwili  $\tau$  i  $t_1, \dots, t_{N(\tau)}$  są realizacjami momentów zdarzeń odpowiednio  $T_1, \dots, T_{N(\tau)}$ , to funkcja wiarygodności tego procesu jest następującej postaci ([2])

$$L(\tau) = \left[ \prod_{i=1}^{N(\tau)} g(t_i) \right] \exp \left( - \int_0^\tau g(u) du \right).$$

W przypadku, gdy proces punktowy  $\mathcal{T} = (T_n)_{n \geq 1}$  obserwujemy do ustalonej liczby  $n$  zdarzeń, to funkcja wiarygodności tego procesu jest następującej postaci ([2])

$$L(n) = \left[ \prod_{i=1}^n g(t_i) \right] \exp \left( - \int_0^{t_n} g(u) du \right).$$

Rozwój teorii związanej z procesami punktowymi jest ściśle związany z ich zastosowaniami, które są przedstawione między innymi w drugiej części monografii [16]. W naszych rozważaniach szczególną uwagę zwróciliśmy na ich zastosowania w analizie niezawodności systemów. Stąd, w niniejszej pracy, zdarzenia będziemy często nazywać zamiennie awariami. W rozdziale 5 prezentujemy wykorzystanie przedstawionych w pracy metod statystycznych do analizy danych rzeczywistych, reprezentujących momenty awarii przykładowych systemów naprawialnych.

## 1.2 Szczególne przypadki procesów punktowych

W tym podrozdziale przedstawiamy definicje i własności dwóch najbardziej popularnych procesów punktowych, mianowicie procesu Poissona i procesu odnowy. Przedstawiamy również definicję i własności niejednorodnego procesu gamma, którego proces Poissona jest szczególnym przypadkiem.

### 1.2.1 Proces Poissona

W literaturze można znaleźć różne równoważne definicje procesu Poissona (zob. np. [9], [11], [16]). Poniżej przedstawiamy definicje jednorodnego procesu Poissona i niejednorodnego procesu Poissona zaczerpnięte z monografii [37].

**Definicja 1.2.1.** *Proces liczący  $\mathcal{N} = \{N(t), t \geq 0\}$  nazywamy jednorodnym procesem Poissona z intensywnością  $\lambda$ ,  $\lambda > 0$ , jeżeli*

- (i)  $N(0) = 0$ ,
- (ii) ma przyrosty niezależne,
- (iii) liczba zdarzeń w dowolnym przedziale o długości  $t$  ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną  $\lambda t$ , to znaczy, dla każdego  $s, t, \geq 0$

$$P(N(t+s) - N(s) = n) = \exp(-\lambda t) \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Jednorodny proces Poissona o intensywności  $\lambda$  będziemy oznaczać  $HPP(\lambda)$ .

**Uwaga 1.2.1.** *Z definicji  $HPP(\lambda)$  wynika, że ma on przyrosty stacjonarne.*

**Twierdzenie 1.2.1.** *Jeżeli proces punktowy  $\mathcal{T} = (T_n)_{n \geq 1}$  jest procesem  $HPP(\lambda)$ , to funkcja  $\lambda(t)$  intensywności tego procesu jest równa funkcji  $g(t)$  intensywności warunkowej tego procesu i  $\lambda(t) = g(t) = \lambda$ , a stąd  $\Lambda(t) = G(t) = \lambda t$ .*

*Dowód.* Biorąc pod uwagę niezależność przyrostów procesu HPP( $\lambda$ ) otrzymujemy

$$g(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{P(N(t, t + \Delta t) \geq 1 | \mathcal{F}_{t-})}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{P(N(t, t + \Delta t) \geq 1)}{\Delta t} = \lambda(t) = \lambda.$$

□

W pracy będziemy stosować znane oznaczenie  $o(h)$  dla funkcji, powiedzmy  $f$ , która spełnia warunek  $\lim_{h \rightarrow 0} f(h)/h = 0$ .

**Definicja 1.2.2.** *Proces liczący  $\mathcal{N} = \{N(t), t \geq 0\}$  nazywamy niejednorodnym procesem Poissona z funkcją intensywności  $\lambda(t)$ ,  $t \geq 0$ , jeżeli*

- (i)  $N(0) = 0$ ,
- (ii) ma przyrosty niezależne,
- (iii)  $P(N(t, t + h) \geq 2) = o(h)$ ,
- (iv)  $P(N(t, t + h) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$ .

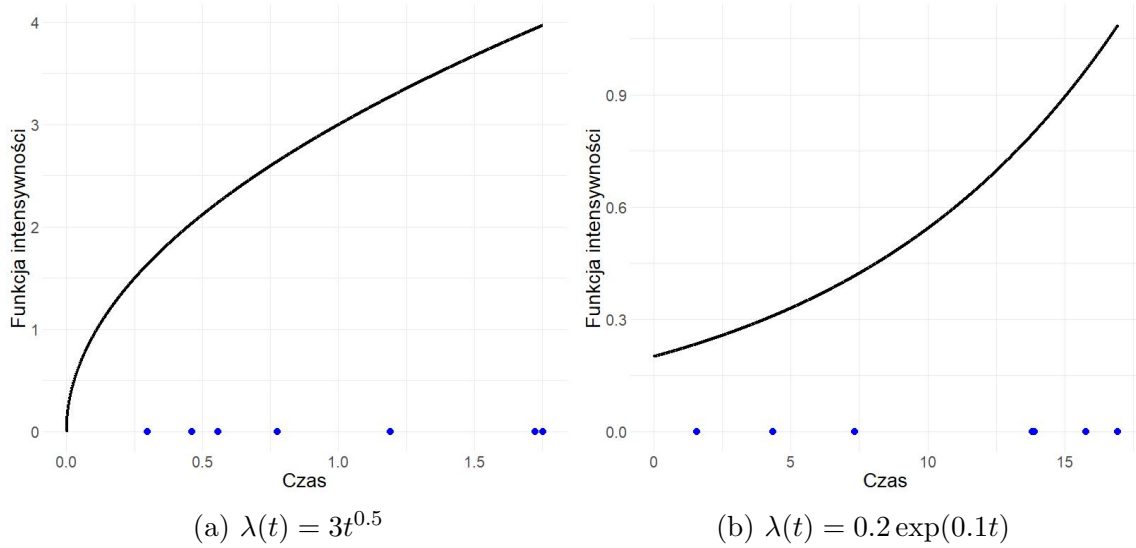
Niejednorodny proces Poissona o funkcji intensywności  $\lambda(t)$  będziemy oznaczać NHPP( $\lambda(t)$ ).

**Twierdzenie 1.2.2.** *Jeżeli proces punktowy jest procesem NHPP( $\lambda(t)$ ), to funkcja  $\lambda(t)$  intensywności tego procesu jest równa funkcji  $g(t)$  intensywności warunkowej tego procesu, a stąd  $G(t) = \Lambda(t)$ .*

*Dowód.* Analogicznie do przypadku procesu HPP (twierdzenie 1.2.1), teza wynika z niezależności przyrostów procesu. □

Z powyższego twierdzenia i z twierdzenia 1.1.2 można wyciągnąć następujący wniosek.

**Wniosek 1.2.1.** *Jeżeli proces punktowy  $\mathcal{T} = (T_n)_{n \geq 1}$  jest procesem NHPP( $\lambda(t)$ ), to  $\Lambda(T_i) - \Lambda(T_{i-1})$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym z parametrem 1, a stąd proces  $\mathcal{T} = (\Lambda(T_n))_{n \geq 1}$  jest procesem HPP(1).*



Rysunek 1.1: Wykresy przykładowych funkcji intensywności procesu NHPP. Niebieskimi punktami oznaczone zostały realizacje momentów kolejnych skoków procesu o zadanej funkcji intensywności

Rysunek 1.1 zawiera przykładowe wykresy dwóch znanych w literaturze funkcji intensywności procesu NHPP: potęgowej funkcji intensywności

$$\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$$

oraz log-liniowej funkcji intensywności

$$\lambda(t) = \rho \exp(\beta t). \quad (1.2)$$

Proces Poissona stanowi model tzw. naprawy minimalnej, w którym po wystąpieniu awarii systemu i jego naprawie, wraca on do stanu tuż przed jej wystąpieniem.

Procesy Poissona bardzo często pojawiają się w literaturze w kontekście ich zastosowań. Na przykład, w pracy Wong i in. [46] procesy NHPP są wykorzystywane do modelowania momentów przybycia statków kontenerowych. Shin i in. [40] zastosował procesy NHPP przy rozpatrywaniu momentów awarii naprawialnych komponentów systemu chłodzącego elektrowni atomowej. Inne zastosowania można znaleźć w pracach [42] (modelowanie momentów wystąpienia trzęsień ziemi), [26] (analiza tendencji zakupowych), [14] (niezawodność oprogramowania).

## 1.2.2 Proces odnowy

Poniższa definicja procesu odnowy pochodzi z monografii [31].

**Definicja 1.2.3.** Niech  $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$  będą dodatnimi, niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie określonym przez dystrybuantę  $F$ . Procesem odnowy, z dystrybuantą odnowy  $F$ , nazywamy proces punktowy  $\mathcal{T} = (T_n)_{n \geq 1}$ , taki, że dla każdego  $i \geq 1$

$$T_i = U_1 + \dots + U_i.$$

Proces odnowy z dystrybuantą odnowy  $F$  będziemy oznaczać  $RP(F)$ .

Z powyższej definicji procesu odnowy i z definicji 1.2.1 wynika następujący fakt.

**Fakt 1.2.1.** *Jeżeli dystrybuanta odnowy  $F$  jest dystrybuantą rozkładu wykładniczego z parametrem  $1/\lambda$  (o wartości oczekiwanej  $1/\lambda$ ), to proces  $RP(F)$  jest procesem HPP( $\lambda$ ).*

**Twierdzenie 1.2.3.** *Funkcja intensywności warunkowej procesu  $RP(F)$  jest postaci*

$$g(t) = z(t - T_{N(t-)}),$$

gdzie  $z(t)$  jest funkcją hazardu rozkładu o dystrybuancie  $F$ , a  $T_{N(t-)}$  jest momentem wystąpienia ostatniego zdarzenia przed chwilą  $t$ .

*Dowód.* Niech  $\{N(t), t \geq 0\}$  będzie procesem liczącym odpowiadającym procesowi  $RP(F)$ . Zgodnie z definicją 1.1.8, funkcja intensywności warunkowej przyjmuje postać

$$g(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{P(N(t, t + \Delta t) \geq 1 | \mathcal{F}_{t-})}{\Delta t}.$$

Zauważmy, że w przypadku procesu  $RP(F)$ , rozkład zmiennej losowej  $T_{i+1}$  zależy wyłącznie od momentu  $i$ -tego zdarzenia. Prawdziwa jest zatem równość

$$g(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{P(N(t, t + \Delta t) \geq 1 | T_{N(t-)})}{\Delta t}.$$

Niech  $W_{N(t+)} = T_{N(t+)} - T_{N(t-)}$  oznacza czas oczekiwania na następne zdarzenie po chwili  $T_{N(t-)}$ , a  $Y(u) = u - T_{N(t-)}$ . Wówczas

$$g(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{P(W_{N(t+)} \in [Y(t), Y(t + \Delta t)])}{P(W_{N(t+)} > Y(t)) \Delta t}. \quad (1.3)$$

Stąd, z definicji funkcji hazardu, wynika

$$g(t) = z(t - T_{N(t-)}).$$

□

**Definicja 1.2.4.** *Procesem odnowy gamma nazywamy proces odnowy, którego dystrybuanta odnowy  $F$  jest dystrybuantą rozkładu gamma  $\mathcal{G}(\kappa, \delta)$  z parametrem kształtu  $\kappa > 0$  oraz parametrem skali  $\delta > 0$ . Odpowiadająca dystrybuancie  $F$  funkcja gęstości  $f$  jest postaci*

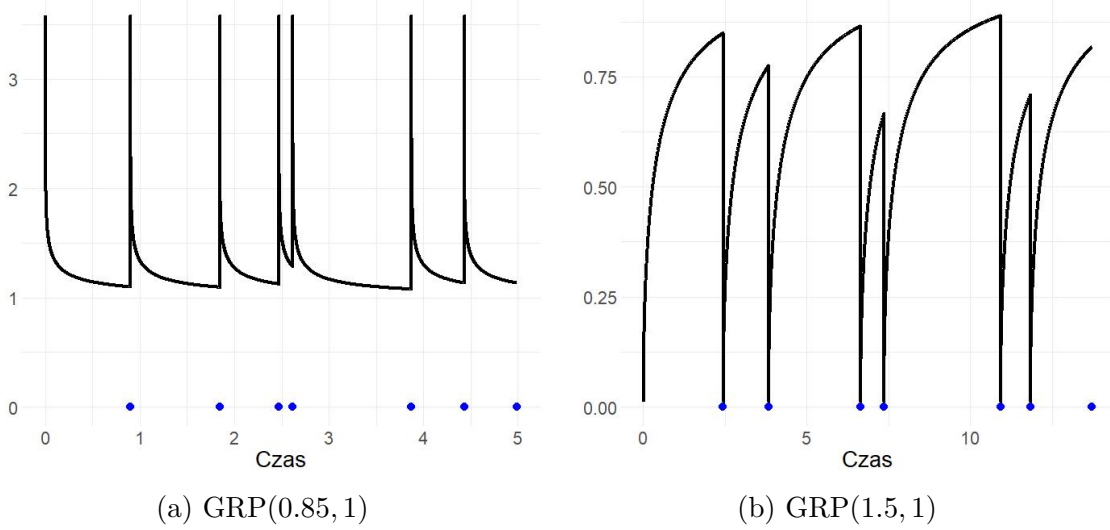
$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\kappa) \delta^\kappa} x^{\kappa-1} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right), \quad (1.4)$$

gdzie  $\Gamma(x)$  oznacza funkcję gamma.

Proces odnowy gamma będziemy oznaczać przez  $GRP(\kappa, \delta)$  lub w skrócie  $GRP$ .

Rysunek 1.2 zawiera przykładowe realizacje funkcji intensywności warunkowej procesu  $GRP$ .

Procesy odnowy stanowią szeroką klasę procesów punktowych, które znajdują zastosowania w praktyce. Są stosowane np. w teorii niezawodności [23], teorii kolejek [8] oraz teorii ruiny [24]. Procesy odnowy stanowią modele tzw. naprawy kompletnej, czyli takiej, w której system po wystąpieniu zdarzenia wraca do stanu w jakim był na początku obserwacji (w chwili  $t = 0$ ).



Rysunek 1.2: Przykładowe realizacje funkcji intensywności warunkowej procesu GRP. Niebieskimi punktami oznaczone zostały realizacje momentów kolejnych skoków procesu

### 1.2.3 Niejednorodny proces gamma

Niejednorodny proces gamma został wprowadzony przez Bermana [5] w następujący sposób. Rozważmy proces NHPP( $\lambda(t)$ ) z funkcją skumulowanej intensywności  $\Lambda(t)$  oraz przyjmijmy, że obserwujemy co  $\kappa$ -te zdarzenie. Na przykład dla  $\kappa = 4$  są to zdarzenia 4, 8, 12, ... procesu NHPP( $\lambda(t)$ ). Jeżeli obserwujemy taki proces punktowy  $(T_i)_{i \geq 1}$  do momentu  $n$ -tego skoku, to funkcja gęstości  $f_n$  łącznego rozkładu zmiennych losowych  $T_1, \dots, T_n$  jest postaci

$$f_n(t_1, \dots, t_n) = \left\{ \prod_{i=1}^n \lambda(t_i) [\Lambda(t_i) - \Lambda(t_{i-1})]^{\kappa-1} \right\} \exp[-\Lambda(t_n)] / [\Gamma(\kappa)]^n, \quad (1.5)$$

gdzie  $t_1, \dots, t_n$  są realizacjami zmiennych losowych odpowiednio  $T_1, \dots, T_n$  ([5]).

Zauważmy, że wyrażenie (1.5) jest funkcją gęstości rozkładu, gdy parametr  $\kappa$  jest dodatni, a niekoniecznie całkowity. Stąd, niejednorodny proces gamma można zdefiniować dla każdej dodatniej wartości parametru  $\kappa$ .

**Definicja 1.2.5.** *Proces punktowy  $(T_i)_{i \geq 1}$ , taki, że dla każdego  $n$  rozkład łączny wektora losowego  $(T_1, \dots, T_n)$  określony jest wzorem (1.5), nazywamy niejednorodnym procesem gamma z funkcją trendu  $\lambda(t)$  i parametrem kształtu  $\kappa$ .*

Niejednorodny proces gamma z funkcją trendu  $\lambda(t)$  i parametrem kształtu  $\kappa$  będziemy oznaczać przez  $\text{IGP}(\lambda(t), \kappa)$ .

W przypadku, gdy parametr  $\kappa$  nie jest całkowity, to przedstawiona powyżej interpretacja tego parametru traci sens. Interpretację tego parametru podamy po przedstawieniu postaci funkcji intensywności warunkowej procesu  $\text{IGP}(\lambda(t), \kappa)$ .

Proces  $\text{IGP}(\lambda(t), \kappa)$  można alternatywnie zdefiniować poprzez rozkłady przyrostów procesu  $(\Lambda(T_i))_{i \geq 1}$  (zobacz [4]).

**Definicja 1.2.6.** Niech  $\Lambda(t)$  będzie niemalejącą funkcją różniczkowalną i  $\Lambda'(t) = \lambda(t)$ . Proces punktowy  $(T_i)_{i \geq 1}$ , taki, że dla każdego  $i \geq 1$  zmienne losowe

$$X_i = \Lambda(T_i) - \Lambda(T_{i-1})$$

są niezależne o tym samym rozkładzie gamma z jednostkowym parametrem skali i parametrem kształtu  $\kappa$ , nazywamy niejednorodnym procesem gamma z funkcją trendu  $\lambda(t)$  i parametrem kształtu  $\kappa$ .

Proces IGP( $\lambda(t), \kappa$ ), który spełnia warunek

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda(t) = \infty, \quad (1.6)$$

jest szczególnym przypadkiem procesu odnowy z trendem, zdefiniowanego przez Lindqvista [27] następująco (zobacz również [28],[29],[30]).

**Definicja 1.2.7.** Niech  $\lambda(t)$  będzie funkcją nieujemną określoną na przedziale  $(0, \infty)$  i niech  $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du$  spełnia warunek (1.6). Proces punktowy  $(T_i)_{i \geq 1}$  nazywamy procesem odnowy z trendem, jeżeli proces  $(\Lambda(T_i))_{i \geq 1}$  jest procesem odnowy. Funkcję  $\lambda(t)$  nazywamy funkcją trendu, natomiast dystrybuantę rozkładu odnowy – funkcją odnowy.

Proces odnowy z trendem, z funkcją trendu  $\lambda$  i funkcją odnowy  $F$ , oznaczany jest w literaturze przez TRP( $\lambda(\cdot), F$ ).

Z definicji 1.2.7 wynika, że proces IGP( $\lambda(t), \kappa$ ), którego funkcja  $\lambda$  spełnia warunek (1.6), jest procesem TRP( $\lambda(\cdot), F$ ), gdzie  $F$  jest dystrybuantą rozkładu gamma  $\mathcal{G}(\kappa, 1)$ . Procesy TRP w literaturze występują jako modele systemów naprawialnych w niezawodności [21], finansach [34, 35], medycynie [25], inżynierii oprogramowania [10, 29], hydrologii [9], a nawet predykcji erupcji wulkanów [4]. Zatem IGP może być rozpatrywany jako odpowiedni model powtarzających się zdarzeń w wymienionych dziedzinach.

**Uwaga 1.2.2.** Reprezentacja procesu TRP, podana w definicji 1.2.7, nie jest jednoznaczna. Dla jednoznaczności przyjmuje się najczęściej, że wartość oczekiwana rozkładu odnowy jest równa 1. W przypadku procesu IGP( $\lambda(t), \kappa$ ), zakładamy, że parametr skali rozkładu odnowy gamma jest równy 1.

**Twierdzenie 1.2.4.** Funkcja intensywności warunkowej procesu IGP( $\lambda(t), \kappa$ ) jest postaci

$$g(t) = z(\Lambda(t) - \Lambda(T_{N(t-)}))\lambda(t), \quad (1.7)$$

gdzie  $z(t)$  jest funkcją hazardu rozkładu gamma  $\mathcal{G}(\kappa, 1)$ , a  $T_{N(t-)}$  momentem wystąpienia ostatniego zdarzenia przed chwilą  $t$ .

*Dowód.* Niech  $\{N(t), t \geq 0\}$  będzie procesem liczącym, który odpowiada procesowi IGP( $\lambda(t), \kappa$ ), a  $\{N_\Lambda(t), t \geq 0\}$  – procesem liczącym, który odpowiada procesowi  $(\Lambda(T_i))_{i \geq 1}$ . Wówczas, funkcja intensywności warunkowej

$$g(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{P(N(t, t + \Delta t) \geq 1 | \mathcal{F}_{t-})}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{P(N_\Lambda(\Lambda(t), \Lambda(t) + \Delta t) \geq 1 | \mathcal{F}_{\Lambda(t)-})}{\Delta t}.$$

Z definicji procesu IGP wiemy, że proces  $(\Lambda(T_i))_{i \geq 1}$  jest procesem odnowy gamma. Zatem

$$\begin{aligned} g(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{P(N_\Lambda(\Lambda(t), \Lambda(t + \Delta t)) \geq 1 | \Lambda(T_{N(t-)}))}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \left[ \frac{P(N_\Lambda(\Lambda(t), \Lambda(t + \Delta t)) \geq 1 | \Lambda(T_{N(t-)}))}{\Delta \Lambda(t)} \frac{\Delta \Lambda(t)}{\Delta t} \right]. \end{aligned}$$

Korzystając z twierdzenia 1.2.3 oraz z  $\lambda(t) = \Lambda'(t)$ , wynika

$$g(t) = z(\Lambda(t) - \Lambda(T_{N(t-)}))\lambda(t).$$

□

Funkcja hazardu  $z(t)$  rozkładu  $G(\kappa, 1)$ , gdy  $\kappa < 1$  jest funkcją malejącą argumentu  $t$  i  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 1$ . Jeżeli  $\kappa > 1$ , to funkcja  $z(t)$  jest rosnącą i  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 1$ . Biorąc pod uwagę opisaną monotoniczność funkcji hazardu rozkładu gamma oraz postać (1.7) funkcji intensywności warunkowej procesu IGP, mamy następującą interpretację parametru  $\kappa$  tego procesu w terminach systemów naprawialnych. System naprawialny, którego momenty awarii występują zgodnie z procesem IGP z parametrem  $\kappa > 1$  charakteryzuje się tym, że jest w lepszym stanie tuż po awarii niż bezpośrednio przed awarią. Im większa jest wartość  $\kappa$ , tym większa jest ta poprawa. W przypadku  $\kappa < 1$ , sytuacja jest odwrotna – obserwowany system jest w gorszym stanie zaraz po naprawie niż bezpośrednio przed awarią.

Oczywiście na stan systemu naprawialnego w chwili  $t$  (wartość funkcji intensywności warunkowej w chwili  $t$ ) ma również wpływ funkcja trendu  $\lambda(t)$ . Jednak z postaci (1.7) funkcji intensywności warunkowej (1.7) procesu IGP wynika, że ten wpływ nie zależy od momentów zdarzeń, które wystąpiły przed chwilą  $t$ .

Rysunek 1.3 zawiera wykres przykładowej realizacji funkcji intensywności warunkowej procesu IGP z parametrem  $\kappa = 1.5$  oraz rosnącą funkcją trendu. Można zaobserwować, że funkcja intensywności warunkowej maleje do zera po każdym zdarzeniu, ale wraz z kolejnymi zdarzeniami szybciej rośnie, a tym samym w krótszym czasie osiąga poziom sprzed poprzedniego zdarzenia.

Poniższe twierdzenie podaje własność procesu IGP, która będzie wykorzystana w estymacji parametrów tego procesu.

**Twierdzenie 1.2.5.** *Jeżeli proces punktowy  $\mathcal{T} = (T_n)_{n \geq 1}$  jest procesem IGP, to dla każdego  $n > 1$  oraz  $i = 1, \dots, n - 1$ , zmienna losowa  $\Lambda(T_i)/\Lambda(T_n)$  ma rozkład beta  $\mathcal{Be}(i, (n - i))$ .*

*Dowód.* Zauważmy, że

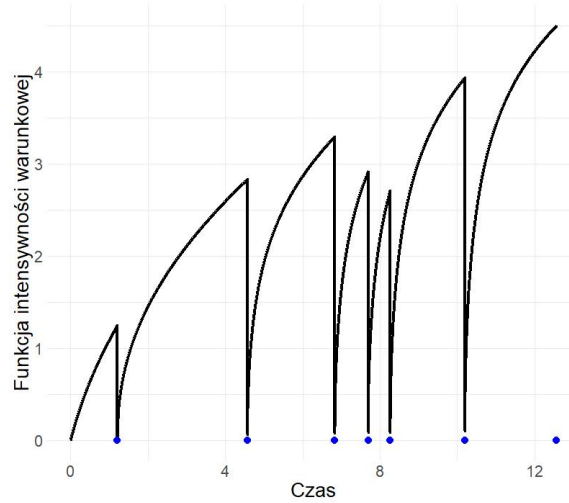
$$\frac{\Lambda(T_i)}{\Lambda(T_n)} = \frac{\Lambda(T_i)}{[\Lambda(T_n) - \Lambda(T_i)] + \Lambda(T_i)}.$$

Korzystając z definicji 1.2.6, wiemy, że zmienne losowe  $\Lambda(T_n) - \Lambda(T_i)$  i  $\Lambda(T_i)$  są niezależne oraz

$$\Lambda(T_i) \sim \mathcal{G}(i\kappa, 1), \quad \Lambda(T_n) - \Lambda(T_i) \sim \mathcal{G}((n - i)\kappa, 1).$$

Na podstawie związku pomiędzy rozkładem gamma a rozkładem beta (zob. np. [45], str. 97) otrzymujemy tezę. □





Rysunek 1.3: Wykres przykładowej realizacji funkcji intensywności warunkowej procesu IGP z parametrem  $\kappa = 1.5$  oraz rosnącą funkcją trendu. Niebieskimi punktami oznaczone zostały momenty zdarzeń

### Proces IGP z potęgową funkcją trendu

**Definicja 1.2.8.** *Modulowanym procesem potęgowym (ang. modulated power law process) nazywamy proces IGP( $\lambda(t), \kappa$ ) z funkcją trendu*

$$\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}, \quad (1.8)$$

gdzie  $\alpha > 0, \beta > 0$ .

Modulowany proces potęgowy z parametrami  $\alpha, \beta$  i  $\kappa$  będziemy oznaczać przez MPLP( $\alpha, \beta, \kappa$ ) lub w skrócie MPLP.

Jeżeli  $\kappa = 1$ , to proces MPLP jest procesem potęgowym (ang. *power law process*), nazywanym również procesem Weibulla. W dalszej części pracy proces ten będziemy oznaczać przez PLP( $\alpha, \beta$ ). Jeżeli  $\beta = 1$ , to proces MPLP jest procesem odnowy z dystrybuantą odnowy rozkładu gamma  $\mathcal{G}(\kappa, 1/\alpha)$ . W dalszej części pracy proces ten będziemy oznaczać GRP( $\kappa, 1/\alpha$ ). Jeżeli  $\kappa$  i  $\beta$  są równe 1, to proces MPLP jest procesem HPP. Wszystkie szczególne przypadki procesu MPLP, wraz ze szczególnymi przypadkami procesu MGP opisanymi w kolejnej sekcji, zostały zaprezentowane na rysunku 1.4.

Korzystając z postaci (1.5) funkcji wiarygodności procesu IGP obserwowanego do czasu  $n$ -tego zdarzenia oraz z tego, że w przypadku procesu MPLP

$$\Lambda(t) = \alpha t^\beta,$$

mamy następujący fakt.

**Fakt 1.2.2.** *Funkcja wiarygodności procesu MPLP( $\alpha, \beta, \kappa$ ), obserwowanego do momentu  $n$ -tego zdarzenia, jest postaci*

$$L(\alpha, \beta, \kappa; t_1, \dots, t_n) = [\Gamma(\kappa)]^{-n} \alpha^{n\kappa} \beta^n \exp(-\alpha t_n^\beta) \prod_{i=1}^n t_i^{\beta-1} (t_i^\beta - t_{i-1}^\beta)^{\kappa-1}. \quad (1.9)$$

## Proces IGP z log-liniową funkcją trendu

**Definicja 1.2.9.** *Niejednorodnym procesem gamma z log-liniową funkcją trendu nazywamy proces IGP( $\lambda(t), \kappa$ ) z funkcją trendu postaci*

$$\lambda(t) = \rho \exp(\beta t), \quad (1.10)$$

gdzie  $\rho > 0$ .

Niejednorodny proces gamma z funkcją trendu (1.10) oraz z parametrem kształtu  $\kappa$  będziemy oznaczać przez MGP( $\varrho, \beta, \kappa$ ) lub w skrócie MGP.

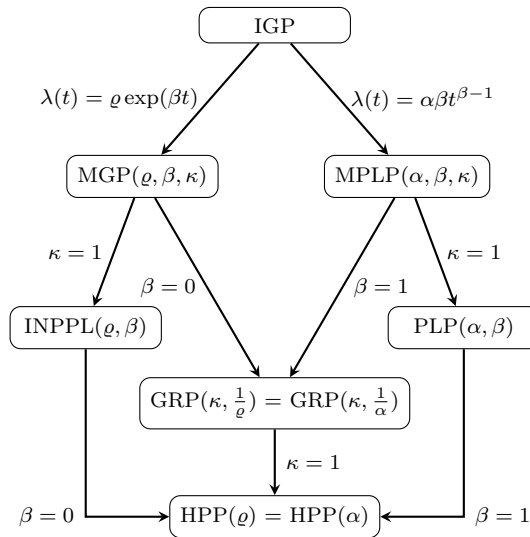
W przypadku procesu MGP( $\varrho, \beta, \kappa$ )

$$\Lambda(t) = \begin{cases} \frac{\varrho}{\beta} [\exp(\beta t) - 1], & \text{gdy } \beta \neq 0, \\ \varrho t, & \text{gdy } \beta = 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

oraz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda(t) = \begin{cases} -\frac{\varrho}{\beta}, & \text{gdy } \beta < 0, \\ \infty, & \text{gdy } \beta \geq 0. \end{cases}$$

Zatem, w przeciwieństwie do procesu MPLP, proces MGP może być wykorzystywany do modelowania zdarzeń powracających z nieznaną ograniczoną ich liczbą. Na przykład, gdy  $\beta < 0$  i  $\kappa = 1$ , proces MGP znany jest jako model Goela-Okumoto [13]. W przypadku, gdy parametr  $\kappa = 1$ , proces MGP jest procesem NHPP z funkcją intensywności (1.10). Proces ten będziemy dalej oznaczać przez INPPL( $\varrho, \beta$ ). W przypadku, gdy parametr  $\beta = 1$ , proces MGP sprowadza się do procesu GRP( $\kappa, 1/\varrho$ ). Jeżeli dodatkowo  $\kappa = 1$ , to proces MGP jest procesem HPP. Wszystkie szczególne przypadki procesów MGP, jak również wprowadzonych w poprzedniej sekcji procesów MPLP, zaprezentowane są na rysunku 1.4.



Rysunek 1.4: Szczególne przypadki procesu IGP

Parametr  $\varrho$  procesu MGP nazywany jest w literaturze czynnikiem skalującym. Zauważmy jednak, że funkcję trendu procesu MGP, określoną wzorem (1.10), możemy przedstawić w następującej postaci

$$\lambda(t) = \exp[\beta t + \log(\varrho)] = \exp\left\{\beta\left[t + \frac{\log(\varrho)}{\beta}\right]\right\}.$$

Stąd, gdy  $\varrho < 1$  i  $\beta > 0$ , wartość  $\log(\varrho)/\beta$  jest ujemna, więc funkcja trendu rośnie powoli na przedziale  $(0, -\log(\varrho)/\beta)$ . W przypadku, gdy  $\varrho > 1$  i  $\beta > 0$ , wartość  $\log(\varrho)/\beta$  jest dodatnia, więc funkcja trendu rośnie bardzo szybko od  $t = 0$ . Zatem iloraz  $\log(\varrho)/\beta$  może być interpretowany jako parametr przesunięcia czasu.

Korzystając z postaci funkcji wiarygodności (1.5) procesu IGP obserwowanego do momentu  $n$ -tego zdarzenia oraz faktu 1.11, otrzymujemy postać funkcji wiarygodności procesu MGP( $\varrho, \beta, \kappa$ ).

**Fakt 1.2.3.** *Funkcja wiarygodności procesu MGP( $\varrho, \beta, \kappa$ ), obserwowanego do momentu  $n$ -tego zdarzenia, jest postaci*

$$L(\varrho, \beta, \kappa; t_1, \dots, t_n) = [\Gamma(\kappa)]^{-n} \beta^{n(\kappa-1)} \varrho^{n\kappa} \exp\left[\beta \sum_{i=1}^n t_i - \frac{\varrho}{\beta} (\exp(\beta t_n) - 1)\right] \prod_{i=1}^n [\exp(\beta t_i) - \exp(\beta t_{i-1})]^{\kappa-1}. \quad (1.12)$$



## Rozdział 2

# Estymacja parametrów procesu IGP metodą największej wiarygodności

Niniejszy rozdział poświęcony jest estymacji metodą największej wiarygodności parametrów procesu IGP na podstawie realizacji  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$  tego procesu, obserwowanego do momentu uzyskania  $n$  skoków. W podrozdziale 2.1 przedstawiamy wyniki dotyczące estymacji parametrów procesu MPLP( $\alpha, \beta, \kappa$ ), natomiast w podrozdziale 2.2 – procesu MGP( $\varrho, \beta, \kappa$ ).

Niech  $\vartheta \in \Theta$  będzie nieznanym parametrem procesu IGP i  $L_n(\vartheta; \mathbf{t})$  – funkcją wiarygodności tego procesu, obserwowanego do momentu  $n$ -tego skoku. Oszacowaniem największej wiarygodności (NW) parametru  $\vartheta$  nazywamy

$$\hat{\vartheta}_n = \arg \max_{\vartheta \in \Theta} L_n(\vartheta; \mathbf{t}).$$

W przypadku rozważanych procesów, oszacowania NW nieznanymi parametrami będziemy wyznaczać w oparciu o logarytm funkcji wiarygodności

$$\ell_n(\theta; \mathbf{t}) = \log L_n(\theta; \mathbf{t}).$$

Wówczas

$$\hat{\vartheta}_n = \arg \max_{\vartheta \in \Theta} \ell_n(\vartheta; \mathbf{t}).$$

W niniejszym rozdziale, oprócz zagadnienia wyznaczania oszacowań NW parametrów rozważanych procesów, przedstawiamy również własności asymptotyczne estymatorów NW parametrów procesu MPLP( $\alpha, \beta, \kappa$ ) i MGP( $\varrho, \beta, \kappa$ ). W obydwu rozważanych przypadkach odpowiednio skalowana macierz drugich pochodnych funkcji  $\ell_n(\theta; \mathbf{t})$  zbiega według prawdopodobieństwa do macierzy osobliwej. Stąd, do wykazania asymptotycznej normalności estymatorów NW parametrów rozważanych procesów, nie mogliśmy zastosować “standardowych” metod opisanych np. w artykułach Weissa [43], [44], czy Rao [34].

## 2.1 Estymacja parametrów procesu MPLP metodą NW

Problem wyznaczania oszacowań NW parametrów procesu MPLP( $\alpha, \beta, \kappa$ ) rozważany był przez Lakey'a i Rigdona [25] oraz Blacka i Rigdona [7]. Bandyopadhyay i Sen [4] podali własności asymptotyczne estymatorów NW parametrów tego procesu.

W niniejszej sekcji podajemy twierdzenie, którego zastosowanie pozwala uniknąć niektórych problemów z wyznaczaniem oszacowań NW parametrów  $\alpha, \beta, \kappa$  procesu MPLP, które opisane są w pracach [25], [7]. Przedstawiamy również własności asymptotyczne estymatorów NW parametrów procesu MPLP, opisane w pracy [4].

### 2.1.1 Wyznaczanie oszacowań NW parametrów procesu MPLP

Korzystając z postaci (1.9) funkcji wiarygodności procesu MPLP( $\alpha, \beta, \kappa$ ), obserwowanego do momentu  $n$ -tego skoku, mamy, że logarytm funkcji wiarygodności tego procesu jest postaci

$$\begin{aligned} \ell_n(\alpha, \beta, \kappa; \mathbf{t}) = & n\kappa \log(\alpha) + n \log(\beta) - \alpha t_n^\beta - n \log(\Gamma(\kappa)) \\ & + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \log(t_i) + (\kappa - 1) \sum_{i=1}^n \log(t_i^\beta - t_{i-1}^\beta). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Stąd, równania wiarygodności przyjmują postać

$$\frac{\partial \ell_n(\alpha, \beta, \kappa; \mathbf{t})}{\partial \alpha} = \frac{n\kappa}{\alpha} - t_n^\beta = 0, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_n(\alpha, \beta, \kappa; \mathbf{t})}{\partial \beta} = & \frac{n}{\beta} + (\kappa - 1) \left[ \log(t_1) + \sum_{i=2}^n \frac{t_i^\beta \log(t_i) - t_{i-1}^\beta \log(t_{i-1})}{t_i^\beta - t_{i-1}^\beta} \right] \\ & - \alpha t_n^\beta \log(t_n) + \sum_{i=1}^n \log(t_i) = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \ell_n(\alpha, \beta, \kappa; \mathbf{t})}{\partial \kappa} = -n\psi(\kappa) + n \log(\alpha) + \sum_{i=1}^n \log(t_i^\beta - t_{i-1}^\beta) = 0, \quad (2.4)$$

gdzie  $\psi$  oznacza funkcję digamma.

Black i Rigdon [7] wyznaczali oszacowania NW parametrów procesu MPLP rozwiązując numerycznie układ równań wiarygodności (2.2), (2.3), (2.4). Zauważyli, że algorytm Newtona-Raphsona może mieć problem ze zbieżnością, w przypadku nieodpowiedniego punktu startowego. Stąd, zaproponowali, żeby w pierwszym kroku, korzystając z metody Nelder-Meada, wyznaczyć odpowiedni punkt startowy, a dopiero w drugim kroku zastosować algorytm Newtona-Raphsona do wyznaczenia rozwiązania układu równań wiarygodności.

W pracy Bandyopadhyay'a i Sena [4] autorzy sprowadzili problem wyznaczania oszacowań NW do numerycznego rozwiązania układu dwóch równań. Mianowicie, z równania (2.2) otrzymali wyrażenie na oszacowanie NW parametru  $\alpha$  postaci

$$\tilde{\alpha} = \frac{n\tilde{\kappa}}{t_n^\beta}, \quad (2.5)$$

gdzie  $\tilde{\beta}$  i  $\tilde{\kappa}$  są rozwiązaniami układu dwóch równań otrzymanych z równań (2.3) i (2.4), po podstawieniu za  $\alpha$  wyrażenia  $n\kappa/t_n^\beta$ . Rozwiązanie otrzymanego układu równań wyznaczali za pomocą algorytmu Newtona-Raphsona.

Poniżej opiszemy jeszcze inne podejście do rozwiązania problemu wyznaczania oszacowań NW parametrów rozpatrywanego modelu, przedstawione w pracy Jokiel-Rokity i Magiery [20]. Polega ono na sprowadzeniu problemu wyznaczania oszacowań trzech parametrów do numerycznego wyznaczenia rozwiązania tylko jednego równania. Podejście to pozwala na prostszą analizę istnienia i jednoznaczności oszacowań NW.

Przyjmijmy następujące oznaczenia

$$A(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \log(t_i),$$

$$B(\beta, \mathbf{t}) = \sum_{i=2}^n \frac{t_i^\beta \log(t_i) - t_{i-1}^\beta \log(t_{i-1})}{t_i^\beta - t_{i-1}^\beta} + \log(t_1). \quad (2.6)$$

**Fakt 2.1.1.** ([20], Proposition 1) Niech  $\mathbf{t}$  będzie realizacją procesu MPLP( $\alpha, \beta, \kappa$ ). Oszacowania największej wiarygodności  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\beta}$  i  $\tilde{\kappa}$  parametrów odpowiednio  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\kappa$  procesu MPLP( $\alpha, \beta, \kappa$ ) są postaci

$$\tilde{\alpha} = \frac{n\tilde{\kappa}}{t_n^{\tilde{\beta}}}, \quad (2.7)$$

gdzie

$$\tilde{\kappa} = \frac{B(\tilde{\beta}, \mathbf{t}) - A(\mathbf{t}) - n/\tilde{\beta}}{B(\tilde{\beta}, \mathbf{t}) - n \log(t_n)} =: \tilde{\kappa}(\tilde{\beta}, \mathbf{t}), \quad (2.8)$$

a  $\tilde{\beta}$  jest rozwiązaniem równania

$$\log(\tilde{\kappa}(\tilde{\beta}, \mathbf{t})) - \psi(\tilde{\kappa}(\tilde{\beta}, \mathbf{t})) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{t_i^\beta - t_{i-1}^\beta}{t_n^\beta/n}\right) = 0. \quad (2.9)$$

Ponieważ parametr  $\kappa$  procesu MPLP jest dodatni, to interesuje nas rozwiązanie  $\tilde{\beta}$  równania (2.9), dla którego wartość  $\tilde{\kappa}(\tilde{\beta}, \mathbf{t})$  jest dodatnia. Ponadto, tylko dla  $\tilde{\kappa}(\tilde{\beta}, \mathbf{t}) > 0$  możemy wyznaczyć wartość wyrażenia po lewej stronie równania (2.9). W badaniu istnienia rozwiązania równania (2.9) skorzystamy z następującego lematu.

**Lemat 2.1.1.** Niech  $\mathbf{t}$  będzie ustaloną realizacją procesu MPLP. Wówczas funkcja  $\tilde{\kappa}(\beta, \mathbf{t})$  jako funkcja argumentu  $\beta$  przyjmuje wartości dodatnie dla  $\beta \in (\beta_L, \infty)$ , gdzie  $\beta_L$  jest jedynym rozwiązaniem równania

$$B(\beta, \mathbf{t}) - n \log(t_n) = 0, \quad (2.10)$$

ze względu na  $\beta$ , gdzie  $B(\beta, \mathbf{t})$  określone jest wzorem (2.6). Ponadto,

$$\beta_L < -n / \sum_{i=1}^n \log(t_i/t_n).$$

*Dowód.* Oznaczmy

$$\begin{aligned}\kappa_D(\beta, \mathbf{t}) &:= B(\beta, \mathbf{t}) - n \log(t_n), \\ \kappa_N(\beta, \mathbf{t}) &:= B(\beta, \mathbf{t}) - A(\mathbf{t})n - \frac{n}{\beta}\end{aligned}$$

odpowiednio mianownik i licznik wyrażenia (2.8). Zauważmy, że  $\kappa_N(\beta, \mathbf{t}) \leq 0$  dla każdej realizacji  $\mathbf{t}$  oraz  $\beta > 0$ . Mamy bowiem

$$\begin{aligned}\kappa_N(\beta, \mathbf{t}) &= \sum_{i=2}^n \frac{t_i^\beta \log(t_i) - t_{i-1}^\beta \log(t_{i-1})}{t_i^\beta - t_{i-1}^\beta} - \sum_{i=2}^n \log(t_i) - \frac{n}{\beta} \\ &= \sum_{i=2}^n \frac{t_i^\beta \log(t_i) - t_{i-1}^\beta \log(t_{i-1})}{t_i^\beta - t_{i-1}^\beta} - \sum_{i=2}^n \frac{t_i^\beta \log(t_i) - t_{i-1}^\beta \log(t_i)}{t_i^\beta - t_{i-1}^\beta} - \frac{n}{\beta} \\ &= \sum_{i=2}^n \frac{t_{i-1}^\beta \log\left(\frac{t_i}{t_{i-1}}\right)}{t_i^\beta - t_{i-1}^\beta} - \frac{n}{\beta} = \sum_{i=2}^n \frac{t_{i-1}^\beta [\log\left(\frac{t_i}{t_{i-1}}\right) - \left(\frac{t_i}{t_{i-1}} - 1\right)]}{\beta(t_i^\beta - t_{i-1}^\beta)} \leq 0.\end{aligned}$$

Ostatnia nierówność wynika z nierówności  $\log(x) \leq x - 1$  dla każdego  $x > 0$ . Rozważmy przebieg zmienności funkcji  $\kappa_D(\beta, \mathbf{t})$  argumentu  $\beta$ , na przedziale  $(0, \infty)$ .

$$\begin{aligned}\lim_{\beta \rightarrow \infty} \kappa_D(\beta, \mathbf{t}) &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[ \sum_{i=2}^n \frac{t_i^\beta \log(t_i) - t_{i-1}^\beta \log(t_{i-1})}{t_i^\beta - t_{i-1}^\beta} \right] + \log(t_1) - n \log(t_n) \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[ \sum_{i=2}^n \frac{\log(t_i) - t_{i-1}^\beta \log(t_{i-1})/t_i^\beta}{1 - t_{i-1}^\beta/t_i^\beta} \right] + \log(t_1) - n \log(t_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \log(t_i) - n \log(t_n) = \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{t_i}{t_n}\right) < 0.\end{aligned}$$

Ponadto,

$$\lim_{\beta \rightarrow 0^+} \kappa_D(\beta, \mathbf{t}) = \infty.$$

Dodatkowo

$$\begin{aligned}\frac{\partial \kappa_D(\beta, \mathbf{t})}{\partial \beta} &= \sum_{i=2}^n \frac{[t_i^\beta \log^2(t_i) - t_{i-1}^\beta \log^2(t_{i-1})](t_i^\beta - t_{i-1}^\beta) - [t_i^\beta \log(t_i) - t_{i-1}^\beta \log(t_{i-1})]^2}{(t_i^\beta - t_{i-1}^\beta)^2} \\ &= \left\{ - \sum_{i=2}^n \frac{t_i^\beta t_{i-1}^\beta [\log(t_i) - \log(t_{i-1})]^2}{(t_i^\beta - t_{i-1}^\beta)^2} \right\} < 0.\end{aligned}$$

Zatem dla każdej realizacji  $\mathbf{t}$  procesu MPLP, funkcja  $\kappa_D(\beta, \mathbf{t})$  argumentu  $\beta$  jest funkcją malejącą na przedziale  $(0, \infty)$ , od nieskończoności do  $\sum_{i=1}^n \log\left(\frac{t_i}{t_n}\right) < 0$ .

Z monotoniczności  $\kappa_D(\beta, \mathbf{t})$  oraz faktu  $\kappa_N(\beta, \mathbf{t}) \leq 0$ , mamy, że dla  $\beta \in (\beta_L, \infty)$ , gdzie  $\beta_L$  jest jedynym pierwiastkiem równania (2.10),  $\tilde{\kappa}(\beta, \mathbf{t}) > 0$ .

Zauważmy, że

$$\kappa_N(\beta, \mathbf{t}) = \kappa_D(\beta, \mathbf{t}) - \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{t_i}{t_n}\right) - \frac{n}{\beta}.$$

Stąd, że dla każdego  $\beta > 0$ ,  $\kappa_N(\beta, \mathbf{t}) < 0$  oraz  $\kappa_D(\beta_L, \mathbf{t}) = 0$ , mamy

$$\beta_L < -n / \sum_{i=1}^n \log(t_i/t_n).$$

□



## 2.1.2 Własności asymptotyczne estymatorów NW parametrów procesu MPLP

W niniejszej sekcji przedstawiamy własności asymptotyczne estymatorów NW parametrów procesu MPLP( $\alpha, \beta, \kappa$ ), które zostały udowodnione w pracy Bandyopadhyay'a i Sena [4].

Niech  $\ell_n^*(\beta, \kappa) = (\ell_{1n}^*(\beta, \kappa), \ell_{2n}^*(\beta, \kappa))'$ , gdzie  $\ell_{1n}^*(\beta, \kappa) = \frac{\partial \ell_n(\alpha, \beta, \kappa; \mathbf{t})}{\partial \beta}$  po podstawieniu  $n\kappa/t_n^\beta$  za  $\alpha$  i  $\ell_{2n}^*(\beta, \kappa) = \frac{\partial \ell_n(\alpha, \beta, \kappa; \mathbf{t})}{\partial \kappa}$ , gdzie również za  $\alpha$  podstawiamy  $n\kappa/t_n^\beta$ . Zatem

$$\ell_{1n}^*(\beta, \kappa) = -n\kappa \log(t_n) + \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \log(t_i) + (\kappa - 1) \sum_{i=1}^n \frac{t_i^\beta \log t_i - t_{i-1}^\beta \log t_{i-1}}{t_i^\beta - t_{i-1}^\beta},$$

$$\ell_{2n}^*(\beta, \kappa) = -n\psi(\kappa) + n \log(\kappa) - n\beta \log(t_n) + n \log(n) + \sum_{i=1}^n \log(t_i^\beta - t_{i-1}^\beta).$$

Niech  $\alpha_0, \beta_0$  i  $\kappa_0$  oznaczają prawdziwe wartości parametrów procesu MPLP odpowiednio  $\alpha, \beta$  i  $\kappa$  oraz

$$M_n(\theta_0) = \{(\beta, \kappa) : \beta = \beta_0 + \tau_1 n^{-\delta}, \quad \kappa = \kappa_0 + \tau_2 n^{-\delta}, \quad \|\tau\| \leq h\},$$

gdzie  $\theta_0 = (\beta_0, \kappa_0)$ , a  $\delta$  i  $h$  są ustalonymi wartościami,  $0 < \delta < \frac{1}{2}$ ,  $0 < h < \infty$ ,  $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ .

**Twierdzenie 2.1.1.** ([4], Theorem 2.1 (a)) *Z prawdopodobieństwem dążącym do 1, gdy  $n \rightarrow \infty$ , istnieje ciąg rozwiązań  $(\tilde{\beta}_n, \tilde{\kappa}_n)$  układu równań*

$$\begin{cases} \ell_{1n}^*(\beta, \kappa) = 0 \\ \ell_{2n}^*(\beta, \kappa) = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

taki, że  $(\tilde{\beta}_n, \tilde{\kappa}_n) \in M_n(\theta_0)$ .

Niech

$$\tilde{\mathbf{Z}}_n = \left( \sqrt{n}(\tilde{\alpha}_n - \alpha_0) / \log(n), \sqrt{n}(\tilde{\beta}_n - \beta_0), \sqrt{n}(\tilde{\kappa}_n - \kappa_0) \right)^T, \quad (2.12)$$

gdzie  $\tilde{\beta}_n, \tilde{\kappa}_n$  są estymatorami parametrów odpowiednio  $\beta, \kappa$  takimi, że dla każdej realizacji  $(t_1, \dots, t_n)$  procesu MPLP ich wartościami są rozwiązania układu równań (2.11) i  $\tilde{\alpha}_n = n\tilde{\kappa}_n/t_n^{\tilde{\beta}_n}$ .

**Twierdzenie 2.1.2.** ([4], Theorem 2.1 (b)) *Wektor losowy  $\tilde{\mathbf{Z}}_n$ , określony wzorem (2.12), jest asymptotycznie normalny  $\mathcal{AN}(\mu_{\tilde{\mathbf{Z}}}, \Sigma_{\tilde{\mathbf{Z}}})$ , gdzie  $\mu_{\tilde{\mathbf{Z}}} = (0, 0, 0)^T$  i*

$$\Sigma_{\tilde{\mathbf{Z}}} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_0^2}{\kappa_0} & -\frac{\alpha_0 \beta_0}{\kappa_0} & 0 \\ -\frac{\alpha_0 \beta_0}{\kappa_0} & \frac{\beta_0^2}{\kappa_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\kappa_0}{\kappa_0 \psi'(\kappa_0) - 1} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

**Uwaga 2.1.1.** Bandyopadhyay i Sen [4] przyjęli inną parametryzację funkcji trendu procesu MPLP, mianowicie

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\theta^\beta} t^{\beta-1}, \quad \theta > 0, \beta > 0.$$

Przedstawione powyżej twierdzenie 2.1.2 zostało dostosowane do przyjętej w tej pracy parametryzacji funkcji trendu (1.8) procesu MPLP.

Z twierdzenia 2.1.2 wynika interesujące zachowanie estymatorów NW parametrów procesu MPLP( $\alpha, \beta, \kappa$ ), które zawarte jest w następującym wniosku.

**Wniosek 2.1.1.** (i) Estymator  $\tilde{\alpha}_n$  parametru  $\alpha$  podlega innemu skalowaniu niż estymatory  $\tilde{\beta}_n$  i  $\tilde{\kappa}_n$  parametrów odpowiednio  $\beta$  i  $\kappa$ . (ii) Macierz kowariancji  $\Sigma_{\tilde{\mathbf{z}}}$ , określona wzorem (2.13) jest osobliwa. (iii) Estymator  $\tilde{\kappa}_n$  jest asymptotycznie niezależny od estymatorów  $\tilde{\alpha}_n$  i  $\tilde{\beta}_n$ .

Poniżej przedstawiamy postaci estymatorów NW dla szczególnych przypadków procesu MPLP, zgodnie z diagramem zamieszczonym na rysunku 1.4. Postaci tych estymatorów będą wykorzystane w dalszej części pracy.

Jako pierwszy rozpatrzmy proces PLP( $\alpha, \beta$ ), czyli proces MPLP( $\alpha, \beta, \gamma$ ) w przypadku, gdy  $\kappa = 1$ . Logarytm funkcji wiarygodności tego procesu, możemy otrzymać podstawiając we wzorze (2.1)  $\kappa = 1$ . Mianowicie

$$\ell_n(\alpha, \beta, 1; \mathbf{t}) = n \log(\alpha) + n \log(\beta) + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \log(t_i) - \alpha t_n^\beta.$$

Poniższa postać estymatorów NW parametrów procesu PLP( $\alpha, \beta$ ) została podana m.in. w pracy Rigdona i Basu [36].

**Fakt 2.1.2.** Estymatory największej wiarygodności  $\tilde{\beta}_{PLP,n}$ ,  $\tilde{\alpha}_{PLP,n}$  parametrów procesu PLP( $\alpha, \beta$ ), obserwowanego do momentu  $n$ -tego skoku, są postaci

$$\tilde{\beta}_{PLP,n} = n \left[ \sum_{i=1}^n \log \left( \frac{T_n}{T_i} \right) \right]^{-1}, \quad (2.14)$$

$$\tilde{\alpha}_{PLP,n} = n T_n^{-\tilde{\beta}_{PLP,n}}. \quad (2.15)$$

**Uwaga 2.1.2.** Proces PLP jest jedynym z rozważanych szczególnych przypadków procesów IGP, dla którego estymatory NW jego parametrów określone są jawnymi wzorami.

**Twierdzenie 2.1.3.** ([39], Theorem 1) Niech  $\tilde{\alpha}_{PLP,n}$ ,  $\tilde{\beta}_{PLP,n}$  będą estymatorami NW parametrów procesu PLP( $\alpha, \beta$ ), określonymi odpowiednio wzorami (2.15), (2.14), oraz  $\alpha_0, \beta_0$  będą prawdziwymi wartościami parametrów tego procesu. Wektor losowy

$$\left( \sqrt{n}(\tilde{\alpha}_{PLP,n} - \alpha_0) / \log(n), \sqrt{n}(\tilde{\beta}_{PLP,n} - \beta_0) \right)^T \quad (2.16)$$

zbiega według rozkładu do dwuwymiarowego rozkładu normalnego o średniej  $(0, 0)^T$  i macierzy kowariancji postaci

$$\begin{bmatrix} \alpha_0^2 & -\alpha_0 \beta_0 \\ -\alpha_0 \beta_0 & \beta_0^2 \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

**Uwaga 2.1.3.** Można zauważyć, że macierz kowariancji (2.17) asymptotycznego rozkładu wektora losowego (2.16) jest równa podmacierzy  $2 \times 2$  macierzy  $\Sigma_{\tilde{\mathbf{z}}}$  (w lewym górnym rogu), określonej wzorem (2.13), gdy przyjmiemy  $\kappa_0 = 1$ .

W następnej kolejności rozpatrzmy proces odnowy gamma  $\text{GRP}(\kappa, 1/\alpha)$ , który jest szczególnym przypadkiem procesu  $\text{MPLP}(\alpha, \beta, \gamma)$ , gdy  $\beta = 1$ . Korzystając ze wzoru (2.1), logarytm funkcji wiarygodności procesu  $\text{GRP}(\kappa, 1/\alpha)$ , obserwowanego do momentu wystąpienia  $n$ -tego zdarzenia, jest postaci

$$\ell_n(\alpha, 1, \kappa; \mathbf{t}) = (\kappa - 1) \sum_{i=1}^n \log(t_i - t_{i-1}) - \alpha t_n - n \log(\Gamma(\kappa)) + n\kappa \log(\alpha). \quad (2.18)$$

Na podstawie definicji 1.2.6 mamy, że zmienne losowe  $W_i = T_i - T_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , są niezależne o rozkładzie gamma  $\mathcal{G}(\kappa, 1/\alpha)$  (przyjmujemy parametryzację zgodną z (1.4)). Stąd, logarytm funkcji wiarygodności (2.18) procesu  $\text{GRP}(\kappa, 1/\alpha)$  można przedstawić w następującej postaci

$$\ell_n(\alpha, 1, \kappa; \mathbf{t}) = (\kappa - 1) \sum_{i=1}^n \log(w_i) - \alpha \sum_{i=1}^n w_i - n \log(\Gamma(\kappa)) + n\kappa \log(\alpha),$$

gdzie  $w_i$  jest realizacją zmiennej losowej  $W_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Poniższy fakt podaje postać estymatorów NW parametrów procesu odnowy gamma  $\text{GRP}(\kappa, 1/\alpha)$  przy przyjętej przez nas parametryzacji.

**Fakt 2.1.3.** Estymatory NW  $\tilde{\alpha}_{\text{GRP},n}$ ,  $\tilde{\kappa}_{\text{GRP},n}$  parametrów procesu  $\text{GRP}(\kappa, 1/\alpha)$ , obserwowanego do momentu  $n$ -tego skoku, są postaci

$$\tilde{\alpha}_{\text{GRP},n} = \frac{n\tilde{\kappa}_{\text{GRP},n}}{\sum_{i=1}^n W_i}, \quad (2.19)$$

gdzie wartość estymatora  $\tilde{\kappa}_{\text{GRP},n}$  dla każdej realizacji  $(t_1, \dots, t_n)$  procesu jest rozwiązaniem równania

$$\log(\kappa) - \psi(\kappa) - \log\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i\right) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(w_i) = 0. \quad (2.20)$$

Na podstawie twierdzeń 2.1.2 i 2.1.3, można oczekiwać, że macierz kowariancji rozkładu asymptotycznego odpowiednio skalowanego wektora estymatorów NW parametrów procesu GRP, szczególnego przypadku procesu MPLP, gdy  $\beta = 1$ , również możemy uzyskać jako odpowiednią podmacierz macierzy (2.13). Poniżej przedstawiamy twierdzenie, które przeczy tym oczekiwaniom.

**Twierdzenie 2.1.4.** Niech  $\tilde{\alpha}_{\text{GRP},n}$  i  $\tilde{\kappa}_{\text{GRP},n}$  będą estymatory NW parametrów odpowiednio  $\alpha$  i  $\kappa$  procesu  $\text{GRP}(\kappa, 1/\alpha)$ , określonymi wzorami odpowiednio (2.19), (2.20), oraz  $\alpha_0$ ,  $\kappa_0$  będą prawdziwymi wartościami parametrów tego procesu. Wówczas wektor losowy

$$(\sqrt{n}(\tilde{\alpha}_{\text{GRP},n} - \alpha_0), \sqrt{n}(\tilde{\kappa}_{\text{GRP},n} - \kappa_0))^T \quad (2.21)$$

zbiega według rozkładu do dwuwymiarowego rozkładu normalnego o średniej  $(0, 0)^T$  i macierzy kowariancji postaci

$$\frac{1}{\kappa_0 \psi'(\kappa_0) - 1} \begin{bmatrix} \kappa_0 & \alpha_0 \\ \alpha_0 & \alpha_0^2 \psi'(\kappa_0) \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Teza powyższego twierdzenia wynika z ogólnego twierdzenia o asymptotycznej normalności estymatorów NW parametrów wykładniczych rodzin rozkładów, którego dowód można znaleźć np. w monografii Bickela i Doksuma [6] (Theorem 5.3.5).

**Uwaga 2.1.4.** Można zauważyć, że macierz kowariancji (2.22) asymptotycznego rozkładu wektora (2.21) nie jest równa odpowiedniej podmacierzy  $2 \times 2$  macierzy  $\Sigma_{\mathbf{Z}}$ , określonej wzorem (2.13), gdy przyjmiemy  $\beta_0 = 1$ . Co więcej, estymatory NW parametrów  $\alpha$  i  $\kappa$  procesu GRP( $\kappa, 1/\alpha$ ) nie są asymptotycznie niezależne jak w przypadku estymatorów odpowiednich parametrów procesu MPLP( $\alpha, \beta, \kappa$ ).

## 2.2 Estymacja parametrów procesu MGP metodą NW

W niniejszej sekcji przedstawiamy wyniki dotyczące estymacji metodą NW parametrów procesu MGP. Analogicznie do przypadku procesu MPLP na początku, w sekcji 2.2.1, rozważamy problem wyznaczania oszacowań NW parametrów tego procesu. Następnie, w sekcji 2.2.2, przedstawiamy asymptotyczne własności estymatorów NW parametrów rozważanego procesu.

Klasa procesów MGP, w przeciwieństwie do klasy procesów MPLP, zawiera podklasę procesów o ograniczonej skumulowanej intensywności (zob. (1.11)). W szczególności, do tej podklasy należy proces NHPP z log-liniową funkcją intensywności (1.2), gdzie parametr  $\beta < 0$ , który w literaturze dotyczącej niezawodności oprogramowania nazywany jest modelem Goela-Okumoto (zob. np. [49]). Estymatory największej wiarygodności procesów NHPP z ograniczoną funkcją wartości oczekiwanej, do których należy w szczególności model Goela-Okumoto [13], były rozważane w pracy Zhao i Xie [49] (zob. również [17]). Autorzy artykułu [49] udowodnili, że w przypadku estymacji parametrów takich procesów NHPP, przy obserwacji procesu do ustalonej chwili  $t$  (ang. *time truncation scheme*), estymatory NW nie są zgodne i nie są asymptotycznie normalne (gdy  $t$  dąży do nieskończoności). Ponadto, udowodnili własności asymptotyczne estymatorów NW parametrów szczególnego przypadku procesu NHPP, nazywanego  $k$ -etapowym procesem NHPP Erlanga (zob. również [22]) i okazało się, że nie są one asymptotycznie normalne. Nayak i in. [33] udowodnili, że nie istnieje zgodny estymator (nie tylko NW) żadnej funkcji parametrów procesu NHPP o ograniczonej funkcji wartości oczekiwanej, powiedzmy przez  $m$ , która nie jest stałą funkcją  $m$ .

Z przedstawionych wyżej rezultatów znanych z literatury wynika, że własności estymatorów NW parametrów procesu MGP, mogą zależeć od przyjętego modelu (rosnącej lub malejącej funkcji trendu) i powinny być rozpatrywane osobno. W niniejszej sekcji opisany jest przypadek estymacji parametrów procesu MGP( $\varrho, \beta, \kappa$ ) o rosnącej funkcji trendu, czyli przypadek, gdy  $\beta > 0$  (oraz  $\varrho > 0, \kappa > 0$ .)

### 2.2.1 Wyznaczanie oszacowań NW parametrów procesu MGP

Problem istnienia oszacowań NW parametrów procesu MGP, przy założeniu, że obserwujemy proces do momentu  $n$ -tego skoku oraz przy ograniczeniu, że  $\beta > 0$ , według

naszej wiedzy rozpatrywany był jedynie w pracy Jokiel-Rokity i Magiery [19]. Poniżej przedstawiamy krótko wyniki zawarte w tej pracy, które stanowią uzasadnienie poszukiwań alternatywnych estymatorów do estymatorów NW parametrów procesu MGP. Te alternatywne estymatory proponujemy w następnym rozdziale 3.

Biorąc pod uwagę postać (1.12) funkcji wiarygodności procesu MGP( $\varrho, \beta, \kappa$ ), obserwowanego do momentu  $n$ -tego skoku, mamy, że logarytm funkcji wiarygodności tego procesu jest postaci

$$\begin{aligned} \ell_n(\varrho, \beta, \kappa; \mathbf{t}) &= -n \log \Gamma(\kappa) + n(\kappa - 1) \log(\beta) + n\kappa \log(\varrho) + \beta S_n(\mathbf{t}) \\ &\quad - \frac{\varrho}{\beta} [\exp(\beta t_n) - 1] + (\kappa - 1) V_n(\beta; \mathbf{t}), \end{aligned} \quad (2.23)$$

gdzie

$$S_n(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n t_i, \quad (2.24)$$

$$V_n(\beta; \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \log [\exp(\beta t_i) - \exp(\beta t_{i-1})]. \quad (2.25)$$

Zatem równania wiarygodności są postaci

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_n(\varrho, \beta, \kappa; \mathbf{t})}{\partial \varrho} &= \frac{n\kappa}{\varrho} - \frac{1}{\beta} [\exp(\beta t_n) - 1] = 0, \\ \frac{\partial \ell_n(\varrho, \beta, \kappa; \mathbf{t})}{\partial \beta} &= -\frac{n(\kappa - 1)}{\beta} + S_n(\mathbf{t}) + \frac{\varrho}{\beta^2} [(1 - \beta t_n) \exp(\beta t_n) - 1] \\ &\quad + (\kappa - 1) N_n(\beta; \mathbf{t}) = 0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial \ell_n(\varrho, \beta, \kappa; \mathbf{t})}{\partial \kappa} = n \log \varrho - n\psi(\kappa) - n \log \beta + V_n(\beta; \mathbf{t}) = 0, \quad (2.27)$$

gdzie  $S_n(\mathbf{t})$ ,  $V_n(\beta; \mathbf{t})$  określone są wzorami odpowiednio (2.24), (2.25) oraz

$$N_n(\beta; \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \frac{t_i \exp(\beta t_i) - t_{i-1} \exp(\beta t_{i-1})}{\exp(\beta t_i) - \exp(\beta t_{i-1})}. \quad (2.28)$$

Analogicznie do rozpatrywanego w poprzedniej sekcji procesu MPLP, wyznaczenie oszacowań NW parametrów procesu MPLP sprowadzimy do numerycznego rozwiązania jednego równania.

**Fakt 2.2.1.** Niech  $\mathbf{t}$  będzie realizacją procesu MGP( $\varrho, \beta, \kappa$ ). Oszacowania NW  $\hat{\varrho}$ ,  $\hat{\beta}$  i  $\hat{\kappa}$  parametrów odpowiednio  $\varrho$ ,  $\beta$  i  $\kappa$ , jeżeli istnieją, są postaci

$$\hat{\varrho} = \frac{n\hat{\kappa}\hat{\beta}}{\exp(\hat{\beta}t_n) - 1}, \quad (2.29)$$

$$\hat{\kappa} = \frac{N_n(\hat{\beta}; \mathbf{t}) - S_n(\mathbf{t}) - n/\hat{\beta}}{N_n(\hat{\beta}; \mathbf{t}) - nt_n \exp(\hat{\beta}t_n)/(\exp(\hat{\beta}t_n) - 1)} =: \hat{\kappa}(\mathbf{t}, \hat{\beta}), \quad (2.30)$$

gdzie  $S_n(\mathbf{t})$ ,  $N_n(\beta; \mathbf{t})$  określone są odpowiednio wzorami (2.24), (2.28), natomiast  $\hat{\beta}$  jest dodatnim rozwiązaniem równania

$$\log(n\hat{\kappa}(\mathbf{t}, \beta)) - \psi(\hat{\kappa}(\mathbf{t}, \beta)) - \log(\exp(\beta t_n) - 1) + \frac{1}{n}V_n(\beta; \mathbf{t}) = 0, \quad (2.31)$$

dla którego  $\hat{\kappa}(\mathbf{t}, \hat{\beta}) > 0$ , gdzie  $V_n(\beta; \mathbf{t})$  określone jest wzorem (2.25).

**Twierdzenie 2.2.1.** ([19], Theorem 1) Niech  $\mathbf{t}$  będzie realizacją procesu MGP( $\varrho, \beta, \kappa$ ), gdzie  $\varrho > 0$ ,  $\beta > 0$  i  $\kappa > 0$ . Oszacowania NW  $\hat{\varrho}, \hat{\beta}, \hat{\kappa}$  parametrów procesu MGP( $\varrho, \beta, \kappa$ ) istnieją, jeżeli spełniony jest jeden z następujących warunków

1.  $S(\mathbf{t}) - (n+1)t_n/2 > 0$ , gdzie  $S(\mathbf{t})$  określone jest wzorem (2.24),
2.  $S(\mathbf{t}) - (n+1)t_n/2 < 0$  i  $\log(R_n(\mathbf{t})) - \psi(R_n(\mathbf{t})) < -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{t_i - t_{i-1}}{t_n/n}\right)$ , gdzie

$$R_n(\mathbf{t}) = -\frac{t_n}{2S(\mathbf{t}) - (n+1)t_n}.$$

## 2.2.2 Własności asymptotyczne estymatorów NW parametrów procesu MGP

Poniżej przedstawiamy wyniki dotyczące asymptotycznych własności estymatorów NW parametrów procesu MGP( $\varrho, \beta, \kappa$ ), które zostały opublikowane w pracy Jokiel-Rokity i Skolińskiego [21]. Dowody twierdzeń zawartych w tej sekcji wykorzystują kilka lematów. Stąd, zarówno potrzebne lematy wraz z dowodami, jak i dowody twierdzeń, zamieściliśmy w oddzielnym rozdziale 6.

Niech  $\vartheta = (\varrho, \beta, \kappa)$  będzie wektorem parametrów procesu MGP( $\varrho, \beta, \kappa$ ) oraz  $A_n(\vartheta) = -\partial^2 \ell_n / \partial \vartheta \partial \vartheta'$  oznacza macierz drugich pochodnych logarytmu funkcji wiarygodności określonej wzorem (2.23). Zatem  $A_n(\vartheta) = (a_{ij}(\vartheta))$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , gdzie

$$\begin{aligned} a_{11}(\vartheta) &= -\frac{\partial^2 \ell_n(\vartheta, \mathbf{t})}{\partial \varrho^2} = \frac{n\kappa}{\varrho^2}, \\ a_{12}(\vartheta) &= -\frac{\partial^2 \ell_n(\vartheta, \mathbf{t})}{\partial \varrho \partial \beta} = \frac{1}{\beta} t_n \exp(\beta t_n) - \frac{1}{\beta^2} [\exp(\beta t_n) - 1] = a_{21}(\vartheta), \\ a_{13}(\vartheta) &= -\frac{\partial^2 \ell_n(\vartheta, \mathbf{t})}{\partial \varrho \partial \kappa} = -\frac{n}{\varrho} = a_{31}(\vartheta), \\ a_{22}(\vartheta) &= -\frac{\partial^2 \ell_n(\vartheta, \mathbf{t})}{\partial \beta^2} = -\frac{n(\kappa - 1)}{\beta^2} + \frac{2\varrho}{\beta^3} [\exp(\beta t_n) - 1] - \frac{2\varrho}{\beta^2} t_n \exp(\beta t_n) \\ &\quad + \frac{\varrho}{\beta} t_n^2 \exp(\beta t_n) + (\kappa - 1) \sum_{i=1}^n \frac{\exp(\beta t_{i-1}) \exp(\beta t_i) (t_i - t_{i-1})^2}{[\exp(\beta t_i) - \exp(\beta t_{i-1})]^2}, \\ a_{23}(\vartheta) &= -\frac{\partial^2 \ell_n(\vartheta, \mathbf{t})}{\partial \beta \partial \kappa} = \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n \frac{t_i \exp(\beta t_i) - t_{i-1} \exp(\beta t_{i-1})}{\exp(\beta t_i) - \exp(\beta t_{i-1})} = a_{32}(\vartheta), \\ a_{33}(\vartheta) &= -\frac{\partial^2 \ell_n(\vartheta, \mathbf{t})}{\partial \kappa^2} = n\psi'(\kappa). \end{aligned}$$

Oznaczmy

$$C_n(\vartheta) = (c_{ij}(\vartheta)) := n^{-1} \begin{bmatrix} a_{11}(\vartheta) & \frac{a_{12}(\vartheta)}{\log n} & a_{13}(\vartheta) \\ \frac{a_{21}(\vartheta)}{\log n} & \frac{a_{22}(\vartheta)}{\log^2 n} & \frac{a_{23}(\vartheta)}{\log n} \\ a_{31}(\vartheta) & \frac{a_{32}(\vartheta)}{\log n} & a_{33}(\vartheta) \end{bmatrix}$$

macierz odpowiednio skalowanych elementów macierzy  $A_n(\vartheta)$ .

Niech  $\vartheta_0 = (\varrho_0, \beta_0, \kappa_0)$  oznacza prawdziwą wartość parametru  $\vartheta = (\varrho, \beta, \kappa)$  procesu MGP.

**Twierdzenie 2.2.2.** ([21], Theorem 1) *Macierz  $C_n(\vartheta_0)$  zbiega według prawdopodobieństwa do macierzy*

$$\Sigma_C = \begin{bmatrix} \frac{\kappa_0}{\varrho_0^2} & \frac{\kappa_0}{\beta_0 \varrho_0} & -\frac{1}{\varrho_0} \\ \frac{\kappa_0}{\beta_0 \varrho_0} & \frac{\kappa_0}{\beta_0^2} & -\frac{1}{\beta_0} \\ -\frac{1}{\varrho_0} & -\frac{1}{\beta_0} & \psi'(\kappa_0) \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

gdy  $n$  dąży do nieskończoności.

**Uwaga 2.2.1.** *Macierz  $\Sigma_C$ , określona wzorem (2.32), jest macierzą osobliwą rzędu dwa. Zatem, jak zostało wspomniane na początku tego rozdziału, asymptotyczne własności estymatorów NW w rozpatrywanym modelu nie mogą być uzyskane w oparciu o podejście prezentowane np. w pracach Weissa [43, 44], czy Rao [34].*

Podstawiając za  $\varrho$  w równaniach wiarygodności (2.26) i (2.27)  $\varrho = \frac{n\kappa\beta}{\exp(\beta t_n) - 1}$ , równania (2.26) i (2.27) tworzą następujący układ równań

$$\begin{cases} \ell_{1n}^*(\theta) := \frac{n}{\beta} + S_n(\mathbf{t}) - \frac{n\kappa t_n \exp(\beta t_n)}{\exp(\beta t_n) - 1} + (\kappa - 1)N_n(\beta; \mathbf{t}) = 0 \\ \ell_{2n}^*(\theta) := n \log \frac{n\kappa}{\exp(\beta t_n) - 1} - n\psi(\kappa) + V_n(\beta; \mathbf{t}) = 0, \end{cases} \quad (2.33)$$

gdzie  $S_n(\mathbf{t})$ ,  $N_n(\beta; \mathbf{t})$  i  $V_n(\beta; \mathbf{t})$  określone są wzorami odpowiednio (2.24), (2.28) i (2.25) oraz  $\theta = (\beta, \kappa)$ .

Niech  $\theta_0$  będzie prawdziwą wartością parametru  $\theta$  i

$$M_n(\theta_0) = \{(\beta, \kappa) : \beta = \beta_0 + \tau_1 n^{-\delta}, \quad \kappa = \kappa_0 + \tau_2 n^{-\delta}, \|\tau\| \leq h\},$$

gdzie  $\delta$  i  $h$  są ustalonymi wartościami,  $0 < \delta < \frac{1}{2}$ ,  $0 < h < \infty$ ,  $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ .

**Twierdzenie 2.2.3.** ([21], Theorem 2) *Z prawdopodobieństwem dążącym do 1, gdy  $n \rightarrow \infty$ , istnieje ciąg rozwiązań  $\hat{\theta}_n = (\hat{\beta}_n, \hat{\kappa}_n) \in M_n(\theta_0)$  układu równań (2.33).*

Oznaczmy  $\mathbf{Z}_n = (Z_{1n}, Z_{2n}, Z_{3n})^T$ , gdzie

$$\begin{aligned} Z_{1n} &= \sqrt{n}(\hat{\varrho}_n - \varrho_0) / \log(n), \\ Z_{2n} &= \sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta_0), \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$Z_{3n} = \sqrt{n}(\hat{\kappa}_n - \kappa_0), \quad (2.35)$$

gdzie  $\hat{\beta}_n, \hat{\kappa}_n$  określone są w twierdzeniu 2.2.3, natomiast

$$\hat{\varrho}_n = \frac{n\hat{\kappa}_n\hat{\beta}_n}{\exp(\beta t_n) - 1}.$$

**Twierdzenie 2.2.4.** ([21], Theorem 3) *Wektor losowy  $\mathbf{Z}_n$  jest asymptotycznie normalny  $\mathcal{AN}(\mu_Z, \Sigma_Z)$ , gdzie  $\mu_Z = (0, 0, 0)^T$  i*

$$\Sigma_Z = \begin{bmatrix} \frac{\varrho_0^2}{\kappa_0} & -\frac{\varrho_0\beta_0}{\kappa_0} & 0 \\ -\frac{\varrho_0\beta_0}{\kappa_0} & \frac{\beta_0^2}{\kappa_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\kappa_0}{\kappa_0\psi'(\kappa_0) - 1} \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Zauważmy, że w przypadku procesu MGP, możemy sformułować następujący wniosek z twierdzenia 2.2.4, analogiczny do wniosku 2.1.1 z twierdzenia 2.1.2.

**Wniosek 2.2.1.** (i) *Estymator  $\hat{\varrho}_n$  parametru  $\varrho$  podlega innemu skalowaniu niż estymatory  $\hat{\beta}_n$  i  $\hat{\kappa}_n$  parametrów odpowiednio  $\beta$  i  $\kappa$ . (ii) *Macierz kowariancji  $\Sigma_Z$ , określona wzorem (2.36), jest osobliwa. (iii) Estymator  $\hat{\kappa}_n$  jest asymptotycznie niezależny od estymatorów  $\hat{\varrho}_n$  i  $\hat{\beta}_n$ .**

Szczególnymi przypadkami procesu MGP( $\varrho, \beta, \kappa$ ) są proces odnowy gamma GRP( $\kappa, 1/\varrho$ ) (proces MGP( $\varrho, \beta, \kappa$ ), gdy  $\beta = 0$ ) oraz niejednorodny proces Poissona z funkcją intensywności  $\lambda(t) = \varrho \exp(\beta t)$  (proces MGP( $\varrho, \beta, \kappa$ ), gdy  $\kappa = 1$ ), który dalej będziemy oznaczać INPPL( $\varrho, \beta$ ).

Estymacja metodą NW parametrów procesu odnowy gamma, który jest również szczególnym przypadkiem procesu MPLP, rozważana była w podrozdziale 2.1 (sekcja 2.1.2). Stąd, poniżej przedstawiamy postać i własności estymatorów NW parametrów procesu INPPL( $\varrho, \beta$ ).

Korzystając z postaci funkcji wiarygodności (2.23) procesu MGP( $\varrho, \beta, \kappa$ ), gdy  $\kappa = 1$ , otrzymujemy, że logarytm funkcji wiarygodności procesu INPPL( $\varrho, \beta$ ) jest postaci

$$\ell_n(\varrho, \beta, 1; \mathbf{t}) = \ell_{INP,n}(\varrho, \beta; \mathbf{t}) = n \log(\varrho) + \beta S_n(\mathbf{t}) - \frac{\varrho}{\beta} [\exp(\beta t_n) - 1]. \quad (2.37)$$

**Fakt 2.2.2.** *Estymatory największej wiarygodności  $\hat{\varrho}_{INP,n}, \hat{\beta}_{INP,n}$  parametrów procesu INPPL( $\varrho, \beta$ ), obserwowanego do momentu  $n$ -tego skoku, są postaci*

$$\hat{\varrho}_{INP,n} = \frac{n\hat{\beta}_{INP,n}}{\exp(\hat{\beta}_{INP,n}t_n) - 1}, \quad (2.38)$$



gdzie  $\hat{\beta}_{INP,n}$  jest estymatorem, którego wartość dla każdej realizacji  $(t_1, \dots, t_n)$  procesu INPPL( $\varrho, \beta$ ) jest rozwiązaniem równania

$$\sum_{i=1}^n t_i + \frac{n}{\beta} - nt_n \frac{\exp(\beta t_n)}{\exp(\beta t_n) - 1} = 0. \quad (2.39)$$

**Twierdzenie 2.2.5.** Niech  $\hat{\varrho}_{INP,n}, \hat{\beta}_{INP,n}$  będą estymatorami NW parametrów procesu INPPL( $\varrho, \beta$ ), określonymi odpowiednio wzorami (2.38), (2.39), oraz  $\alpha_0, \beta_0$  będą prawdziwymi wartościami parametrów tego procesu. Wektor losowy

$$\left( \sqrt{n}(\hat{\varrho}_{INP,n} - \alpha_0) / \log(n), \sqrt{n}(\hat{\beta}_{INP,n} - \beta_0) \right)^T \quad (2.40)$$

zbiega według rozkładu do dwuwymiarowego rozkładu normalnego o średniej  $(0, 0)^T$  i macierzy kowariancji postaci

$$\begin{bmatrix} \varrho_0^2 & -\varrho_0\beta_0 \\ -\varrho_0\beta_0 & \beta_0^2 \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Dowód powyższego twierdzenia znajduje się w rozdziale 6.

**Uwaga 2.2.2.** Analogicznie do szczególnego przypadku procesu MPLP – procesu PLP (zob. uwaga 2.1.3), macierz kowariancji (2.41) asymptotycznego rozkładu wektora (2.40) jest równa podmacierzy  $2 \times 2$  macierzy  $\Sigma_{\mathbf{Z}}$  (w lewym górnym rogu), określonej wzorem (2.36), gdy przyjmiemy  $\kappa_0 = 1$ . Jednak również analogicznie do szczególnego przypadku procesu MPLP - procesu GRP (zob. uwaga 2.1.4), macierz kowariancji (2.22) asymptotycznego rozkładu wektora (2.21) nie jest równa odpowiedniej podmacierzy  $2 \times 2$  macierzy  $\Sigma_{\mathbf{Z}}$ , określonej wzorem (2.36), gdy przyjmiemy  $\beta_0 = 0$ .



## Rozdział 3

# Estymacja parametrów procesu IGP w oparciu o jego własności

W niniejszym rozdziale przedstawiamy alternatywne do NW metody estymacji parametrów procesu IGP. Większość z zaproponowanych estymatorów bazuje na funkcjach estymujących, wyznaczonych w oparciu o własności procesu IGP opisane w sekcji 1.2.3. Przez funkcję estymującą dla nieznanego parametru  $\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_k) \in \mathbb{R}^k$  rozumiemy funkcję obserwacji i tego parametru (zob. np. [12], [32]), przyjmującą wartości w zbiorze  $\mathbb{R}^k$ . W rozpatrywanych przez nas modelach, funkcja estymująca, powiedzmy  $h$ , jest funkcją procesu  $(T_i)_{i \geq 1}$  obserwowanego do momentu  $n$ -tego skoku oraz parametru wektorowego  $\vartheta$  lub jego jednej ze współrzędnych. Estymatorem parametru  $\vartheta$  bazującym na funkcji estymującej  $h(\mathbf{T}, \vartheta)$ , gdzie  $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n)$ , jest estymator, którego wartością dla każdej realizacji  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$  procesu  $(T_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , jest rozwiązanie równania estymującego

$$h(\mathbf{t}, \vartheta) = 0,$$

gdzie  $0$  oznacza  $k$ -wymiarowy wektor zerowy, w przypadku  $k$ -wymiarowego parametru  $\vartheta$ . Zaproponowane w tym rozdziale estymatory bazują na nieobciążonych funkcjach estymujących, czyli takich, że dla każdego  $\vartheta \in \Theta$

$$E_{\vartheta} h(\mathbf{T}, \vartheta) = 0.$$

Przedstawione w poprzednim rozdziale estymatory NW parametrów procesów IGP są szczególnymi przypadkami estymatorów bazujących na nieobciążonych funkcjach estymujących. Zaznaczmy, że nieobciążone równania estymujące nie muszą prowadzić do nieobciążonych estymatorów. Jednak, w literaturze, do estymacji nieznanymi parametrów, zaleca się stosowanie nieobciążonych równań estymujących (zob. np. [47]).

### 3.1 Estymacja parametrów procesu IGP w oparciu o rozkład różnic transformowanych momentów zdarzeń

Rozpatrzmy zmienne losowe

$$X_i = \Lambda_\eta(T_i) - \Lambda_\eta(T_{i-1}), \quad (3.1)$$

$i = 1, \dots, n$ , gdzie  $(T_i)_{i \geq 1}$  jest procesem IGP( $\eta, \kappa$ ), obserwowanym do momentu  $n$ -tego skoku, o skumulowanej intensywności warunkowej  $\Lambda_\eta$ , gdzie  $\eta$  jest nieznanym parametrem związanym z funkcją trendu, natomiast  $\kappa$  jest parametrem kształtu procesu IGP. Oznaczmy  $\vartheta = (\eta, \kappa)$ . Z definicji 1.2.6 mamy, że zmienne losowe  $X_i, i = 1, \dots, n$ , są niezależne oraz

$$X_i \sim \mathfrak{G}(\kappa, 1). \quad (3.2)$$

Naturalnym wydaje się zastosowanie znanych metod estymacji parametrów rozkładu obserwowalnych zmiennych losowych niezależnych o jednakowym rozkładzie do estymacji parametrów procesu IGP w oparciu o “obserwacje” zmiennych losowych  $X_i, i = 1, \dots, n$ .

W sekcji 3.1.1 proponujemy równania estymujące dla nieznanymi parametrów procesu IGP uzyskane przy zastosowaniu metody momentów, natomiast w sekcji 3.1.2 – metody najmniejszych kwadratów. Podajemy również uzasadnienie, że zarówno metoda momentów jak i metoda najmniejszych kwadratów, w przypadku rozważanych modeli, nie prowadzi do rozsądnych rozwiązań. Przedstawiamy jednak te propozycje dla kompletności.

#### 3.1.1 Estymacja parametrów procesu IGP metodą momentów

Korzystając z (3.2), mamy, że  $E_\vartheta(X_i) = \kappa$ ,  $\text{Var}_\vartheta(X_i) = \kappa$  oraz  $E_\vartheta(\log X_i) = \psi(\kappa)$  (zob. np. [18]). Zatem, możemy rozważyć następujący układ równań estymujących dla parametru  $\vartheta$

$$\begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \kappa = 0 \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \kappa)^2 - \kappa = 0 \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(X_i) - \psi(\kappa) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Biorąc pod uwagę wzór (3.1), powyższy układ równań (3.3), dla ustalonej realizacji  $\mathbf{t}$  procesu IGP( $\eta, \kappa$ ), sprowadza się do następującego

$$\begin{cases} \Lambda_\eta(t_n) = n\kappa \\ \sum_{i=1}^n [\Lambda_\eta(t_i) - \Lambda_\eta(t_{i-1}) - \kappa]^2 = n\kappa \\ \sum_{i=1}^n \log[\Lambda_\eta(t_i) - \Lambda_\eta(t_{i-1})] = n\psi(\kappa). \end{cases} \quad (3.4)$$

Rozwiązanie układu równań (3.4), ze względu na parametr  $\vartheta$ , będziemy nazywać oszacowaniem metodą momentów (MM) parametru  $\vartheta$ .

### Estymacja parametrów procesu MPLP metodą momentów

W przypadku procesu MPLP( $\alpha, \beta, \kappa$ ), funkcja  $\Lambda_\eta$  skumulowanej intensywności warunkowej procesu jest postaci  $\Lambda_\eta(t) = \alpha t^\beta$ , gdzie  $\eta = (\alpha, \beta)$ . Stąd, układ równań (3.4) sprowadza się do następującego

$$\begin{cases} \alpha t_n^\beta = n\kappa \\ \sum_{i=1}^n (\alpha t_i^\beta - \alpha t_{i-1}^\beta - \kappa)^2 = n\kappa \\ \sum_{i=1}^n \log[\alpha(t_i^\beta - t_{i-1}^\beta)] = n\psi(\kappa). \end{cases} \quad (3.5)$$

Wyznaczając parametr  $\alpha$  z pierwszego równania powyższego układu równań (3.5) i podstawiając do równania drugiego i trzeciego oraz wyznaczając parametr  $\kappa$  z równania drugiego po podstawieniu  $\alpha$  i wstawiając za  $\kappa$  w równaniu trzecim, otrzymujemy, że oszacowania  $\tilde{\alpha}_M$ ,  $\tilde{\kappa}_M$  metody momentów, parametrów odpowiednio  $\alpha$ ,  $\kappa$  procesu MPLP( $\alpha, \beta, \kappa$ ), są postaci

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_M &= \frac{n\tilde{\kappa}_M}{t_n^{\beta_M}}, \\ \tilde{\kappa}_M &= \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{t_i^{\beta_M} - t_{i-1}^{\beta_M}}{t_n^{\beta_M}/n} - 1 \right)^2 \right]^{-1} =: \tilde{\kappa}_M(\tilde{\beta}_M, \mathbf{t}), \end{aligned} \quad (3.6)$$

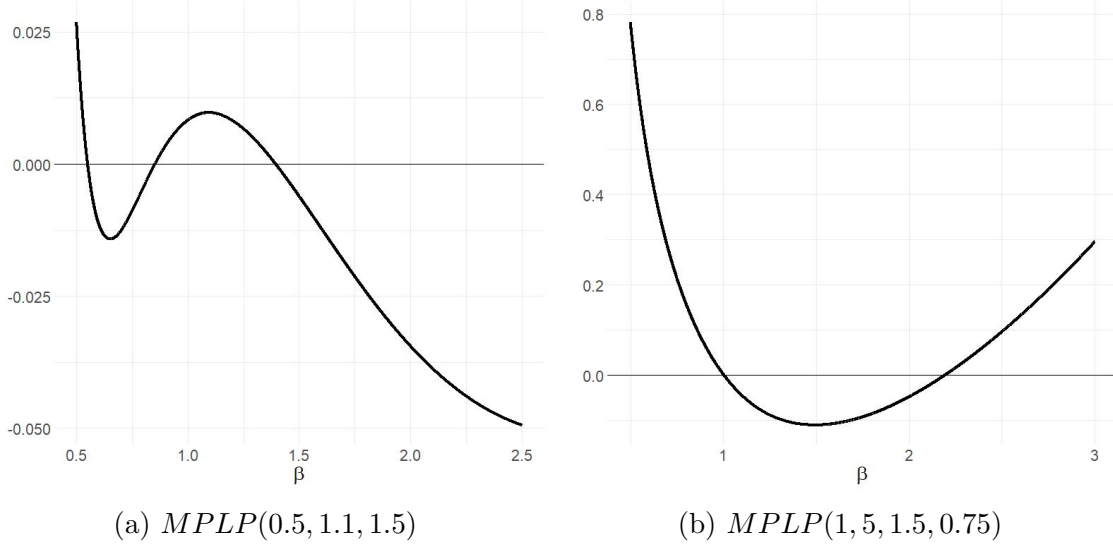
gdzie oszacowanie  $\tilde{\beta}_M$  parametru  $\beta$  jest rozwiązaniem równania

$$\tilde{h}_M(\beta, \mathbf{t}) := \log(\tilde{\kappa}_M(\beta, \mathbf{t})) - \psi(\tilde{\kappa}_M(\beta, \mathbf{t})) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left( \frac{t_i^\beta - t_{i-1}^\beta}{t_n^\beta/n} \right) = 0. \quad (3.7)$$

**Uwaga 3.1.1.** W przeciwieństwie do  $\tilde{\kappa} = \kappa(\tilde{\beta}, \mathbf{t})$ , określonego wzorem (2.8), które może przyjmować wartości ujemne dla niektórych realizacji  $\mathbf{t}$  procesu MPLP i wartości  $\tilde{\beta}$ , wartość  $\tilde{\kappa}_M = \kappa_M(\beta, \mathbf{t})$ , wyrażenia określonego wzorem (3.6), jest dodatnia dla każdej realizacji  $\mathbf{t}$  procesu MPLP i każdego  $\tilde{\beta}_M$ .

**Uwaga 3.1.2.** Dla ustalonej realizacji  $\mathbf{t}$  procesu MPLP, równanie (3.7), którego rozwiązanie względem  $\beta$  jest oszacowaniem MM parametru  $\beta$  różni się od równania (2.9), którego rozwiązanie względem  $\beta$  jest oszacowaniem NW parametru  $\beta$ , wyrażeniem (3.6), które określa oszacowanie parametru  $\kappa$ .

Niestety, równanie (3.7) dla ustalonej realizacji  $\mathbf{t}$  procesu MPLP, może mieć więcej niż jedno rozwiązanie (zob. rysunek 3.1). Dodatkowo, różne rozwiązania tego równania mogą leżeć blisko siebie. Z tego powodu, nie polecamy stosowania tej metody estymacji parametrów procesu MPLP.



Rysunek 3.1: Wykresy funkcji  $\tilde{h}_M(\beta, \mathbf{t})$  argumentu  $\beta$  dla przykładowych realizacji  $\mathbf{t}$  procesu MPLP, (a) dla  $n = 25$ , (b) dla  $n = 40$

### Estymacja parametrów procesu MGP metodą momentów

W przypadku procesu  $MGP(\varrho, \beta, \kappa)$ , funkcja  $\Lambda_\eta$  skumulowanej intensywności warunkowej procesu jest postaci  $\Lambda_\eta(t) = \frac{\varrho}{\beta}[\exp(\beta t) - 1]$ , gdzie  $\eta = (\varrho, \beta)$ . Stąd, układ równań (3.4) sprowadza się do następującego

$$\begin{cases} \varrho[\exp(\beta t_n) - 1] = n\beta\kappa \\ \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\varrho}{\beta} [\exp(\beta t_i) - \exp(\beta t_{i-1})] - \kappa \right\}^2 = n\kappa \\ \sum_{i=1}^n \log \left\{ \frac{\varrho}{\beta} [\exp(\beta t_i) - \exp(\beta t_{i-1})] \right\} = n\psi(\kappa). \end{cases} \quad (3.8)$$

Wyznaczając parametr  $\varrho$  z pierwszego równania układu równań (3.8) i podstawiając do równania drugiego i trzeciego oraz wyznaczając parametr  $\kappa$  z równania drugiego po podstawieniu  $\varrho$  i wstawiając za  $\kappa$  w równaniu trzecim, otrzymujemy, że oszacowania  $\hat{\varrho}_M, \hat{\kappa}_M$  metody momentów parametrów odpowiednio  $\varrho, \kappa$  procesu  $MGP(\varrho, \beta, \kappa)$  są postaci

$$\hat{\varrho}_M = \frac{n\hat{\beta}_M\hat{\kappa}_M}{\exp(\hat{\beta}_M t_n) - 1},$$

$$\hat{\kappa}_M = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\exp(\hat{\beta}_M t_i) - \exp(\hat{\beta}_M t_{i-1})}{(\exp(\hat{\beta}_M t_n) - 1)/n} - 1 \right]^2 \right\}^{-1} =: \hat{\kappa}_M(\hat{\beta}_M, \mathbf{t}), \quad (3.9)$$

gdzie  $\hat{\beta}_M$  jest rozwiązaniem równania

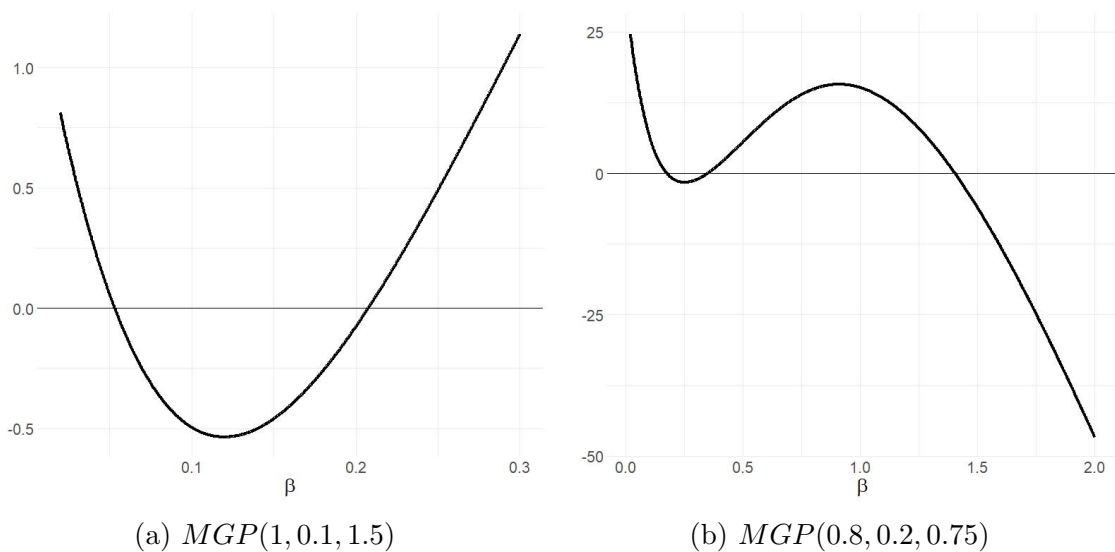
$$\begin{aligned} \hat{h}_M(\beta, \mathbf{t}) := & \log(\hat{\kappa}_M(\beta, \mathbf{t})) - \psi(\hat{\kappa}_M(\beta, \mathbf{t})) \\ & + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left[ \frac{\exp(\beta t_i) - \exp(\beta t_{i-1})}{(\exp(\beta t_n) - 1)/n} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

W przypadku procesu MGP i metody MM estymacji jego parametrów mamy analogiczne uwagi jak w przypadku procesu MPLP.

**Uwaga 3.1.3.** W przeciwieństwie do  $\hat{\kappa} = \kappa(\hat{\beta}, \mathbf{t})$ , określonego wzorem (2.30), które może przyjmować wartości ujemne dla niektórych realizacji  $\mathbf{t}$  procesu MGP i wartości  $\hat{\beta}$ , wartość  $\hat{\kappa}_M = \hat{\kappa}_M(\hat{\beta}_M, \mathbf{t})$ , wyrażenia określonego wzorem (3.9), jest dodatnia dla każdej realizacji  $\mathbf{t}$  procesu MGP i każdego  $\hat{\beta}_M$ .

**Uwaga 3.1.4.** Dla ustalonej realizacji  $\mathbf{t}$  procesu MGP, równanie (3.10), którego rozwiązanie względem  $\beta$  jest oszacowaniem MM parametru  $\beta$  różni się od równania (2.31), którego rozwiązanie względem  $\beta$  jest oszacowaniem NW parametru  $\beta$ , wyrażeniem (3.9), które określa oszacowanie parametru  $\kappa$ .

Niestety, podobnie jak w przypadku procesu MPLP, równanie (3.10) dla ustalonej realizacji  $\mathbf{t}$  procesu MGP, może mieć więcej niż jedno rozwiązanie (zob. rysunek 3.2). Dodatkowo, różne rozwiązania tego równania mogą leżeć blisko siebie. Z tego powodu, nie polecamy stosowania tej metody estymacji parametrów procesu MGP.



Rysunek 3.2: Wykresy funkcji  $\hat{h}_M(\beta, \mathbf{t})$  argumentu  $\beta$  dla przykładowych realizacji  $\mathbf{t}$  procesu MGP (a) dla  $n = 25$ , (b) dla  $n = 40$

### 3.1.2 Estymacja parametrów procesu IGP metodą najmniejszych kwadratów

Inną metodą estymacji parametrów procesu IGP, w oparciu o rozkład różnic transformowanych momentów zdarzeń, może być metoda najmniejszych kwadratów. Zastosowana do realizacji  $x_i$  zmiennych losowych  $X_i$ , określonych wzorem (3.1), prowadzi ona do przyjęcia za oszacowania parametrów procesu IGP wartości minimalizujących następującą funkcję celu

$$M(\vartheta; \mathbf{t}) = M((\eta, \kappa); \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \left( \Lambda_\eta(t_i) - \Lambda_\eta(t_{i-1}) - \kappa \right)^2, \quad (3.11)$$

gdzie  $\vartheta = (\eta, \kappa)$  jest nieznanym parametrem procesu IGP,  $\eta$  jest parametrem funkcji trendu,  $\kappa$  jest parametrem kształtu procesu IGP, natomiast  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$  jest realizacją procesu IGP obserwowanego do momentu  $n$ -tego skoku. Jednak, w przypadku rozważanych modeli procesów IGP, podejście to nie prowadzi do właściwej funkcji celu  $M(\vartheta; \mathbf{t})$ , co pokazujemy poniżej.

#### Estymacja parametrów procesu MPLP metodą najmniejszych kwadratów

W przypadku procesu MPLP( $\alpha, \beta, \gamma$ ) funkcja celu (3.11) jest postaci

$$\widetilde{M}((\alpha, \beta, \kappa); \mathbf{t}) = \alpha^2 \sum_{i=1}^n \left( t_i^\beta - t_{i-1}^\beta - \frac{\kappa}{\alpha} \right)^2. \quad (3.12)$$

Funkcja celu (3.12) nie prowadzi do właściwego problemu optymalizacyjnego w tym sensie, że dla różnych wartości  $\alpha$  i  $\kappa$  może przyjąć tę samą wartość i maleje do zera, gdy  $\alpha$  dąży do zera i jednocześnie  $\kappa$  dąży do zera.

Nie poprawia sytuacji, a wręcz bardziej uwidacznia problem, rozważenie minimalizacji  $\widetilde{M}(\alpha, \beta, \gamma; \mathbf{t})$  przy warunku, że średnia arytmetyczna wartości  $x_1, \dots, x_n$  jest równa teoretycznej wartości oczekiwanej zmiennych  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , czyli

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \Lambda_\eta(t_i) - \Lambda_\eta(t_{i-1}) \right) = \frac{\Lambda_\eta(t_n)}{n} = \frac{\alpha t_n^\beta}{n} = \kappa. \quad (3.13)$$

Wówczas, funkcja celu (3.12) przy warunku (3.13) sprowadza się do

$$\widetilde{M}((\alpha, \beta, \alpha t_n^\beta/n); \mathbf{t}) = \alpha^2 \sum_{i=1}^n \left( t_i^\beta - t_{i-1}^\beta - \frac{t_n^\beta}{n} \right)^2$$

i dla dowolnej realizacji  $\mathbf{t}$  i wartości parametru  $\beta$  maleje do zera, gdy  $\alpha$  dąży do zera.

#### Estymacja parametrów procesu MGP metodą najmniejszych kwadratów

W przypadku procesu MGP( $\varrho, \beta, \gamma$ ) funkcja celu (3.11) jest postaci

$$\widehat{M}((\varrho, \beta, \kappa); \mathbf{t}) = \left( \frac{\varrho}{\beta} \right)^2 \sum_{i=1}^n \left[ \exp(\beta t_i) - \exp(\beta t_{i-1}) - \frac{\beta \kappa}{\varrho} \right]^2. \quad (3.14)$$



Analogicznie do przypadku procesu MPLP, funkcja celu (3.14) nie prowadzi do właściwego problemu optymalizacyjnego w tym sensie, że dla różnych wartości  $\varrho$  i  $\kappa$  może przyjąć tę samą wartość i maleje do zera, gdy  $\varrho$  dąży do zera i jednocześnie  $\kappa$  dąży do zera. Funkcja celu (3.14) przy warunku

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\Lambda_{\eta}(t_i) - \Lambda_{\eta}(t_{i-1})) = \frac{\Lambda_{\eta}(t_n)}{n} = \frac{\varrho \exp(\beta t_n)}{\beta n} = \kappa.$$

sprowadza się do

$$\widehat{M}((\alpha, \beta, \varrho \exp(\beta t_n)/(\beta n)); \mathbf{t}) = \left( \frac{\varrho}{\beta} \right)^2 \sum_{i=1}^n \left[ \exp(\beta t_i) - \exp(\beta t_{i-1}) - \frac{\exp(\beta t_n)}{n} \right]^2$$

i również nie prowadzi do właściwego problemu optymalizacyjnego.

## 3.2 Estymacja parametrów procesu IGP w oparciu o rozkłady ilorazów transformowanych momentów zdarzeń

Poniżej przedstawiamy propozycję metody estymacji parametrów procesu IGP, której idea opiera się na twierdzeniu 1.2.5. Z tego twierdzenia wiemy, że dla każdego  $i = 1, \dots, n-1$  zmienna losowa

$$U_i = \frac{\Lambda(T_i)}{\Lambda(T_n)}$$

ma rozkład beta  $\mathcal{B}(i\kappa, (n-1)\kappa)$ . Stąd

$$E_{\vartheta}(U_i) = \frac{i}{n},$$

$$\text{Var}_{\vartheta}(U_i) = \frac{i(n-i)}{n^2(n\kappa+1)}.$$

Zauważmy, że jeżeli funkcja skumulowanej intensywności warunkowej procesu IGP zależy od dwuwymiarowego parametru  $\eta = (\eta_1, \eta_2)$  i jedna ze współrzędnych tego wektora parametrów, powiedzmy  $\eta_1$ , jest czynnikiem skalującym, to zmienne losowe  $U_i$  nie zależą od tego parametru  $\eta_1$  i

$$h(\mathbf{T}, \eta_2) = \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \frac{\Lambda(T_i)}{\Lambda(T_n)} - \frac{i}{n} \right] \frac{1}{i(n-i)} \quad (3.15)$$

jest nieobciążoną funkcją estymującą dla parametru  $\eta_2$ .

**Uwaga 3.2.1.** W przypadku rozważanych w pracy szczególnych przypadków procesów IGP – procesu MPLP i procesu MGP,  $\eta_2 = \beta$ . Jeżeli parametr  $\beta$  byłby znany, to pozostałe parametry procesów ( $\alpha$  i  $\kappa$  w przypadku procesu MPLP oraz  $\varrho$  i  $\kappa$  w przypadku procesu MGP) moglibyśmy estymować na podstawie obserwacji procesu GRP, czy równoważnie – obserwacji  $n$  niezależnych zmiennych losowych z rozkładu gamma. W sekcji 3.4 przedstawiamy propozycje estymatorów parametrów  $\alpha$  i  $\kappa$  w przypadku procesu MPLP oraz  $\varrho$  i  $\kappa$  w przypadku procesu MGP, bazujące na estymatorze parametru  $\beta$  uzyskanym w oparciu o funkcję estymującą określoną wzorem (3.15).

### 3.2.1 Estymator parametru $\beta$ procesu MPLP

W przypadku procesu MPLP, równanie estymujące oparte na funkcji estymującej (3.15) sprowadza się do następującego równania

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left[ \left( \frac{t_i}{t_n} \right)^\beta - \frac{i}{n} \right] \frac{1}{i(n-i)} = 0. \quad (3.16)$$

Estymator parametru  $\beta$ , którego wartość dla każdej realizacji  $\mathbf{t}$  procesu MPLP jest rozwiązaniem równania (3.16) będziemy oznaczać  $\tilde{\beta}^{BD}$ .

Estymacja parametru  $\beta$  procesu MPLP, w oparciu o równanie estymujące (3.16), została zaproponowana w pracy Jokiela-Rokity i Magiery [20].

**Fakt 3.2.1.** *Dla każdej realizacji  $\mathbf{t}$  procesu MPLP, równanie (3.16) ma jedno dodatnie rozwiązanie.*

*Dowód.* Zauważmy, że dla każdego  $i = 1, \dots, n-1$  oraz realizacji  $\mathbf{t}$ ,  $(t_i/t_n)^\beta$  jest malejącą i ciągłą funkcją parametru  $\beta$ . Ponadto,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \left( \frac{t_i}{t_n} \right)^\beta - \frac{i}{n} \right] \frac{1}{i(n-i)} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n-i} < 0$$

i

$$\lim_{\beta \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \left( \frac{t_i}{t_n} \right)^\beta - \frac{i}{n} \right] \frac{1}{i(n-i)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} > 0,$$

co kończy dowód. □

Dysponując oszacowaniem  $\tilde{\beta}^{BD}$  parametru  $\beta$ , za oszacowania parametru  $\kappa$  możemy przyjąć

$$\tilde{\kappa}^{BD} = \tilde{\kappa}(\tilde{\beta}^{BD}, \mathbf{t}),$$

określone wzorem (2.8), gdzie zamiast oszacowania NW  $\tilde{\beta}$  parametru  $\beta$  podstawiamy  $\tilde{\beta}^{BD}$ . Wówczas, za oszacowanie  $\alpha$  możemy przyjąć wartość

$$\tilde{\alpha}^{BD} = n\tilde{\kappa}^{BD} / t_n^{\tilde{\beta}^{BD}}.$$

Jeżeli skorzystamy ze wzoru (3.6), określającego oszacowanie MM parametru  $\kappa$ , gdzie zamiast oszacowania  $\tilde{\beta}_M$  wstawimy oszacowanie  $\tilde{\beta}^{BD}$ , to uzyskamy oszacowanie

$$\tilde{\kappa}_M^{BD} = \tilde{\kappa}_M(\tilde{\beta}^{BD}, \mathbf{t}).$$

Wówczas, za oszacowanie  $\alpha$  możemy przyjąć wartość

$$\tilde{\alpha}_M^{BD} = n\tilde{\kappa}_M^{BD} / t_n^{\tilde{\beta}^{BD}}.$$

**Uwaga 3.2.2.** *Uzyskana wartość estymatora  $\tilde{\beta}^{BD}$  parametru  $\beta$  procesu MPLP może nie znajdować się w przedziale podanym w fakcie 2.1.1. Zatem, dla niektórych realizacji  $\mathbf{t}$  procesu MPLP, wartość  $\tilde{\kappa}^{BD}$  będzie ujemna, czyli  $\tilde{\vartheta}^{BD} = (\tilde{\alpha}^{BD}, \tilde{\beta}^{BD}, \tilde{\kappa}^{BD})$  nie będzie należeć do przestrzeni parametrów procesu MPLP.*

Na podstawie uwagi 3.1.1, mamy, że dla każdej realizacji  $\mathbf{t}$  i wartości  $\tilde{\beta}^{BD}$ , wartość  $\tilde{\kappa}_M^{BD}$  będzie dodatnia. Zatem, dla każdej realizacji  $\mathbf{t}$ , istnieje oszacowanie  $\tilde{\vartheta}_M^{BD} = (\tilde{\alpha}_M^{BD}, \tilde{\beta}^{BD}, \tilde{\kappa}_M^{BD})$ .

W sekcji 3.4 przedstawiamy inne alternatywne estymatory parametrów  $\alpha$  i  $\kappa$  procesu MPLP, bazujące na estymatorze  $\tilde{\beta}^{BD}$ .

### 3.2.2 Estymator parametru $\beta$ procesu MGP

W przypadku procesu MGP, równanie estymujące oparte na funkcji estymującej (3.15) sprowadza się do następującego równania

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left[ \frac{\exp(\beta t_i) - 1}{\exp(\beta t_n) - 1} - \frac{i}{n} \right] \frac{1}{i(n-i)} = 0. \quad (3.17)$$

Estymator parametru  $\beta$ , którego wartość dla każdej realizacji  $\mathbf{t}$  procesu MGP jest rozwiązaniem równania (3.17) będziemy oznaczać  $\hat{\beta}^{BD}$ .

**Fakt 3.2.2.** *Jeżeli dla realizacji  $\mathbf{t}$  procesu MGP*

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{t_i}{t_n} - \frac{i}{n} \right) \frac{1}{i(n-i)} > 0,$$

*to istnieje jedno dodatnie rozwiązanie równania (3.17).*

*Dowód.* Teza wynika z faktu, że funkcja  $[\exp(\beta t_i) - 1]/[\exp(\beta t_n) - 1]$ , dla każdego  $i = 1, \dots, n-1$  oraz realizacji  $\mathbf{t}$  jest malejącą i ciągłą funkcją parametru  $\beta$  oraz

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \frac{\exp(\beta t_i) - 1}{\exp(\beta t_n) - 1} - \frac{i}{n} \right] \frac{1}{i(n-i)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n-i} < 0,$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \frac{\exp(\beta t_i) - 1}{\exp(\beta t_n) - 1} - \frac{i}{n} \right] \frac{1}{i(n-i)} = \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{t_i}{t_n} - \frac{i}{n} \right) \frac{1}{i(n-i)}.$$

□

Dysponując oszacowaniem  $\hat{\beta}^{BD}$  parametru  $\beta$ , za oszacowania parametru  $\kappa$  możemy przyjąć

$$\hat{\kappa}^{BD} = \hat{\kappa}(\hat{\beta}^{BD}, \mathbf{t}),$$

określone wzorem (2.30), gdzie zamiast oszacowania NW  $\hat{\beta}$  parametru  $\beta$  podstawiamy  $\hat{\beta}^{BD}$ . Wówczas, za oszacowanie  $\varrho$  możemy przyjąć wartość

$$\hat{\varrho}^{BD} = \frac{n \hat{\kappa}^{BD} \hat{\beta}^{BD}}{\exp(\hat{\beta}^{BD} t_n) - 1}.$$

Jeżeli skorzystamy ze wzoru (3.9), określającego oszacowanie MM parametru  $\kappa$ , gdzie zamiast oszacowania  $\hat{\beta}_M$  wstawimy oszacowanie  $\hat{\beta}^{BD}$ , to uzyskamy oszacowanie

$$\tilde{\kappa}_M^{BD} = \tilde{\kappa}_M(\hat{\beta}^{BD}, \mathbf{t}).$$

Wówczas, za oszacowanie  $\varrho$  możemy przyjąć wartość

$$\hat{\varrho}_M^{BD} = \frac{n \tilde{\kappa}_M^{BD} \hat{\beta}^{BD}}{\exp(\hat{\beta}^{BD} t_n) - 1}.$$

**Uwaga 3.2.3.** *Jeżeli dla danej realizacji  $\mathbf{t}$  procesu MGP nie istnieje dodatnie rozwiązanie równania (3.17), to nie istnieje zarówno oszacowanie  $\hat{\vartheta}^{BD} = (\hat{\varrho}^{BD}, \hat{\beta}^{BD}, \hat{\kappa}^{BD})$  parametru procesu MPLP jak i  $\hat{\vartheta}_M^{BD} = (\hat{\varrho}_M^{BD}, \hat{\beta}^{BD}, \tilde{\kappa}_M^{BD})$ .*

W sekcji 3.4 przedstawiamy inne alternatywne estymatory parametrów  $\varrho$  i  $\kappa$  procesu MGP, bazujące na estymatorze  $\hat{\beta}^{BD}$ .

### 3.3 Estymacja parametrów procesu IGP w oparciu o rozkłady transformowanych momentów zdarzeń

Na podstawie definicji 1.2.6 procesu IGP mamy, że dla każdego  $i = 1, \dots, n$ , zmienna losowa  $\Lambda(T_i)$  ma rozkład gamma  $\mathcal{G}(i\kappa, 1)$ . Zatem

$$E_{\vartheta}(\Lambda(T_i)) = i\kappa. \quad (3.18)$$

Korzystając ze wzoru (3.18), dla dowolnej pary  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , mamy, że

$$E_{\vartheta}(\Lambda(T_j)) - \frac{j}{i} E_{\vartheta}(\Lambda(T_i)) = 0. \quad (3.19)$$

Podstawiając do wzoru (3.19) za wartości oczekiwane  $E_{\vartheta}(\Lambda(T_i))$  i  $E_{\vartheta}(\Lambda(T_j))$  odpowiednio  $\Lambda(t_i)$  i  $\Lambda(t_j)$  mamy

$$\Lambda(t_j) - \frac{j}{i} \Lambda(t_i) = 0. \quad (3.20)$$

Zauważmy, że równanie (3.20) nie zależy od parametru  $\kappa$  procesu IGP. Ponadto, podobnie do przypadku metody opartej na rozkładzie ilorazu transformowanych czasów zdarzeń, skraca się w tym równaniu czynnik skalujący w funkcji  $\Lambda$  skumulowanej intensywności warunkowej procesu IGP. Zatem, równanie (3.20), w przypadku rozpatrywanych procesów IGP – procesu MPLP i procesu MGP, jest równaniem estymującym dla parametru  $\beta$ . Biorąc pod uwagę, że mamy  $n(n-1)/2$  różnych nieobciążonych równań estymujących postaci (3.20), to mamy  $n(n-1)/2$  różnych rozwiązań tych równań. Otrzymane rozwiązania tych równań będziemy nazywać oszacowaniami cząstkowymi. Dodatkowo, spodziewając się dużej wariancji w zbiorze oszacowań cząstkowych, będziemy odrzucać określony procent najmniejszych i największych wartości oszacowań cząstkowych, a za oszacowanie parametru  $\beta$  przyjmować średnią arytmetyczną z pozostałych, nie odrzuconych wartości.

W rozdziale 4 poruszamy problem wyboru liczby odrzucanych najmniejszych i największych wartości oszacowań cząstkowych i wpływu tej liczby na dokładność uzyskanych oszacowań parametrów procesów MPLP i MGP.

Zauważmy, że równanie (3.19) dla  $j = n$  odpowiada równaniu uzyskanemu przez przyrównanie do zera  $i$ -tego składnika sumy (3.15).

#### 3.3.1 Postać estymatorów parametrów procesu MPLP

W przypadku procesu MPLP( $\alpha, \beta, \kappa$ ), dla każdego  $i \in \{1, \dots, n\}$ , mamy  $\Lambda(t_i) = \alpha t_i^{\beta}$  i równanie (3.20) sprowadza się do następującego równania

$$t_j^{\beta} - \frac{j}{i} t_i^{\beta} = 0. \quad (3.21)$$

Łatwo można pokazać, że dla każdego  $i < j$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , rozwiązaniem równania (3.21) jest

$$\tilde{\beta}_{(ij)}^{GD} = \frac{\log(j/i)}{\log(t_j/t_i)}.$$

**Uwaga 3.3.1.** Dla każdego  $t_i, t_j, i < j, i, j \in \{1, \dots, n\}$ , oszacowanie cząstkowe  $\hat{\beta}_{(ij)}^{GD}$  przyjmuje wartość dodatnią.

Za oszacowanie parametru  $\beta$  procesu MPLP proponujemy przyjąć

$$\tilde{\beta}^{GD} = \frac{1}{m-2x} \sum_{k=x+1}^{m-x-1} \hat{\beta}_{(k)}^{GD}, \quad (3.22)$$

gdzie  $\hat{\beta}_{(k)}^{GD}$  jest  $k$ -tą wartością w ciągu uprządkowanych rosnąco oszacowań cząstkowych  $\hat{\beta}_{(ij)}^{GD}$ , a  $x < m/2$  jest ustaloną wartością odrzucanych najmniejszych i największych oszacowań cząstkowych.

Warto podkreślić, że oszacowanie parametru  $\beta$  procesu MPLP, uzyskane powyżej opisaną metodą, jest określone jawnym wzorem. Stąd, istnieje możliwość oszacowania wszystkich parametrów procesu MPLP bez potrzeby wykorzystania metod numerycznych.

Za oszacowanie parametru  $\kappa$  możemy przyjąć

$$\tilde{\kappa}^{GD} = \tilde{\kappa}(\tilde{\beta}^{GD}, \mathbf{t}), \quad (3.23)$$

określone wzorem (2.8), gdzie zamiast oszacowania NW  $\tilde{\beta}$  parametru  $\beta$  podstawiamy  $\tilde{\beta}^{GD}$ . Wówczas, za oszacowanie  $\alpha$  możemy przyjąć wartość

$$\tilde{\alpha}^{GD} = n\tilde{\kappa}^{GD}/t_n^{\tilde{\beta}^{GD}}. \quad (3.24)$$

Jeżeli skorzystamy ze wzoru (3.6), określającego oszacowanie MM parametru  $\kappa$ , gdzie zamiast oszacowania  $\tilde{\beta}_M$  wstawimy oszacowanie  $\tilde{\beta}^{GD}$ , to uzyskamy oszacowanie

$$\tilde{\kappa}_M^{GD} = \tilde{\kappa}_M(\tilde{\beta}^{GD}, \mathbf{t}). \quad (3.25)$$

Wówczas, za oszacowanie  $\alpha$  możemy przyjąć wartość

$$\tilde{\alpha}_M^{GD} = n\tilde{\kappa}_M^{GD}/t_n^{\tilde{\beta}^{GD}}. \quad (3.26)$$

**Uwaga 3.3.2.** Na podstawie faktu 2.1.1, mamy, że dla niektórych realizacji  $\mathbf{t}$  procesu MPLP obliczona wartość oszacowania  $\tilde{\kappa}^{GD}$  parametru  $\kappa$  może być ujemna.

### 3.3.2 Postać estymatorów parametrów procesu MGP

W przypadku procesu MGP( $\alpha, \beta, \kappa$ ), dla każdego  $i \in \{1, \dots, n\}$ , mamy  $\Lambda(t_i) = \frac{\theta}{\beta}[\exp(\beta t_i) - 1]$  i równanie (3.20) przyjmuje postać

$$\exp(\beta t_j) - 1 - \frac{j}{i}[\exp(\beta t_i) - 1] = 0. \quad (3.27)$$

Łatwo można pokazać, że równanie (3.27) jest równoważne następującemu

$$\frac{\exp(\beta t_i) - 1}{\exp(\beta t_j) - 1} - \frac{i}{j} = 0.$$

Zauważmy, że w przeciwieństwie do procesu MPLP, dla procesu MGP rozpatrywana metoda nie prowadzi do jawnej postaci oszacowania cząstkowego.

**Fakt 3.3.1.** *Jeżeli dla realizacji  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$  procesu MGP*

$$\frac{t_i}{t_j} > \frac{i}{j},$$

*to równanie (3.27) ma jedno rozwiązanie dodatnie.*

*Dowód.* Teza wynika z faktu, że dla realizacji  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$  procesu MGP, funkcja  $[\exp(\beta t_i) - 1]/[\exp(\beta t_j) - 1]$  argumentu  $\beta$ , dla dowolnych  $i, j$  takich, że  $i < j$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , jest malejącą funkcją argumentu  $\beta$  oraz

$$\lim_{\beta \rightarrow 0^+} \frac{\exp(\beta t_i) - 1}{\exp(\beta t_j) - 1} = \frac{t_i}{t_j}$$

i

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\exp(\beta t_i) - 1}{\exp(\beta t_j) - 1} = 0.$$

□

Korzystając z powyższego faktu oraz odwołując się do założenia, że dla procesu MGP parametr  $\beta > 0$ , za oszacowanie cząstkowe  $\hat{\beta}_{(ij)}^{GD}$  przyjmujemy, jeżeli istnieje, dodatnie rozwiązanie równania (3.27), lub w przeciwnym wypadku 0.

Na podstawie  $m = n(n-1)/2$  wartości  $\hat{\beta}_{(ij)}^{GD}$ , wyznaczamy oszacowanie parametru  $\beta$  z następującego wzoru

$$\hat{\beta}^{GD} = \frac{1}{m-2x} \sum_{k=x+1}^{m-x-1} \hat{\beta}_{(k)}^{GD}, \quad (3.28)$$

gdzie  $\hat{\beta}_{(k)}^{GD}$  jest  $k$ -tą wartością w ciągu uprządkowanych rosnąco oszacowań cząstkowych  $\hat{\beta}_{(ij)}^{GD}$ , a  $x < m/2$  jest ustaloną wartością odrzucanych najmniejszych i największych oszacowań cząstkowych.

**Uwaga 3.3.3.** *Przyjmujemy, że oszacowanie  $\hat{\beta}^{GD}$  parametru  $\beta$  procesu MGP nie istnieje, jeżeli  $\hat{\beta}^{GD} = 0$ .*

Dysponując oszacowaniem  $\hat{\beta}^{GD}$  parametru  $\beta$ , za oszacowania parametru  $\kappa$  możemy przyjąć

$$\hat{\kappa}^{GD} = \hat{\kappa}(\hat{\beta}^{GD}, \mathbf{t}), \quad (3.29)$$

określone wzorem (2.30), gdzie zamiast oszacowania NW  $\hat{\beta}$  parametru  $\beta$  podstawiamy  $\hat{\beta}^{GD}$ . Wówczas, za oszacowanie  $\varrho$  możemy przyjąć wartość

$$\hat{\varrho}^{GD} = \frac{n\hat{\kappa}^{GD}\hat{\beta}^{GD}}{\exp(\hat{\beta}^{GD}t_n) - 1}. \quad (3.30)$$

Jeżeli skorzystamy ze wzoru (3.9), określającego oszacowanie MM parametru  $\kappa$ , gdzie zamiast oszacowania  $\hat{\beta}_M$  wstawimy oszacowanie  $\hat{\beta}^{GD}$ , to uzyskamy oszacowanie

$$\tilde{\kappa}_M^{GD} = \tilde{\kappa}_M(\tilde{\beta}^{GD}, \mathbf{t}). \quad (3.31)$$

Wówczas, za oszacowanie  $\varrho$  możemy przyjąć wartość

$$\hat{\varrho}_M^{GD} = \frac{n\tilde{\kappa}_M^{GD}\tilde{\beta}^{GD}}{\exp(\tilde{\beta}^{GD}t_n) - 1}. \quad (3.32)$$

**Uwaga 3.3.4.** Jeżeli dla danej realizacji  $\mathbf{t}$  procesu MGP  $\hat{\beta}_{GD} = 0$ , to nie istnieje zarówno oszacowanie  $\hat{\vartheta}^{GD} = (\hat{\varrho}^{GD}, \hat{\beta}^{GD}, \hat{\kappa}^{GD})$  parametru procesu MPLP jak i  $\hat{\vartheta}_M^{GD} = (\hat{\varrho}_M^{GD}, \hat{\beta}_M^{GD}, \hat{\kappa}_M^{GD})$ .

W sekcji 3.4 przedstawiamy inne alternatywne estymatory parametrów  $\varrho$  i  $\kappa$  procesu MGP, bazujące na estymatorze  $\hat{\beta}_{GD}$ .

### 3.4 Estymacja parametrów procesu IGP w oparciu o estymatory parametrów rozkładu gamma

Jeżeli parametr  $\beta$  procesu MPLP( $\alpha, \beta, \kappa$ ) byłby znany, to oszacowania parametrów  $\alpha$  i  $\kappa$  moglibyśmy wyznaczyć w oparciu o obserwacje  $n$  niezależnych zmiennych losowych  $T_i^\beta - T_{i-1}^\beta$ ,  $i = 1, \dots, n$ , o rozkładzie gamma  $\mathcal{G}(\kappa, 1/\alpha)$ . Analogicznie, w przypadku procesu MGP( $\varrho, \beta, \kappa$ ), jeżeli parametr  $\beta$  byłby znany, to oszacowania parametrów  $\varrho$  i  $\kappa$  moglibyśmy wyznaczyć bazując na  $n$  realizacjach niezależnych zmiennych losowych  $\exp(\beta T_i) - \exp(\beta T_{i-1})$  o rozkładzie gamma  $\mathcal{G}(\kappa, \beta/\varrho)$ . W niniejszej sekcji proponujemy estymatory parametrów procesu MPLP i MGP, bazujące na estymatorach parametrów rozkładu gamma i estymatorach parametru  $\beta$  zaproponowanych w sekcji 3.2 i 3.3. Na początku przedstawimy estymatory parametrów rozkładu gamma, które dalej wykorzystamy w estymacji parametrów rozważanych procesów MPLP i MGP.

Niech  $W_1, \dots, W_n$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie gamma  $\mathcal{G}(\kappa, \delta)$ . Wówczas, oszacowaniem NW parametru  $\kappa$  jest rozwiązanie równania (2.20). W artykule [48] udowodniono następujący fakt.

**Fakt 3.4.1.** Równanie (2.20) nie jest nieobciążonym równaniem estymującym dla parametru  $\kappa$ .

*Dowód.* Mamy pokazać, że

$$E_{(\kappa, \delta)} \left[ \log(\kappa) - \psi(\kappa) - \log \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_i \right) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(W_i) \right] \neq 0.$$

Z własności rozkładu gamma mamy, że  $\sum_{i=1}^n W_i$  ma rozkład  $\mathcal{G}(n\kappa, \delta)$ . Korzystając z tego, że jeżeli  $Y$  jest zmienną losową o rozkładzie gamma  $\mathcal{G}(a, b)$ , to

$$E_{(a, b)}(\log(Y)) = \psi(a) + \log(b)$$

(zob. np. [18]) mamy

$$E_{(\kappa, \delta)} \left[ \log(\kappa) - \psi(\kappa) - \log \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_i \right) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(W_i) \right] = \log(n\kappa) - \psi(n\kappa) \neq 0,$$

co kończy dowód. □

Autorzy artykułu [48] zaproponowali wykorzystanie alternatywnego równania estymującego dla parametru  $\kappa$  postaci

$$\psi(n\kappa) - \psi(\kappa) - \log(n) - \log \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_i \right) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(W_i) = 0. \quad (3.33)$$

Łatwo widać, że (3.33) jest nieobciążonym równaniem estymującym dla parametru  $\kappa$ . Rozwiązanie równania (3.33) będziemy nazywać zmodyfikowanym estymatorem NW parametru  $\kappa$  i oznaczać  $\kappa_Z$ .

Można pokazać następującą relację między estymatorem NW  $\kappa_G$ , którego wartość dla każdej realizacji  $w_1, \dots, w_n$  zmiennych losowych  $W_1, \dots, W_n$ , jest rozwiązaniem równania (2.20) a zmodyfikowanym estymatorem NW  $\kappa_Z$  parametru  $\kappa$  rozkładu gamma, którego wartość dla każdej realizacji  $w_1, \dots, w_n$  zmiennych losowych  $W_1, \dots, W_n$ , jest rozwiązaniem równania (3.33).

**Twierdzenie 3.4.1.** ([48]) *Dla każdego  $\kappa$  i  $\delta$*

$$E_{(\kappa, \delta)}(\kappa_G) > E_{(\kappa, \delta)}(\kappa_Z) > \kappa$$

oraz

$$\text{Var}_{(\kappa, \delta)}(\kappa_G) > \text{Var}_{(\kappa, \delta)}(\kappa_Z).$$

Z twierdzenia 3.4.1 wynika, że estymator  $\kappa_Z$  ma zarówno mniejsze obciążenie jak i mniejszą wariancję od estymatora  $\kappa_G$ . W kolejnych sekcjach wykorzystamy równanie (3.33), w którym zmienne losowe  $W_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , zastąpimy pewnymi funkcjami zmiennych losowych  $T_1, \dots, T_n$ , momentów skoków pocesu MPLP lub MGP, do wyznaczenia oszacowania parametrów tych procesów. W związku z tym, że zmienne losowe  $W_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , występujące w równaniach (2.20), (3.33), zastąpimy zmiennymi losowymi, które będą miały nieznan rozkład, niekoniecznie rozkład gamma, to relacja między estymatorami  $\kappa_Z$  i  $\kappa_G$ , wyznaczonymi w oparciu o te zmodyfikowane równania, opisana w twierdzeniu 3.4.1, może nie zachodzić.

### 3.4.1 Przypadek procesu MPLP

Niech  $\tilde{\beta}^{BD}$  będzie oszacowaniem parametru  $\beta$  opisanym w sekcji 3.2.1, czyli rozwiązaniem równania (3.16). Oznaczmy

$$\tilde{w}_i^{BD} = t_i^{\tilde{\beta}^{BD}} - t_{i-1}^{\tilde{\beta}^{BD}}.$$

Równanie (2.20), w którym  $w_i$  zastąpimy  $\tilde{w}_i^{BD}$  sprowadza się do następującego równania

$$\log(n\kappa) - \psi(\kappa) - \log(t_n^{\tilde{\beta}^{BD}}) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(t_i^{\tilde{\beta}^{BD}} - t_{i-1}^{\tilde{\beta}^{BD}}) = 0. \quad (3.34)$$

Rozwiązanie równania (3.34) możemy przyjąć za oszacowanie parametru  $\kappa$  procesu MPLP i będziemy je oznaczać  $\tilde{\kappa}_G^{BD}$ . Wówczas, za oszacowanie parametru  $\alpha$  procesu MPLP, możemy przyjąć

$$\tilde{\alpha}_G^{BD} = \frac{n\tilde{\kappa}_G^{BD}}{t_n^{\tilde{\beta}^{BD}}}.$$

Jeżeli w równaniu (3.33) zmienne losowe  $W_i$  zastąpimy wartościami  $\tilde{w}_i^{BD}$ , to sprowadza się ono do równania

$$\psi(n\kappa) - \psi(\kappa) - \log(t_n^{\tilde{\beta}^{BD}}) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(t_i^{\tilde{\beta}^{BD}} - t_{i-1}^{\tilde{\beta}^{BD}}) = 0. \quad (3.35)$$



Rozwiązanie równania (3.35) będziemy oznaczać  $\tilde{\kappa}_Z^{BD}$  i również możemy przyjąć za oszacowanie parametru  $\kappa$  procesu MPLP. Wówczas za oszacowanie parametru  $\alpha$  procesu MPLP możemy przyjąć

$$\tilde{\alpha}_Z^{BD} = \frac{n\tilde{\kappa}_Z^{BD}}{\tilde{\beta}^{BD}}.$$

Za oszacowanie parametru  $\beta$  procesu MPLP możemy również przyjąć  $\tilde{\beta}^{GD}$ , określone wzorem (3.22). Postępując analogicznie jak wyżej, zastępując oszacowanie  $\tilde{\beta}^{BD}$  oszacowaniem  $\tilde{\beta}^{GD}$ ,  $\tilde{w}_i^{BD}$  wartościami  $\tilde{w}_i^{GD} = t_i^{\tilde{\beta}^{GD}} - t_{i-1}^{\tilde{\beta}^{GD}}$ , za oszacowanie parametru  $\kappa$  możemy przyjąć  $\tilde{\kappa}_G^{GD}$ , które jest rozwiązaniem równania

$$\log(n\kappa) - \psi(\kappa) - \log(t_n^{\tilde{\beta}^{GD}}) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(t_i^{\tilde{\beta}^{GD}} - t_{i-1}^{\tilde{\beta}^{GD}}) = 0 \quad (3.36)$$

lub  $\tilde{\kappa}_Z^{GD}$ , które jest rozwiązaniem równania

$$\psi(n\kappa) - \psi(\kappa) - \log(t_n^{\tilde{\beta}^{GD}}) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(t_i^{\tilde{\beta}^{GD}} - t_{i-1}^{\tilde{\beta}^{GD}}) = 0. \quad (3.37)$$

Za oszacowania parametru  $\alpha$  możemy przyjąć odpowiednio

$$\tilde{\alpha}_G^{GD} = \frac{n\tilde{\kappa}_G^{GD}}{\tilde{\beta}^{GD}}$$

lub

$$\tilde{\alpha}_Z^{GD} = \frac{n\tilde{\kappa}_Z^{GD}}{\tilde{\beta}^{GD}}.$$

### 3.4.2 Przypadek procesu MGP

W przypadku procesu MGP, postępując analogicznie jak w sekcji wyżej, czyli w równaniach (2.20) i (3.33) podstawiając za  $w_i$

$$\hat{w}_i^{BD} = [\exp(\hat{\beta}^{BD}t_i) - \exp(\hat{\beta}^{BD}t_{i-1})]/\hat{\beta}^{BD}$$

lub

$$\hat{w}_i^{GD} = [\exp(\hat{\beta}^{GD}t_i) - \exp(\hat{\beta}^{GD}t_{i-1})]/\hat{\beta}^{GD},$$

gdzie  $\hat{\beta}^{BD}$  jest dodatnim rozwiązaniem równania (3.17) (jeżeli istnieje),  $\hat{\beta}^{GD}$  określone jest wzorem (3.28), otrzymujemy odpowiednio równania

$$\begin{aligned} \log(n\kappa) - \psi(\kappa) - \log(\exp(\hat{\beta}^{BD}t_n) - 1) \\ + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(\exp(\hat{\beta}^{BD}t_i) - \exp(\hat{\beta}^{BD}t_{i-1})) = 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

i

$$\begin{aligned} \psi(n\kappa) - \psi(\kappa) - \log(\exp(\hat{\beta}^{BD}t_n) - 1) \\ + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(\exp(\hat{\beta}^{BD}t_i) - \exp(\hat{\beta}^{BD}t_{i-1})) = 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

lub

$$\begin{aligned} \log(n\kappa) - \psi(\kappa) - \log(\exp(\hat{\beta}^{GD}t_n) - 1) \\ + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(\exp(\hat{\beta}^{GD}t_i) - \exp(\hat{\beta}^{GD}t_{i-1})) = 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

i

$$\begin{aligned} \psi(n\kappa) - \psi(\kappa) - \log(\exp(\hat{\beta}^{GD}t_n) - 1) \\ + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(\exp(\hat{\beta}^{GD}t_i) - \exp(\hat{\beta}^{GD}t_{i-1})) = 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Rozwiązania równań (3.38), (3.39), (3.40) i (3.41) będziemy oznaczać odpowiednio  $\hat{\kappa}_G^{BD}$ ,  $\hat{\kappa}_Z^{BD}$ ,  $\hat{\kappa}_G^{GD}$  i  $\hat{\kappa}_Z^{GD}$  oraz przyjmować za oszacowania parametru  $\kappa$  procesu MGP. Odpowiadające im oszacowania parametru  $\varrho$  otrzymujemy po podstawieniu za  $\hat{\beta}$  i  $\hat{\kappa}$  w wyrażeniu

$$\frac{n\hat{\beta}\hat{\kappa}}{\exp(\hat{\beta}t_n) - 1}$$

odpowiedniej wartości oszacowania parametru  $\beta$  i  $\kappa$ . W ten sposób otrzymujemy cztery różne oszacowania parametru  $\vartheta = (\varrho, \beta, \kappa)$  procesu MGP, mianowicie  $\hat{\vartheta}_G^{BD} = (\hat{\varrho}_G^{BD}, \hat{\beta}^{BD}, \hat{\kappa}_G^{BD})$ ,  $\hat{\vartheta}_Z^{BD} = (\hat{\varrho}_Z^{BD}, \hat{\beta}^{BD}, \hat{\kappa}_Z^{BD})$ ,  $\hat{\vartheta}_G^{GD} = (\hat{\varrho}_G^{GD}, \hat{\beta}^{GD}, \hat{\kappa}_G^{GD})$  oraz  $\hat{\vartheta}_Z^{GD} = (\hat{\varrho}_Z^{GD}, \hat{\beta}^{GD}, \hat{\kappa}_Z^{GD})$ .

# Rozdział 4

## Wyniki symulacji

W tym rozdziale przedstawiamy wnioski z przeprowadzonych symulacji komputerowych. Symulacje te miały trzy następujące cele:

1. Porównanie dokładności estymatorów parametrów procesu MPLP i MGP, opisanych w rozdziałach 2 i 3. Za kryteria porównawcze przyjęliśmy oszacowanie

$$\widehat{\text{bias}}(\hat{\theta}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\theta - \hat{\theta})$$

obciążenia  $E_{\theta}(\theta - \hat{\theta})$  oraz oszacowanie

$$\widehat{\text{RMSE}}(\hat{\theta}) = \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{\theta} - \theta)^2 \right]^{1/2}$$

pierwiastka średniego błędu kwadratowego  $[E_{\theta}(\hat{\theta} - \theta)^2]^{1/2}$ , gdzie  $\theta$  jest prawdziwą wartością parametru,  $\hat{\theta}$  – jej estymatorem. Dodatkowo zilustrowaliśmy na wykresach pudełkowych rozrzut przyjmowanych przez estymatory wartości.

2. Analizę istnienia dodatnich wartości rozważanych w pracy estymatorów parametru  $\beta$  procesu MGP. W twierdzeniu 2.2.1 oraz faktach 3.2.2, 3.3.1 podaliśmy warunki konieczne na istnienie dodatniego rozwiązania odpowiedniego równania, jednakże nie jesteśmy w stanie analitycznie wyznaczyć z jakim prawdopodobieństwem warunki te są spełnione.
3. Porównanie dokładności predykcji momentu kolejnego,  $(n + 1)$ -wszego, zdarzenia, wyznaczonych w zależności od przyjętych oszacowań parametrów procesu. Korzystając z definicji 1.2.6 procesu IGP wiemy, że

$$E(\Lambda(T_{n+1}) - \Lambda(T_n)) = \kappa.$$

Zatem predykcję momentu  $T_{n+1}$ ,  $(n+1)$ -wszego zdarzenia wyznaczaliśmy w oparciu o wzór

$$\hat{t}_{n+1} = \hat{\Lambda}^{-1}(\hat{\kappa} + \hat{\Lambda}(t_n)), \quad (4.1)$$

gdzie  $\hat{\Lambda}()$  i  $\hat{\kappa}$  to oszacowania odpowiednio funkcji  $\Lambda()$  skumulowanej intensywności warunkowej i parametru  $\kappa$  procesu IGP. Za kryteria porównawcze predyktorów przyjęliśmy oszacowanie

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_{n+1} - \hat{t}_{n+1})$$

wartości oczekiwanej  $E_{\theta}(T_{n+1} - \hat{T}_{n+1})$  oraz oszacowanie

$$\left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{t}_{n+1} - t_{n+1})^2 \right]^{1/2}$$

pierwiastka średniego błędu kwadratowego predykcji  $[E_{\theta}(\hat{T}_{n+1} - T_{n+1})^2]^{1/2}$ , gdzie  $\theta$  jest prawdziwą wartością parametru rozpatrywanego procesu,  $T_{n+1}$  – prognozowanym momentem  $n + 1$ -wszego skoku procesu, a  $\hat{T}_{n+1}$  jego predyktorem.

Jako referencyjną metodę estymacji przyjęliśmy w symulacjach metodę NW. Estymatory NW określone są wzorami przedstawionymi w faktach 2.1.1 i 2.2.1, w przypadku procesu odpowiednio MPLP i MGP.

Przyjęliśmy, że pozostałe alternatywne do NW metody estymacji określamy przez wybrany (alternatywny do NW) estymator parametru  $\beta$ . W pracy zaproponowaliśmy dwa estymatory, opisane w sekcjach 3.2 i 3.3, do których będziemy się odpowiednio odwoływać jako do estymatorów BD i GD. Estymator BD parametru  $\beta$ , wyznaczony w oparciu o rozkłady ilorazów momentów zdarzeń, w przypadku procesu MPLP określony jest wzorem (3.16), a w przypadku procesu MGP – wzorem (3.17). Estymator GD parametru  $\beta$ , bazujący na rozkładach zmiennych losowych  $\Lambda(T_i)$ , w przypadku procesu MPLP określony jest wzorem (3.22), a w przypadku procesu MGP – wzorem (3.28). Dla każdego alternatywnego estymatora parametru  $\beta$  (BD i GD), obliczyliśmy odpowiadające mu wartości zaproponowanych w pracy estymatorów parametru  $\kappa$ , które wynikają z równania wiarygodności, czy zmodyfikowanej metody największej wiarygodności estymacji parametru kształtu rozkładu gamma lub zastosowania metody momentów. Oszacowanie parametru  $\alpha$  procesu MPLP wyznaczaliśmy ze wzoru  $n\hat{\kappa}/t_n^{\hat{\beta}}$ , gdzie za  $\hat{\kappa}$  i  $\hat{\beta}$  podstawialiśmy wartość odpowiedniego estymatora parametru, odpowiednio  $\kappa$  i  $\beta$ . Oszacowanie parametru  $\varrho$  procesu MGP wyznaczaliśmy ze wzoru  $n\hat{\kappa}\hat{\beta}/[\exp(\hat{\beta}t_n) - 1]$ , gdzie za  $\hat{\kappa}$  i  $\hat{\beta}$  podstawialiśmy wartość odpowiedniego estymatora parametru, odpowiednio  $\kappa$  i  $\beta$ .

Przedstawiając wyniki w tabelach i na wykresach przyjęliśmy oznaczenia estymatorów zgodne z oznaczeniami wprowadzonymi w poprzednich rozdziałach, tj. indeks górny określa alternatywną do NW metodę estymacji parametru  $\beta$ , a indeks dolny określa metodę estymacji parametru  $\kappa$  i  $\alpha$  (w przypadku procesu MPLP) oraz  $\varrho$  (w przypadku procesu MGP). Brak jednego lub dwóch indeksów wskazuje, że wartości zostały wyznaczone w oparciu o równania wiarygodności. I tak np., gdy zastosowaliśmy metodę BD estymacji parametru  $\beta$  i zmodyfikowaną metodę NW estymacji parametru  $\kappa$ , dla danej realizacji  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$  procesu MPLP otrzymaliśmy wartość

estymatora  $\tilde{\beta}^{BD}$  parametru  $\beta$ , wartość estymatora  $\tilde{\kappa}_Z^{BD}$  parametru  $\kappa$  oraz wartość estymatora  $\tilde{\alpha}_Z^{BD}$  parametru  $\alpha$ , równą  $n\tilde{\kappa}_Z^{BD}/t_n^{\tilde{\beta}^{BD}}$ .

W wierszach tabeli 4.1 zamieściliśmy wszystkie zestawy estymatorów (9 dla każdego z rozpatrywanych procesów) uwzględnione w symulacjach, przy czym lewa część tabeli odpowiada procesowi MPLP, a prawa – procesowi MGP.

Tabela 4.1: Estymatory parametrów procesu MPLP i MGP rozpatrzone w symulacjach

	$\alpha$	$\beta$	$\kappa$			$\varrho$	$\beta$	$\kappa$	
	$\tilde{\alpha}$	$\tilde{\beta}$	$\tilde{\kappa}$	NW		$\hat{\varrho}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\kappa}$	
MPLP	$\tilde{\alpha}^{BD}$		$\tilde{\kappa}^{BD}$	BD		$\hat{\varrho}^{BD}$		$\hat{\kappa}^{BD}$	MGP
	$\tilde{\alpha}_M^{BD}$	$\tilde{\beta}^{BD}$	$\tilde{\kappa}_M^{BD}$		$\hat{\varrho}_M^{BD}$	$\hat{\beta}^{BD}$	$\hat{\kappa}_M^{BD}$		
	$\tilde{\alpha}_G^{BD}$		$\tilde{\kappa}_G^{BD}$		$\hat{\varrho}_G^{BD}$		$\hat{\kappa}_G^{BD}$		
	$\tilde{\alpha}_Z^{BD}$		$\tilde{\kappa}_Z^{BD}$		$\hat{\varrho}_Z^{BD}$		$\hat{\kappa}_Z^{BD}$		
$\tilde{\alpha}^{GD}$			$\tilde{\kappa}^{GD}$	GD			$\hat{\varrho}^{GD}$		$\hat{\kappa}^{GD}$
$\tilde{\alpha}_M^{GD}$	$\tilde{\beta}^{GD}$	$\tilde{\kappa}_M^{GD}$	$\hat{\varrho}_M^{GD}$		$\hat{\beta}^{GD}$	$\hat{\kappa}_M^{GD}$			
$\tilde{\alpha}_G^{GD}$		$\tilde{\kappa}_G^{GD}$	$\hat{\varrho}_G^{GD}$			$\hat{\kappa}_G^{GD}$			
$\tilde{\alpha}_Z^{GD}$		$\tilde{\kappa}_Z^{GD}$	$\hat{\varrho}_Z^{GD}$			$\hat{\kappa}_Z^{GD}$			

Symulacje przeprowadziliśmy w środowisku statystycznym R. W szczególności, do obliczeń numerycznych, wykorzystaliśmy funkcję *nleqslv* zaimplementowaną w pakiecie *nleqslv*. Algorytm generowania rozważanych procesów IGP wyznaczyliśmy na podstawie definicji 1.2.6. Mianowicie, moment  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $i$ -tego skoku procesu IGP generowaliśmy następująco

$$t_i = \Lambda^{-1}(g_i + \Lambda(t_{i-1})),$$

gdzie  $g_i$  jest losową wartością z rozkładu gamma  $\mathcal{G}(\kappa, 1)$ , natomiast  $\Lambda$  jest skumulowaną funkcją trendu procesu IGP.

## 4.1 Porównanie estymatorów parametrów procesu MPLP

Symulacje przeprowadziliśmy dla czternastu wybranych zestawów parametrów procesu MGP przedstawionych poniżej

$$(\alpha, \beta, \kappa) \in \{(0.6, 0.75, 0.75), (0.6, 0.75, 1), (0.6, 0.75, 2), (1.2, 1.05, 0.75), (1.2, 1.05, 1), (1.2, 1.05, 2), (1.2, 1.5, 0.75), (1.8, 1.5, 0.75), (1.8, 1.5, 1), (1.8, 1.5, 2), (4, 1.5, 0.75), (4, 2, 0.75), (4, 2, 1), (4, 2, 2)\}.$$

Dla każdego zestawu parametrów generowaliśmy 2000 realizacji procesu o liczbie skoków  $n \in \{15, 25, 40, 50, 65, 75\}$ . Wartości oszacowań pierwiastków średnich błędów kwadratowych i obciążeń rozpatrywanych estymatorów, dla procesów o liczbie skoków  $n = 15$  i  $n = 40$ , prezentujemy w tabelach 4.2 i 4.3. Rezultaty dotyczące

procesów o liczbie skoków  $n \in \{15, 25, 40, 50, 65, 75\}$  wykorzystaliśmy do pokazania dynamiki zmienności oszacowań obciążeń i pierwiastków z błędów średniokwadratowych, w zależności od liczby skoków procesu (rysunki 4.1 i 4.2). Wyniki uzyskane dla  $n \in \{15, 40, 65\}$  posłużyły do zaprezentowania rozrzutu wartości estymatorów na wykresach pudełkowych (rysunek 4.3).

Tabela 4.2: Oszacowania obciążeń (podane w nawiasie) i pierwiastków średnich błędów kwadratowych estymatorów parametrów  $\alpha$  i  $\kappa$  procesu MPLP, gdy parametr  $\beta$  został oszacowany przy użyciu estymatora  $\tilde{\beta}^{BD}$ . Pogrubieniem zaznaczono najmniejszą wartość RMSE, w grupie estymatorów rozpatrywanego parametru, dla danego zestawu parametrów i liczby  $n$  skoków procesu

$n$	$\alpha$	$\beta$	$\kappa$	$\tilde{\alpha}_M^{BD}$	$\tilde{\alpha}_G^{BD}$	$\tilde{\alpha}_Z^{BD}$	$\tilde{\kappa}_M^{BD}$	$\tilde{\kappa}_G^{BD}$	$\tilde{\kappa}_Z^{BD}$						
15	0.6	0.75	0.75	(-0.704)	1.569	(-0.441)	1.149	(-0.386)	<b>1.075</b>	(-0.417)	0.675	(-0.194)	0.419	(-0.145)	<b>0.377</b>
40				(-0.307)	0.826	(-0.207)	0.688	(-0.191)	<b>0.672</b>	(-0.156)	0.305	(-0.063)	0.180	(-0.048)	<b>0.171</b>
15	0.6	0.75	1	(-0.645)	1.410	(-0.453)	1.138	(-0.395)	<b>1.060</b>	(-0.522)	0.886	(-0.296)	0.639	(-0.225)	<b>0.576</b>
40				(-0.268)	0.757	(-0.194)	0.657	(-0.178)	<b>0.641</b>	(-0.183)	0.386	(-0.086)	0.249	(-0.065)	<b>0.238</b>
15	0.6	0.75	2	(-0.509)	1.151	(-0.413)	1.026	(-0.352)	<b>0.949</b>	(-0.852)	1.498	(-0.609)	1.268	(-0.453)	<b>1.133</b>
40				(-0.222)	0.586	(-0.183)	0.535	(-0.166)	<b>0.519</b>	(-0.285)	0.671	(-0.184)	0.527	(-0.136)	<b>0.500</b>
15	1.2	1.05	0.75	(-1.133)	2.391	(-0.690)	1.801	(-0.591)	<b>1.679</b>	(-0.414)	0.665	(-0.200)	0.442	(-0.150)	<b>0.399</b>
40				(-0.486)	1.298	(-0.311)	1.062	(-0.283)	<b>1.035</b>	(-0.154)	0.302	(-0.063)	0.183	(-0.048)	<b>0.175</b>
15	1.2	1.05	1	(-0.992)	2.190	(-0.633)	1.688	(-0.532)	<b>1.568</b>	(-0.516)	0.869	(-0.284)	0.628	(-0.214)	<b>0.567</b>
40				(-0.411)	1.235	(-0.268)	1.026	(-0.239)	<b>1.000</b>	(-0.192)	0.382	(-0.088)	0.251	(-0.067)	<b>0.239</b>
15	1.2	1.05	2	(-0.856)	1.941	(-0.675)	1.721	(-0.564)	<b>1.588</b>	(-0.859)	1.522	(-0.609)	1.285	(-0.454)	<b>1.150</b>
40				(-0.293)	0.933	(-0.228)	0.856	(-0.197)	<b>0.831</b>	(-0.273)	0.652	(-0.178)	0.531	(-0.130)	<b>0.505</b>
15	1.2	1.5	0.75	(-1.191)	2.592	(-0.729)	1.967	(-0.627)	<b>1.834</b>	(-0.421)	0.706	(-0.200)	0.478	(-0.150)	<b>0.434</b>
40				(-0.491)	1.324	(-0.300)	1.056	(-0.272)	<b>1.030</b>	(-0.150)	0.302	(-0.056)	0.177	(-0.040)	<b>0.169</b>
15	1.8	1.5	0.75	(-1.436)	2.953	(-0.816)	2.157	(-0.680)	<b>2.004</b>	(-0.407)	0.658	(-0.191)	0.418	(-0.142)	<b>0.377</b>
40				(-0.673)	1.782	(-0.419)	1.432	(-0.377)	<b>1.395</b>	(-0.142)	0.300	(-0.054)	0.175	(-0.039)	<b>0.168</b>
15	1.8	1.5	1	(-1.346)	2.878	(-0.878)	2.256	(-0.731)	<b>2.089</b>	(-0.492)	0.832	(-0.274)	0.583	(-0.204)	<b>0.523</b>
40				(-0.547)	1.545	(-0.352)	1.305	(-0.309)	<b>1.270</b>	(-0.181)	0.384	(-0.084)	0.243	(-0.063)	<b>0.231</b>
15	1.8	1.5	2	(-1.155)	2.541	(-0.892)	2.215	(-0.732)	<b>2.037</b>	(-0.868)	1.576	(-0.631)	1.337	(-0.474)	<b>1.199</b>
40				(-0.455)	1.363	(-0.344)	1.234	(-0.297)	<b>1.196</b>	(-0.301)	0.693	(-0.193)	0.549	(-0.145)	<b>0.522</b>
15	4	1.5	0.75	(-2.738)	5.260	(-1.410)	3.603	(-1.128)	<b>3.326</b>	(-0.410)	0.671	(-0.184)	0.423	(-0.136)	<b>0.382</b>
40				(-1.084)	2.941	(-0.564)	2.318	(-0.478)	<b>2.255</b>	(-0.149)	0.297	(-0.058)	0.176	(-0.043)	<b>0.168</b>
15	4	2	0.75	(-2.956)	5.436	(-1.590)	3.944	(-1.297)	<b>3.642</b>	(-0.432)	0.682	(-0.197)	0.438	(-0.148)	<b>0.396</b>
40				(-1.058)	2.911	(-0.514)	2.259	(-0.429)	<b>2.199</b>	(-0.149)	0.304	(-0.056)	0.180	(-0.041)	<b>0.172</b>
15	4	2	1	(-2.598)	5.126	(-1.558)	3.947	(-1.254)	<b>3.634</b>	(-0.524)	0.877	(-0.284)	0.627	(-0.214)	<b>0.566</b>
40				(-1.116)	2.957	(-0.667)	2.393	(-0.575)	<b>2.323</b>	(-0.190)	0.382	(-0.091)	0.260	(-0.069)	<b>0.248</b>
15	4	2	2	(-2.106)	4.561	(-1.569)	3.966	(-1.237)	<b>3.630</b>	(-0.871)	1.596	(-0.625)	1.363	(-0.469)	<b>1.225</b>
40				(-0.815)	2.367	(-0.613)	2.096	(-0.512)	<b>2.025</b>	(-0.277)	0.648	(-0.187)	0.507	(-0.139)	<b>0.480</b>

Wartości przedstawione w tabelach 4.2 i 4.3 pokazują, że niezależnie od wybranej alternatywnej metody estymacji parametru  $\beta$ , najmniejszą wartość oszacowania RMSE oraz najmniejszą wartość oszacowania obciążenia z estymatorów parametru  $\kappa$  mają estymatory  $\tilde{\kappa}_Z^{BD}$  i  $\tilde{\kappa}_Z^{GD}$ , wyznaczone w oparciu o równania odpowiednio (3.35) i (3.37). W przypadku zastosowaniu estymatorów  $\tilde{\beta}^{BD}$  i  $\tilde{\beta}^{GD}$  do wyznaczenia wartości odpowiednio  $\tilde{\kappa}^{BD}$  i  $\tilde{\kappa}^{GD}$ , dla średnio ponad 30% realizacji procesu uzyskane wartości były ujemne (wyników nie pokazaliśmy w tabelach). Warto zauważyć, że wśród oszacowań parametru  $\alpha$ , bazujących na alternatywnych do NW estymatorach parametru

Tabela 4.3: Oszacowania obciążeń (podane w nawiasie) i pierwiastków średnich błędów kwadratowych estymatorów parametrów  $\alpha$  i  $\kappa$  procesu MPLP, gdy parametr  $\beta$  został oszacowany przy użyciu estymatora  $\tilde{\beta}^{GD}$ . Pogrubieniem zaznaczono najmniejszą wartość  $\widehat{\text{RMSE}}$ , w grupie estymatorów rozpatrywanego parametru, dla danego zestawu parametrów i liczby  $n$  skoków procesu

$n$	$\alpha$	$\beta$	$\kappa$	$\tilde{\alpha}_M^{GD}$	$\tilde{\alpha}_G^{GD}$	$\tilde{\alpha}_Z^{GD}$	$\tilde{\kappa}_M^{GD}$	$\tilde{\kappa}_G^{GD}$	$\tilde{\kappa}_Z^{GD}$						
15	0.6	0.75	0.75	(-0.615)	1.502	(-0.385)	1.129	(-0.333)	<b>1.056</b>	(-0.403)	0.673	(-0.196)	0.422	(-0.147)	<b>0.380</b>
40				(-0.298)	0.821	(-0.198)	0.671	(-0.183)	<b>0.655</b>	(-0.155)	0.306	(-0.064)	0.180	(-0.049)	<b>0.172</b>
15	0.6	0.75	1	(-0.576)	1.307	(-0.404)	1.079	(-0.349)	<b>1.005</b>	(-0.509)	0.886	(-0.299)	0.642	(-0.228)	<b>0.578</b>
40				(-0.260)	0.745	(-0.190)	0.656	(-0.175)	<b>0.640</b>	(-0.182)	0.386	(-0.087)	0.250	(-0.066)	<b>0.239</b>
15	0.6	0.75	2	(-0.471)	1.116	(-0.378)	0.993	(-0.320)	<b>0.919</b>	(-0.845)	1.501	(-0.617)	1.274	(-0.461)	<b>1.139</b>
40				(-0.208)	0.577	(-0.171)	0.528	(-0.154)	<b>0.512</b>	(-0.285)	0.676	(-0.187)	0.530	(-0.139)	<b>0.503</b>
15	1.2	1.05	0.75	(-1.068)	2.361	(-0.644)	1.785	(-0.547)	<b>1.665</b>	(-0.409)	0.674	(-0.202)	0.446	(-0.152)	<b>0.403</b>
40				(-0.444)	1.254	(-0.273)	1.018	(-0.245)	<b>0.992</b>	(-0.152)	0.302	(-0.063)	0.183	(-0.048)	<b>0.175</b>
15	1.2	1.05	1	(-0.895)	2.104	(-0.564)	1.636	(-0.467)	<b>1.520</b>	(-0.505)	0.871	(-0.287)	0.632	(-0.217)	<b>0.570</b>
40				(-0.381)	1.149	(-0.248)	0.972	(-0.220)	<b>0.947</b>	(-0.189)	0.380	(-0.090)	0.252	(-0.068)	<b>0.240</b>
15	1.2	1.05	2	(-0.783)	1.864	(-0.611)	1.634	(-0.503)	<b>1.508</b>	(-0.850)	1.523	(-0.617)	1.289	(-0.461)	<b>1.154</b>
40				(-0.290)	0.930	(-0.224)	0.846	(-0.193)	<b>0.821</b>	(-0.275)	0.655	(-0.181)	0.532	(-0.133)	<b>0.506</b>
15	1.2	1.5	0.75	(-1.116)	2.493	(-0.675)	1.904	(-0.576)	<b>1.776</b>	(-0.414)	0.703	(-0.202)	0.480	(-0.152)	<b>0.435</b>
40				(-0.467)	1.284	(-0.286)	1.035	(-0.258)	<b>1.009</b>	(-0.147)	0.301	(-0.057)	0.177	(-0.042)	<b>0.169</b>
15	1.8	1.5	0.75	(-1.329)	2.876	(-0.756)	2.132	(-0.622)	<b>1.983</b>	(-0.397)	0.661	(-0.193)	0.422	(-0.144)	<b>0.380</b>
40				(-0.647)	1.739	(-0.396)	1.387	(-0.355)	<b>1.351</b>	(-0.142)	0.301	(-0.055)	0.176	(-0.040)	<b>0.168</b>
15	1.8	1.5	1	(-1.248)	2.798	(-0.807)	2.210	(-0.665)	<b>2.048</b>	(-0.484)	0.834	(-0.276)	0.587	(-0.206)	<b>0.527</b>
40				(-0.514)	1.529	(-0.328)	1.284	(-0.286)	<b>1.249</b>	(-0.178)	0.385	(-0.085)	0.244	(-0.064)	<b>0.232</b>
15	1.8	1.5	2	(-1.065)	2.438	(-0.825)	2.135	(-0.668)	<b>1.963</b>	(-0.862)	1.578	(-0.640)	1.342	(-0.483)	<b>1.203</b>
40				(-0.447)	1.337	(-0.337)	1.203	(-0.290)	<b>1.166</b>	(-0.305)	0.697	(-0.195)	0.550	(-0.147)	<b>0.523</b>
15	4	1.5	0.75	(-2.600)	5.214	(-1.342)	3.576	(-1.063)	<b>3.304</b>	(-0.402)	0.676	(-0.187)	0.425	(-0.138)	<b>0.384</b>
40				(-1.043)	2.917	(-0.521)	2.269	(-0.436)	<b>2.209</b>	(-0.148)	0.297	(-0.059)	0.177	(-0.043)	<b>0.169</b>
15	4	2	0.75	(-2.896)	5.424	(-1.565)	3.921	(-1.274)	<b>3.621</b>	(-0.425)	0.685	(-0.200)	0.439	(-0.151)	<b>0.396</b>
40				(-1.043)	2.874	(-0.519)	2.239	(-0.434)	<b>2.179</b>	(-0.148)	0.304	(-0.057)	0.180	(-0.042)	<b>0.172</b>
15	4	2	1	(-2.493)	5.194	(-1.493)	3.963	(-1.192)	<b>3.653</b>	(-0.516)	0.890	(-0.287)	0.633	(-0.217)	<b>0.571</b>
40				(-1.041)	2.907	(-0.610)	2.359	(-0.519)	<b>2.291</b>	(-0.187)	0.383	(-0.092)	0.260	(-0.070)	<b>0.248</b>
15	4	2	2	(-1.983)	4.532	(-1.489)	3.959	(-1.162)	<b>3.628</b>	(-0.857)	1.599	(-0.632)	1.366	(-0.475)	<b>1.227</b>
40				(-0.775)	2.338	(-0.584)	2.075	(-0.484)	<b>2.006</b>	(-0.277)	0.650	(-0.189)	0.509	(-0.141)	<b>0.482</b>

$\beta$ , najmniejszą wartość  $\widehat{\text{RMSE}}$  otrzymaliśmy dla estymatorów  $\tilde{\alpha}_Z^{BD}$  i  $\tilde{\alpha}_Z^{GD}$ . W związku z tym, w dalszej analizie uwzględnimy wyłącznie estymatory podane w tabeli 4.4.

Tabela 4.4: Estymatory wybrane do porównania dokładności oszacowań parametrów procesu MPLP, względem estymatorów NW

	$\alpha$	$\beta$	$\kappa$
NW	$\tilde{\alpha}$	$\tilde{\beta}$	$\tilde{\kappa}$
BD	$\tilde{\alpha}_Z^{BD}$	$\tilde{\beta}^{BD}$	$\tilde{\kappa}_Z^{BD}$
GD	$\tilde{\alpha}_Z^{GD}$	$\tilde{\beta}^{GD}$	$\tilde{\kappa}_Z^{GD}$

W tabelach 4.5 i 4.6 przedstawiliśmy wartości oszacowań obciążeń i pierwiastków średnich błędów kwadratowych estymatorów parametrów procesu MPLP, wyszczególnionych w tabeli 4.4. Po przeanalizowaniu wyników symulacji komputerowych, nie możemy wskazać metody estymacji parametru  $\beta$  procesu MPLP, która jest najlepsza, przy przyjętych kryteriach, w każdym rozpatrywanym przypadku. Dla dłuższych procesów ( $n = 40$ ) dokładniejsze oszacowania parametru  $\beta$  (według  $\widehat{\text{RMSE}}$ ) otrzymujemy stosując estymator NW. Natomiast dla krótszych procesów ( $n = 15$ ), z mniejszą wartością parametru  $\kappa$ , dokładniejsze oszacowania parametru  $\beta$  uzyskujemy stosując estymatory alternatywne do NW. Jednak redukcja  $\widehat{\text{RMSE}}$  dla alternatywnych do NW metod estymacji parametru  $\beta$  jedynie w dwóch przypadkach przekroczyła 5%. Wraz ze wzrostem wartości  $n$  maleje  $\widehat{\text{RMSE}}$  dla wszystkich rozpatrywanych estymatorów. Zależność tę przedstawiono dla dwóch wybranych zestawów parametrów na rysunkach 4.1 i 4.2. Rozpatrując drugie kryterium jakości, estymatory  $\tilde{\beta}^{BD}$  i  $\tilde{\beta}^{GD}$  cechują się oszacowaniem obciążenia bliższym zeru niż estymator  $\tilde{\beta}$ . Wraz ze wzrostem  $n$  oszacowanie obciążenia każdego z rozpatrywanych estymatorów zbliża się do zera, jednak zawsze dla estymatora NW jest stosunkowo większe niż dla estymatorów alternatywnych. Można zauważyć, że w przypadku estymacji parametru  $\beta$  występują wyłącznie ujemne oszacowania obciążeń, czyli wartości estymatorów, dla każdej z rozpatrywanych metod i zestawów parametrów, są przeciętnie większe od wartości teoretycznej. Przykładowe wykresy pudełkowe wartości oszacowań parametru  $\beta$ , uzyskanych przy użyciu estymatorów NW  $\tilde{\beta}$  i estymatorów alternatywnych do NW  $\tilde{\beta}^{BD}$  i  $\tilde{\beta}^{GD}$ , dla dwóch wybranych zestawów parametrów przedstawiliśmy na rysunku 4.3.

Na podstawie wyników symulacji możemy stwierdzić, że do estymacji parametru  $\kappa$  powinniśmy wybrać jedną z metod alternatywnych – BD lub GD. Na rysunkach 4.1 i 4.2 nie jest zauważalna różnica w oszacowaniach RMSE i obciążenia pomiędzy metodą BD i GD, niezależnie od liczby skoków procesu. Dla  $n$  równego 15 redukcja  $\widehat{\text{RMSE}}$  estymatorów BD i GD w stosunku do estymatora NW wynosi powyżej 9.9%. Analogicznie do przypadku estymacji parametru  $\beta$ , oszacowania obciążeń przyjmują w każdym rozpatrywanym przypadku wartość ujemną. Dodatkowo, oszacowania obciążenia estymatora  $\tilde{\kappa}$  osiągają największe wartości, bez względu na liczbę skoków procesu. Różnice w wartościach kryteriów  $\widehat{\text{RMSE}}$  i  $\widehat{\text{bias}}$  obliczonych dla estymatora NW i estymatorów alternatywnych maleją wraz ze wzrostem wartości  $n$ .

W zdecydowanej większości przypadków estymator NW zapewnia dokładniejsze oszacowania parametru  $\alpha$  pod względem  $\widehat{\text{RMSE}}$  niż estymatory alternatywne. Po-



Tabela 4.5: Oszacowania obciążeń (podane w nawiasie) i pierwiastków średnich błędów kwadratowych estymatorów parametrów procesu MPLP dla wybranych zestawów parametrów  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\kappa$  oraz liczby  $n$  skoków procesu. Pod wartością  $\widehat{\text{RMSE}}$  podano, pochyloną czcionką, procentową zmianę względem odpowiedniego estymatora NW. Pogrubieniem zaznaczono najmniejszą wartość  $\widehat{\text{RMSE}}$  w grupie estymatorów rozpatrywanego parametru dla danego zestawu parametrów i liczby skoków procesu

$n$	$\alpha$	$\beta$	$\kappa$	$\tilde{\alpha}$	$\tilde{\alpha}_Z^{BD}$	$\tilde{\alpha}_Z^{GD}$	$\tilde{\beta}$	$\tilde{\beta}^{BD}$	$\tilde{\beta}^{GD}$	$\tilde{\kappa}$	$\tilde{\kappa}_Z^{BD}$	$\tilde{\kappa}_Z^{GD}$
15	0.6	0.75	0.75	<b>(-0.210) 0.961</b>	(-0.386) 1.075	(-0.333) 1.056	(-0.143) 0.338	<b>(-0.069) 0.324</b>	(-0.087) 0.326	(-0.194) 0.421	<b>(-0.145) 0.377</b>	(-0.147) 0.380
					11.8%	9.9%		-4.1%	-3.5%		-10.5%	-9.9%
40				<b>(-0.082) 0.555</b>	(-0.191) 0.672	(-0.183) 0.655	<b>(-0.050) 0.160</b>	(-0.023) 0.165	(-0.023) 0.162	(-0.065) 0.181	<b>(-0.048) 0.171</b>	(-0.049) 0.172
					21.2%	18.2%		3.2%	0.9%		-5.3%	-5.0%
15	0.6	0.75	1	<b>(-0.252) 0.937</b>	(-0.395) 1.060	(-0.349) 1.005	(-0.102) 0.269	(-0.050) 0.275	<b>(-0.061) 0.264</b>	(-0.301) 0.647	<b>(-0.225) 0.576</b>	(-0.228) 0.578
					13.1%	7.2%		2.6%	-1.8%		-11.0%	-10.7%
40				<b>(-0.091) 0.544</b>	(-0.178) 0.641	(-0.175) 0.640	<b>(-0.040) 0.138</b>	(-0.018) 0.141	(-0.020) 0.145	(-0.089) 0.252	<b>(-0.065) 0.238</b>	(-0.066) 0.239
					17.8%	17.6%		2.5%	5.4%		-5.6%	-5.2%
15	0.6	0.75	2	<b>(-0.283) 0.892</b>	(-0.352) 0.949	(-0.320) 0.919	<b>(-0.047) 0.166</b>	(-0.020) 0.168	(-0.025) 0.167	(-0.629) 1.288	<b>(-0.453) 1.133</b>	(-0.461) 1.139
					6.4%	3.0%		1.3%	0.5%		-12.0%	-11.5%
40				<b>(-0.117) 0.462</b>	(-0.166) 0.519	(-0.154) 0.512	<b>(-0.013) 0.087</b>	(-0.001) 0.093	(-0.004) 0.092	(-0.192) 0.533	<b>(-0.136) 0.500</b>	(-0.139) 0.503
					12.3%	10.8%		6.3%	5.7%		-6.1%	-5.5%
15	1.2	1.05	0.75	<b>(-0.380) 1.578</b>	(-0.591) 1.679	(-0.547) 1.665	(-0.203) 0.513	(-0.102) 0.502	<b>(-0.119) 0.484</b>	(-0.200) 0.446	<b>(-0.150) 0.399</b>	(-0.152) 0.403
					6.4%	5.5%		-2.0%	-5.6%		-10.6%	-9.7%
40				<b>(-0.116) 0.876</b>	(-0.283) 1.035	(-0.245) 0.992	<b>(-0.071) 0.225</b>	(-0.031) 0.229	(-0.039) 0.230	(-0.065) 0.184	<b>(-0.048) 0.175</b>	(-0.048) 0.175
					18.1%	13.2%		1.8%	2.3%		-5.0%	-4.9%
15	1.2	1.05	1	<b>(-0.359) 1.467</b>	(-0.532) 1.568	(-0.467) 1.520	(-0.152) 0.384	(-0.079) 0.376	<b>(-0.095) 0.372</b>	(-0.288) 0.634	<b>(-0.214) 0.567</b>	(-0.217) 0.570
					6.8%	3.6%		-2.0%	-3.0%		-10.6%	-10.1%
40				<b>(-0.106) 0.854</b>	(-0.239) 1.001	(-0.220) 0.947	<b>(-0.061) 0.196</b>	(-0.032) 0.205	(-0.032) 0.196	(-0.091) 0.253	<b>(-0.067) 0.239</b>	(-0.068) 0.240
					17.0%	10.9%		4.5%	0.4%		-5.4%	-5.3%
15	1.2	1.05	2	<b>(-0.481) 1.528</b>	(-0.564) 1.588	(-0.503) 1.508	<b>(-0.067) 0.231</b>	(-0.029) 0.234	(-0.042) 0.239	(-0.632) 1.304	<b>(-0.454) 1.150</b>	(-0.461) 1.154
					3.9%	-1.3%		1.0%	3.1%		-11.8%	-11.5%
40				<b>(-0.133) 0.755</b>	(-0.197) 0.831	(-0.193) 0.821	<b>(-0.029) 0.129</b>	(-0.016) 0.138	(-0.015) 0.134	(-0.186) 0.535	<b>(-0.130) 0.505</b>	(-0.133) 0.506
					10.0%	8.7%		7.1%	4.0%		-5.6%	-5.5%
15	1.2	1.5	0.75	<b>(-0.408) 1.694</b>	(-0.627) 1.834	(-0.576) 1.776	(-0.271) 0.671	<b>(-0.128) 0.644</b>	(-0.150) 0.649	(-0.200) 0.481	<b>(-0.150) 0.434</b>	(-0.152) 0.435
					8.2%	4.8%		-4.1%	-3.3%		-9.9%	-9.6%
40				<b>(-0.110) 0.874</b>	(-0.272) 1.030	(-0.258) 1.009	<b>(-0.098) 0.324</b>	(-0.044) 0.337	(-0.046) 0.336	(-0.057) 0.178	<b>(-0.040) 0.169</b>	(-0.042) 0.169

Tabela 4.6: Wyniki analogiczne w tabeli 4.5, dla innych zestawów parametrów  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\kappa$ 

$n$	$\alpha$	$\beta$	$\kappa$	$\tilde{\alpha}$	$\tilde{\alpha}_{BD}^Z$	$\tilde{\alpha}_{GD}^Z$	$\tilde{\beta}$	$\tilde{\beta}_{BD}$	$\tilde{\beta}_{GD}$	$\tilde{\kappa}$	$\tilde{\kappa}_{BD}^Z$	$\tilde{\kappa}_{GD}^Z$
15	1.8	1.5	0.75	(-0.460) <b>1.935</b>	(-0.680) 2.004	(-0.622) 1.983	(-0.270) 0.650	(-0.127) <b>0.614</b>	(-0.159) 0.638	(-0.192) 0.421	(-0.142) <b>0.377</b>	(-0.144) 0.380
					3.6%	2.5%		-5.5%	-1.9%		-10.5%	-9.8%
40				(-0.172) <b>1.203</b>	(-0.377) 1.395	(-0.355) 1.351	(-0.090) <b>0.315</b>	(-0.033) 0.326	(-0.038) 0.326	(-0.056) 0.176	(-0.039) <b>0.168</b>	(-0.040) 0.168
					16.0%	12.3%		3.6%	3.6%		-5.0%	-4.8%
15	1.8	1.5	1	(-0.538) <b>2.009</b>	(-0.731) 2.089	(-0.665) 2.048	(-0.212) 0.563	(-0.102) <b>0.551</b>	(-0.127) 0.557	(-0.277) 0.588	(-0.204) <b>0.523</b>	(-0.206) 0.527
					4.0%	2.0%		-2.3%	-1.2%		-11.0%	-10.3%
40				(-0.144) <b>1.127</b>	(-0.309) 1.270	(-0.286) 1.249	(-0.080) <b>0.274</b>	(-0.034) 0.280	(-0.042) 0.285	(-0.087) 0.245	(-0.063) <b>0.231</b>	(-0.064) 0.232
					12.7%	10.8%		2.0%	4.0%		-5.7%	-5.2%
15	1.8	1.5	2	(-0.655) 2.016	(-0.732) 2.037	(-0.668) <b>1.963</b>	(-0.097) <b>0.330</b>	(-0.045) 0.340	(-0.056) 0.332	(-0.653) 1.360	(-0.474) <b>1.199</b>	(-0.483) 1.203
					1.0%	-2.6%		3.2%	0.8%		-11.8%	-11.5%
40				(-0.225) <b>1.095</b>	(-0.297) 1.196	(-0.290) 1.166	(-0.036) <b>0.179</b>	(-0.018) 0.194	(-0.018) 0.187	(-0.201) 0.555	(-0.145) <b>0.522</b>	(-0.147) 0.523
					9.2%	6.5%		7.9%	4.4%		-5.9%	-5.6%
15	4	1.5	0.75	(-0.978) 3.364	(-1.128) 3.326	(-1.063) <b>3.304</b>	(-0.272) 0.664	(-0.136) 0.683	(-0.156) <b>0.648</b>	(-0.185) 0.424	(-0.136) <b>0.382</b>	(-0.138) 0.384
					-1.1%	-1.8%		2.9%	-2.4%		-10.0%	-9.4%
40				(-0.206) <b>2.050</b>	(-0.478) 2.255	(-0.436) 2.209	(-0.110) <b>0.327</b>	(-0.053) 0.334	(-0.058) 0.334	(-0.060) 0.177	(-0.043) <b>0.168</b>	(-0.043) 0.169
					10.0%	7.7%		2.1%	2.1%		-5.1%	-4.9%
15	4	2	0.75	(-1.178) 3.729	(-1.297) 3.642	(-1.274) <b>3.621</b>	(-0.339) 0.874	(-0.161) 0.873	(-0.175) <b>0.867</b>	(-0.197) 0.440	(-0.148) <b>0.396</b>	(-0.151) 0.396
					-2.3%	-2.9%		-0.1%	-0.8%		-10.0%	-9.9%
40				(-0.198) <b>2.035</b>	(-0.429) 2.199	(-0.434) 2.179	(-0.139) <b>0.434</b>	(-0.070) 0.447	(-0.068) 0.440	(-0.058) 0.180	(-0.041) <b>0.172</b>	(-0.042) 0.172
					8.1%	7.1%		2.9%	1.3%		-4.7%	-4.6%
15	4	2	1	(-1.128) 3.728	(-1.254) <b>3.634</b>	(-1.192) 3.653	(-0.282) 0.718	(-0.128) <b>0.693</b>	(-0.167) 0.705	(-0.287) 0.634	(-0.214) <b>0.566</b>	(-0.217) 0.571
					-2.5%	-2.0%		-3.5%	-1.8%		-10.8%	-10.0%
40				(-0.335) <b>2.137</b>	(-0.575) 2.323	(-0.519) 2.291	(-0.100) <b>0.359</b>	(-0.040) 0.376	(-0.050) 0.372	(-0.094) 0.261	(-0.069) <b>0.248</b>	(-0.070) 0.248
					8.7%	7.2%		4.9%	3.6%		-5.2%	-5.1%
15	4	2	2	(-1.250) 3.769	(-1.237) 3.630	(-1.162) <b>3.628</b>	(-0.133) <b>0.437</b>	(-0.061) 0.444	(-0.084) 0.451	(-0.646) 1.381	(-0.469) <b>1.225</b>	(-0.475) 1.227
					-3.7%	-3.7%		1.5%	3.0%		-11.3%	-11.1%
40				(-0.398) <b>1.906</b>	(-0.512) 2.025	(-0.484) 2.006	(-0.047) <b>0.236</b>	(-0.017) 0.248	(-0.023) 0.250	(-0.194) 0.512	(-0.139) <b>0.480</b>	(-0.141) 0.482
					6.2%	5.3%		5.0%	5.8%		-6.1%	-5.8%

nadto, jest to jedyny parametr, którego oszacowanie obciążenia estymatora NW jest bliższe zeru niż pozostałych rozważanych estymatorów (rysunki 4.1 i 4.2). Wraz ze wzrostem wartości parametrów procesu MPLP, procentowa zmiana  $\widehat{\text{RMSE}}$  estymatora alternatywnego danego parametru względem odpowiedniego estymatora NW najczęściej maleje. W szczególności, dla największych rozpatrywanych wartości parametru  $\alpha$ , metody alternatywne są nieznacznie lepsze pod względem  $\widehat{\text{RMSE}}$  dla  $n = 15$ .

Pod względem analizowanych kryteriów dokładności oszacowania, metoda GD estymacji nieznanymi parametrów nie uzyskała najlepszych rezultatów dla żadnego z parametrów procesu MPLP. Jednak warto pamiętać, że jest to jedyna metoda, dla której estymatory  $\tilde{\alpha}_M^{GD}$ ,  $\tilde{\beta}^{GD}$ ,  $\tilde{\kappa}_M^{GD}$  mają jawną postać.

Przeprowadziliśmy również symulacje komputerowe, których celem było porównanie dokładności predykcji kolejnego  $(n + 1)$ -wszego momentu skoku procesu MPLP. Wartości  $\tilde{t}_{n+1}$  predyktorów momentów  $n + 1$ -wszego skoku procesu, obserwowanego do momentu  $n$ -tego skoku, wyznaczaliśmy ze wzoru (4.1), który w przypadku procesu MPLP przyjmuje postać

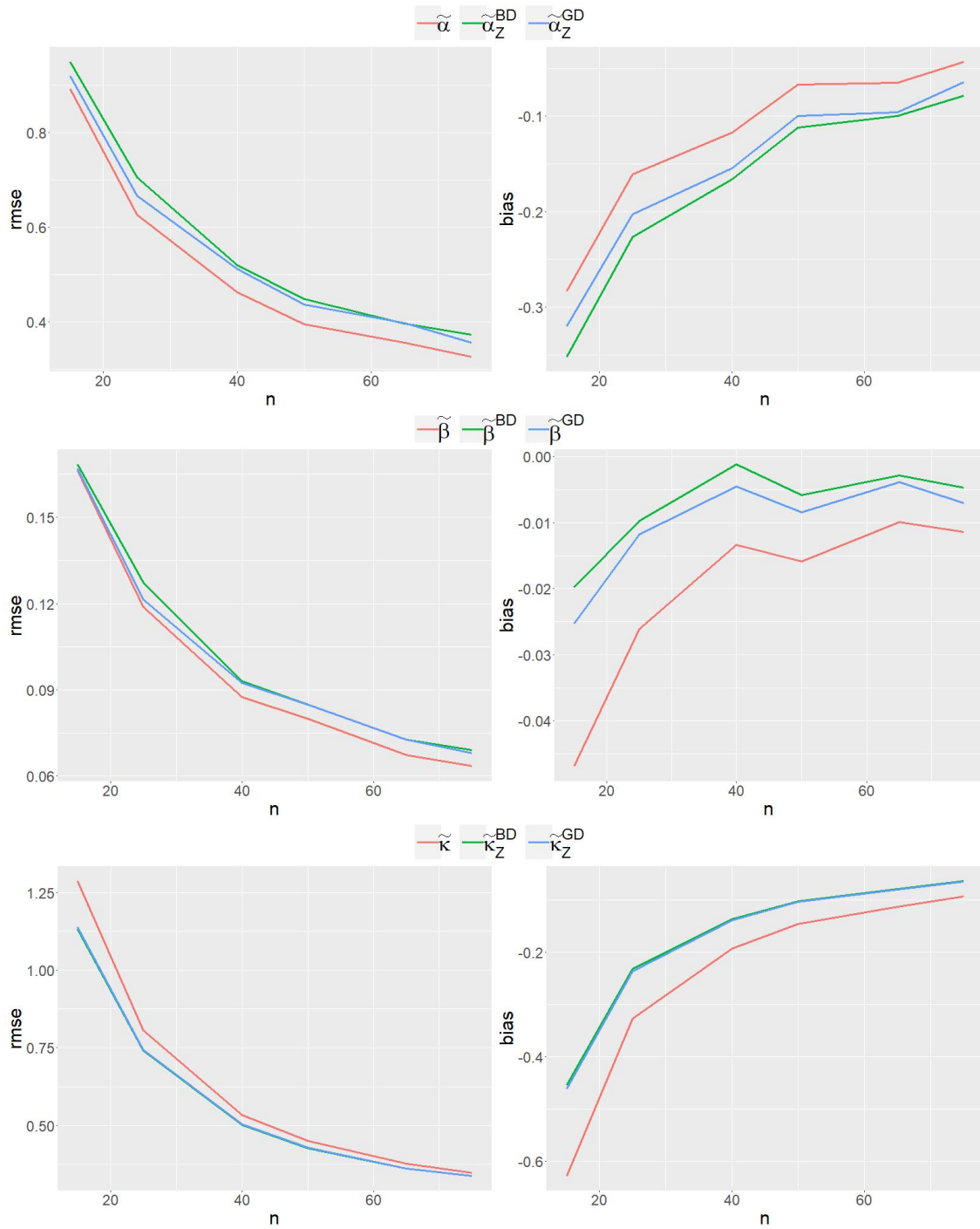
$$\tilde{t}_{n+1} = \left( \frac{\tilde{\kappa}^*}{\tilde{\alpha}^*} + t_n^{\tilde{\beta}^*} \right)^{1/\tilde{\beta}^*}.$$

gdzie  $\tilde{\alpha}^*$ ,  $\tilde{\beta}^*$  i  $\tilde{\kappa}^*$  są dowolnymi estymatorami parametrów procesu MPLP, odpowiednio  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\kappa$ . Zauważmy, że podstawiając do powyższego wzoru postać estymatora  $\tilde{\alpha}^* = n\tilde{\kappa}^*/t_n^{\tilde{\beta}^*}$ , , otrzymamy wyrażenie

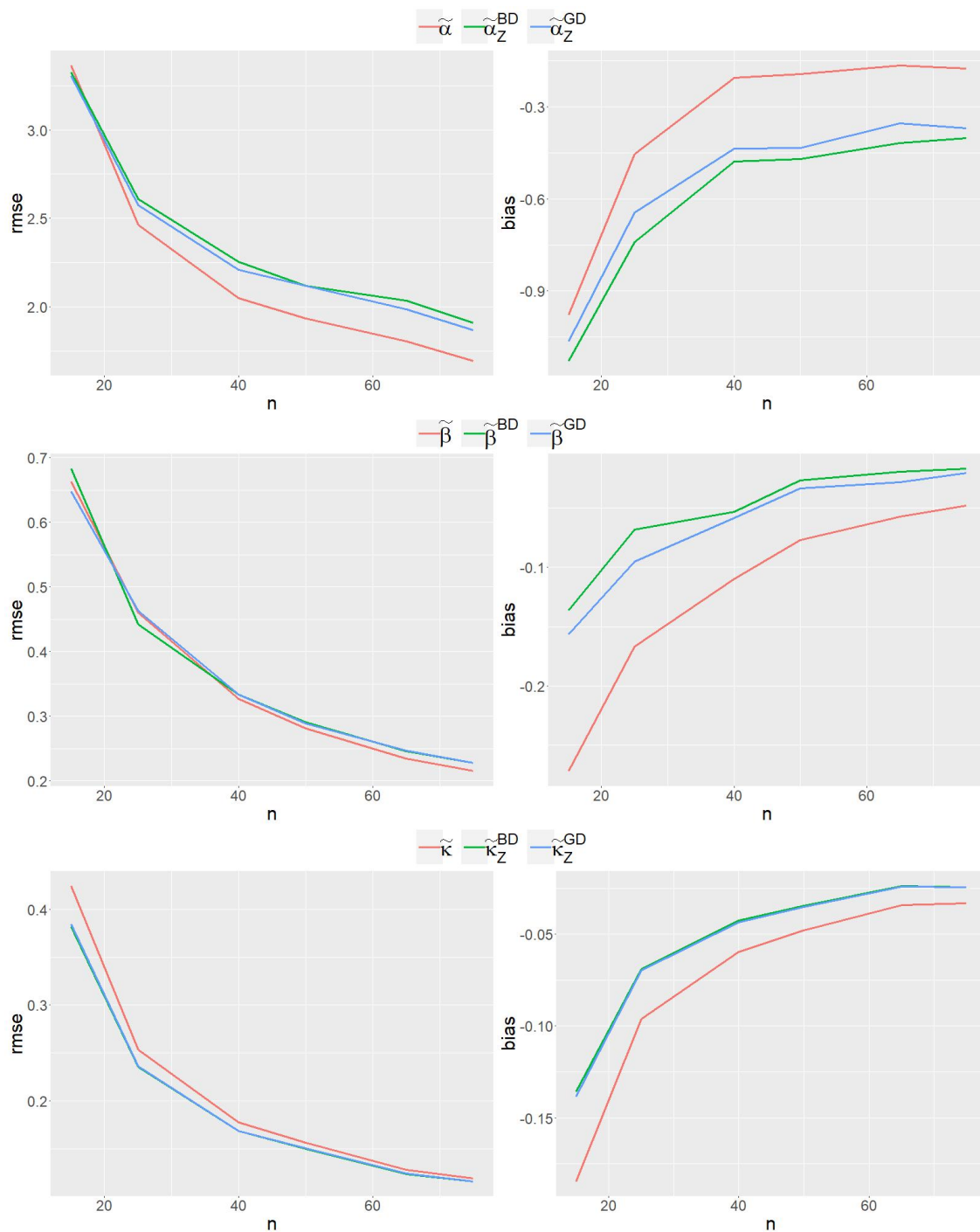
$$\tilde{t}_{n+1} = t_n \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{1/\tilde{\beta}^*}, \quad (4.2)$$

którego wartość zależy wyłącznie od momentu  $n$ -tego zdarzenia i wartości estymatora parametru  $\beta$ . Zatem im większa jest wartość oszacowania parametru  $\beta$ , tym mniejsza jest wartość predyktora, przy ustalonej wartości  $t_n$ .

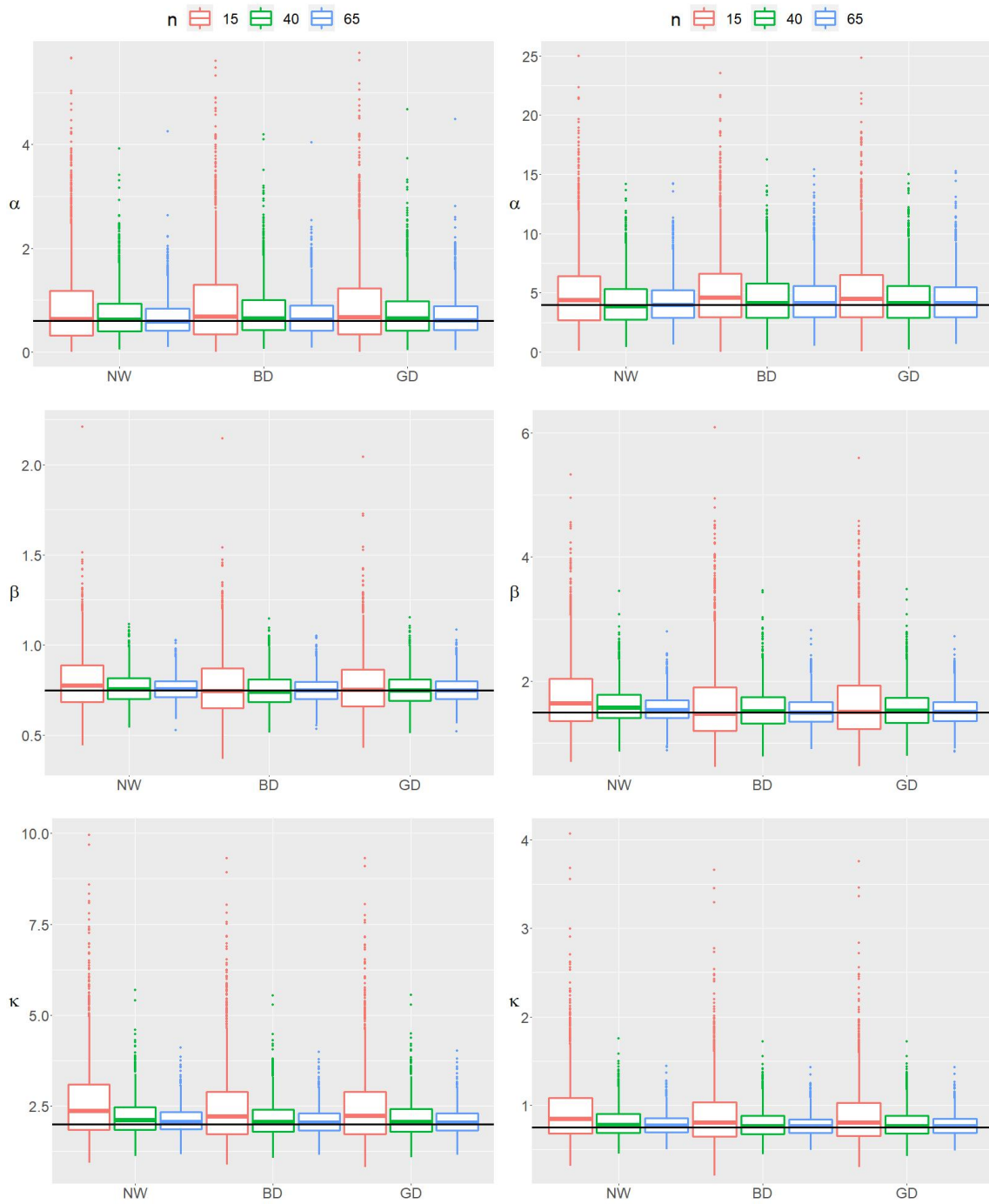
W tabeli 4.7 przedstawiliśmy oszacowania obciążeń i pierwiastków średnich kwadratów błędów predykcji momentu kolejnego zdarzenia dla procesu MPLP, obliczone w zależności od przyjętych estymatorów parametrów procesu oraz liczby skoków procesu. Najdokładniejsze wartości predyktorów, względem przyjętych kryteriów, uzyskaliśmy przy zastosowaniu metody NW. Wartości predyktorów otrzymane na podstawie wartości estymatorów uzyskanych tą metodą charakteryzują się zazwyczaj niewielkim niedoszacowaniem. Wartości predyktorów otrzymane na podstawie wartości estymatorów alternatywnych do NW są bardzo zbliżone, szczególnie pod względem  $\widehat{\text{RMSE}}$ , do wyników dla metody NW. Predykcje czasu kolejnego zdarzenia, otrzymane na podstawie metod BD i GD, w odróżnieniu od metody NW, w zdecydowanej większości mają ujemne wartości oszacowań obciążeń.



Rysunek 4.1: Zmiana  $\widehat{RMSE}$  i  $\widehat{bias}$  względem  $n$  dla procesu MPLP(0.6, 0.75, 2)



Rysunek 4.2: Zmiana  $\widehat{RMSE}$  i  $\widehat{bias}$  względem  $n$  dla procesu MPLP(4, 1.5, 0.75)



(a) MPLP(0.6, 0.75, 2)

(b) MPLP(4, 1.5, 0.75)

Rysunek 4.3: Wartości estymatorów parametrów procesu MPLP przedstawione w postaci wykresów pudełkowych. Odpowiednio od góry zaprezentowano wyniki dla parametru  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\kappa$  oraz przyjęto oznaczenia zgodne z tabelą 4.4

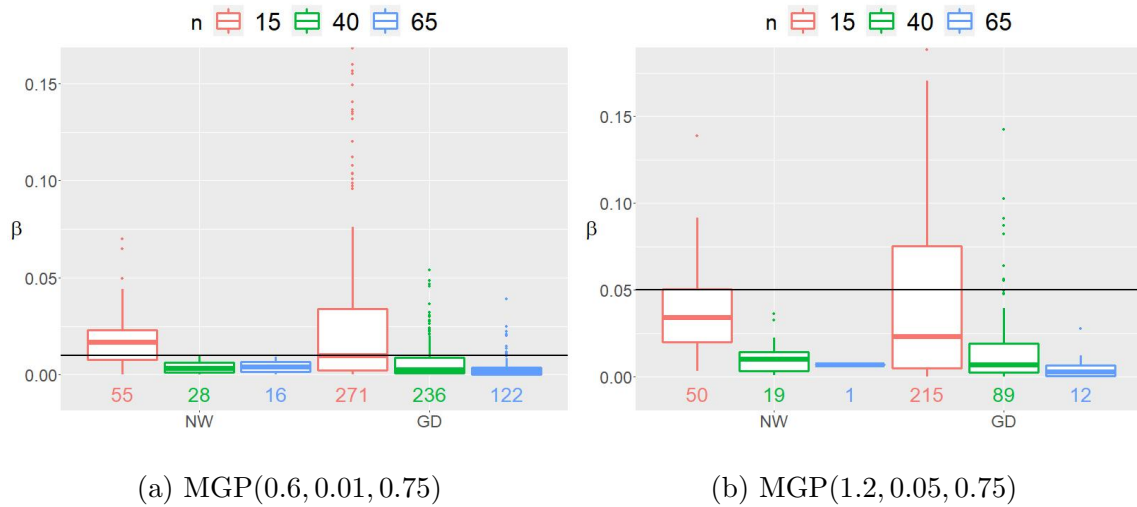
Tabela 4.7: Oszacowania obciążeń (podane w nawiasie) i pierwiastków średnich błędów kwadratowych predykcji momentu kolejnego zdarzenia przy zastosowaniu wybranych metod estymacji parametrów procesu MPLP. Pogrubieniem zaznaczono najmniejszą wartość  $\widehat{\text{RMSE}}$  dla danego zestawu parametrów i liczby skoków procesu

$n$	$\alpha$	$\beta$	$\kappa$	$\bar{t}_{n+1}$	NW	BD	GD
15	0.6	0.75	0.75	55.4	(0.290) <b>5.741</b>	(-0.236) 5.881 [2.4%]	(-0.088) 5.851 [1.9%]
40				192.4	(0.037) <b>7.387</b>	(-0.229) 7.430 [0.6%]	(-0.219) 7.428 [0.6%]
15	0.6	0.75	1	81.4	(-0.016) <b>7.032</b>	(-0.591) 7.239 [2.9%]	(-0.445) 7.166 [1.9%]
40				281.4	(0.394) <b>9.464</b>	(0.086) 9.480 [0.2%]	(0.117) 9.496 [0.3%]
15	0.6	0.75	2	201.6	(0.212) <b>12.772</b>	(-0.514) 12.990 [1.7%]	(-0.338) 12.878 [0.8%]
40				701.7	(0.870) <b>16.835</b>	(0.437) 16.844 [0.0%]	(0.554) 16.885 [0.3%]
15	1.2	1.05	0.75	8.9	(0.055) <b>0.674</b>	(-0.003) 0.691 [2.6%]	(0.007) 0.681 [1.1%]
40				21.8	(-0.001) <b>0.605</b>	(-0.024) 0.608 [0.6%]	(-0.020) 0.608 [0.6%]
15	1.2	1.05	1	11.8	(0.047) <b>0.739</b>	(-0.009) 0.755 [2.1%]	(0.005) 0.748 [1.2%]
40				29	(0.031) <b>0.698</b>	(0.009) 0.702 [0.6%]	(0.011) 0.700 [0.2%]
15	1.2	1.05	2	22.8	(0.046) <b>1.039</b>	(-0.013) 1.050 [1.0%]	(0.006) 1.048 [0.9%]
40				55.8	(0.027) <b>0.965</b>	(0.006) 0.965 [0.0%]	(0.006) 0.970 [0.5%]
15	1.2	1.5	0.75	4.6	(0.011) <b>0.233</b>	(-0.010) 0.237 [1.9%]	(-0.006) 0.237 [1.6%]
40				8.7	(0.003) <b>0.167</b>	(-0.003) 0.168 [0.3%]	(-0.003) 0.168 [0.6%]
15	1.8	1.5	0.75	3.5	(0.012) <b>0.182</b>	(-0.004) 0.185 [1.4%]	(-0.001) 0.185 [1.5%]
40				6.6	(0.003) <b>0.128</b>	(-0.002) 0.130 [0.9%]	(-0.001) 0.129 [0.2%]
15	1.8	1.5	1	4.3	(0.009) <b>0.192</b>	(-0.006) 0.196 [1.9%]	(-0.002) 0.195 [1.3%]
40				8	(0.000) <b>0.133</b>	(-0.004) 0.133 [0.3%]	(-0.004) 0.133 [0.4%]
15	1.8	1.5	2	6.8	(0.007) <b>0.209</b>	(-0.005) 0.212 [1.3%]	(-0.002) 0.211 [0.9%]
40				12.7	(0.000) <b>0.151</b>	(-0.003) 0.152 [0.4%]	(-0.003) 0.152 [0.3%]
15	4	1.5	0.75	2.1	(0.005) <b>0.102</b>	(-0.005) 0.104 [2.0%]	(-0.003) 0.104 [2.2%]
40				3.9	(0.001) <b>0.075</b>	(-0.002) 0.075 [0.6%]	(-0.002) 0.075 [0.3%]
15	4	2	0.75	1.7	(0.001) <b>0.065</b>	(-0.005) 0.066 [1.9%]	(-0.004) 0.066 [2.0%]
40				2.8	(0.003) <b>0.042</b>	(0.002) 0.042 [0.1%]	(0.002) 0.042 [0.3%]
15	4	2	1	2	(0.004) <b>0.066</b>	(-0.001) 0.066 [0.5%]	(0.000) 0.066 [1.0%]
40				3.2	(0.002) <b>0.041</b>	(0.000) 0.041 [0.4%]	(0.000) 0.041 [0.3%]
15	4	2	2	2.8	(0.000) <b>0.065</b>	(-0.003) 0.065 [1.0%]	(-0.002) 0.065 [0.9%]
40				4.5	(0.001) <b>0.039</b>	(0.000) 0.039 [0.2%]	(0.000) 0.039 [0.1%]

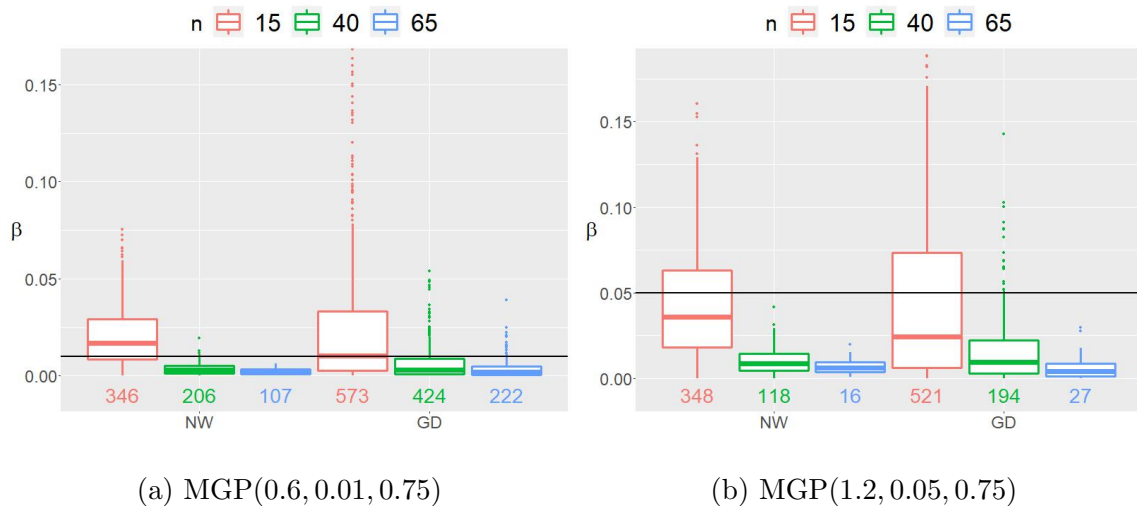
## 4.2 Porównanie estymatorów parametrów procesu MGP

Symulacje przeprowadziliśmy dla czternastu wybranych zestawów parametrów procesu MGP przedstawionych poniżej

$$\begin{aligned}
 (\varrho, \beta, \kappa) \in \{ & (0.6, 0.01, 0.75), (0.6, 0.01, 1), (0.6, 0.01, 2), (1.2, 0.05, 0.75), (1.2, 0.05, 1), \\
 & (1.2, 0.05, 2), (1.2, 0.1, 0.75), (1.8, 0.1, 0.75), (1.8, 0.1, 1), (1.8, 0.1, 2), \\
 & (4, 0.1, 0.75), (4, 0.2, 0.75), (4, 0.2, 1), (4, 0.2, 2) \}.
 \end{aligned}$$



Rysunek 4.4: Wartości estymatorów parametru  $\beta$  obliczone metodami NW i GD na zbiorze realizacji, dla których drugi rozpatrywany estymator nie istnieje. Wyniki dla dwóch wybranych zestawów parametrów procesu MGP



Rysunek 4.5: Wartości estymatorów parametru  $\beta$  obliczone metodami NW i GD na zbiorze realizacji, dla których estymator  $\hat{\beta}^{BD}$  nie istnieje. Wyniki dla dwóch wybranych zestawów parametrów procesu MGP

Dla każdego z powyższych zestawów parametrów, wygenerowaliśmy 2000 realizacji procesu o liczbie skoków  $n \in \{15, 25, 40, 50, 65, 75\}$ . Wartości oszacowań pierwiastków średnich błędów kwadratowych i obciążeń estymatorów parametrów, uzyskanych w oparciu o realizacje procesów o liczbie skoków  $n = 15$  i  $n = 40$ , zaprezentowaliśmy w tabelach 4.9 i 4.10. Rezultaty dotyczące procesów o liczbie skoków  $n \in \{15, 25, 40, 50, 65, 75\}$  wykorzystaliśmy do pokazania dynamiki zmienności wartości oszacowań obciążeń i pierwiastków z błędów średniokwadratowych rozpatrywanych estymatorów w zależności od liczby skoków procesu (rysunki 4.6, 4.7). Ponadto, wyniki uzyskane dla  $n \in \{15, 40, 65\}$  posłużyły do zaprezentowania rozrzutu wartości estymatorów na wykresach pudełkowych (rysunek 4.8).



Tabela 4.8: Udział procentowy realizacji procesu MGP w próbie symulacyjnej, dla których można było wyznaczyć dodatnią wartość odpowiadających estymatorów parametru  $\beta$ . W nawiasach podano procent realizacji, dla których został wyznaczony wyszczególniony w kolumnie estymator, a nie były spełnione warunki istnienia dodatniego oszacowania NW

$n$	$\varrho$	$\beta$	$\kappa$	$\hat{\beta}$	$\hat{\beta}^{BD}$	$\hat{\beta}^{GD}$	$\hat{\beta}$ i $\hat{\beta}^{BD}$ i $\hat{\beta}^{GD}$
15	0.6	0.01	0.75	75.3%	58.0% (0.0%)	86.2% (13.6%)	57.5%
40	0.6	0.01	0.75	82.4%	72.3% (0.2%)	92.8% (11.8%)	71.4%
15	0.6	0.01	1	73.0%	57.4% (0.0%)	85.4% (14.9%)	56.7%
40	0.6	0.01	1	88.2%	82.0% (0.3%)	95.8% (8.2%)	81.3%
15	0.6	0.01	2	81.5%	73.4% (0.0%)	92.2% (11.8%)	73.0%
40	0.6	0.01	2	99.0%	98.2% (0.0%)	99.4% (0.8%)	97.8%
15	1.2	0.05	0.75	80.8%	63.4% (0.0%)	89.0% (10.8%)	63.0%
40	1.2	0.05	0.75	93.2%	87.4% (0.1%)	96.7% (4.4%)	86.8%
15	1.2	0.05	1	81.1%	67.1% (0.0%)	91.2% (11.6%)	66.8%
40	1.2	0.05	1	97.8%	95.3% (0.0%)	99.0% (1.6%)	95.1%
15	1.2	0.05	2	92.8%	87.5% (0.1%)	96.2% (4.2%)	87.0%
40	1.2	0.05	2	100.0%	100.0% (0.0%)	100.0% (0.0%)	100.0%
15	1.2	0.1	0.75	84.9%	70.9% (0.0%)	90.8% (8.4%)	70.4%
40	1.2	0.1	0.75	98.2%	96.0% (0.0%)	99.2% (1.2%)	96.0%
15	1.8	0.1	0.75	81.8%	66.6% (0.0%)	90.0% (10.8%)	65.8%
40	1.8	0.1	0.75	96.3%	93.3% (0.2%)	98.7% (2.8%)	92.9%
15	1.8	0.1	1	84.0%	73.8% (0.1%)	91.2% (9.4%)	73.0%
40	1.8	0.1	1	98.8%	97.5% (0.0%)	99.5% (0.8%)	97.4%
15	1.8	0.1	2	95.6%	92.2% (0.0%)	98.3% (3.0%)	91.9%
40	1.8	0.1	2	100.0%	100.0% (0.0%)	100.0% (0.0%)	100.0%
15	4	0.1	0.75	75.4%	58.5% (0.0%)	86.6% (13.7%)	58.0%
40	4	0.1	0.75	88.5%	79.8% (0.1%)	95.0% (7.8%)	79.3%
15	4	0.2	0.75	82.0%	66.8% (0.0%)	89.8% (10.6%)	66.3%
40	4	0.2	0.75	96.3%	92.8% (0.0%)	98.3% (2.9%)	92.2%
15	4	0.2	1	84.5%	71.8% (0.0%)	91.3% (8.4%)	71.4%
40	4	0.2	1	99.1%	97.8% (0.0%)	99.2% (0.5%)	97.7%
15	4	0.2	2	95.4%	91.4% (0.1%)	97.4% (2.9%)	91.0%
40	4	0.2	2	100.0%	100.0% (0.0%)	100.0% (0.0%)	100.0%

W tabeli 4.8 zaprezentowaliśmy wyniki dotyczące problemu istnienia dodatnich wartości estymatorów parametru  $\beta$  procesu MGP. Rezultaty przedstawiliśmy w postaci procentu realizacji procesu MGP, dla których możliwe było wyznaczenie dodatniej wartości rozważanego estymatora parametru  $\beta$ . Dla każdego rozpatrywanego estymatora, przy tej samej liczbie skoków procesu, w prawie każdym przypadku, wraz ze wzrostem wartości parametrów  $\beta$  i  $\kappa$  oraz spadkiem wartości parametru  $\varrho$ , rośnie liczba realizacji, dla których możliwe jest wyznaczenie dodatniej wartości estymatora. Ponadto, liczba ta rośnie także wraz ze wzrostem liczby  $n$  skoków procesu, niezależnie od wartości parametrów. W przypadku estymatora  $\hat{\beta}^{GD}$ , szczególnie dla procesów o liczbie skoków  $n = 15$ , obserwujemy częstsze występowanie dodatnich wartości estymatora niż w przypadku estymatora  $\hat{\beta}$ , uzyskanego metodą NW. Zauważyliśmy jednak, że dla wielu realizacji procesu, dla których nie istnieje dodatnia wartość estymatora  $\hat{\beta}^{GD}$ , istnieje dodatnia wartość estymatora  $\hat{\beta}$ . Na rysunku 4.4 przedstawiono

wartości estymatorów  $\hat{\beta}$  i  $\hat{\beta}^{GD}$  parametru  $\beta$ , dla realizacji dla których możliwe jest wyznaczenie tylko jednego z tych estymatorów. Można zauważyć, że najrzadziej istnieje dodatnia wartość estymatora  $\hat{\beta}^{BD}$  oraz jego występowanie praktycznie pokrywa się z występowaniem estymatora  $\hat{\beta}$ . Na rysunku 4.5 zilustrowaliśmy rozrzut wartości estymatorów  $\hat{\beta}$  i  $\hat{\beta}^{GD}$  parametru  $\beta$ , dla realizacji, dla których nie istnieje dodatnia wartość estymatora  $\hat{\beta}^{BD}$ . Rozrzut wartości tych estymatorów jest analogiczny do przedstawionego na rysunku 4.4.

Tabela 4.9: Oszacowania obciążeń (podane w nawiasie) i pierwiastków średnich błędów kwadratowych estymatorów parametrów  $\varrho$  i  $\kappa$  procesu MGP, gdy parametr  $\beta$  został oszacowany przy zastosowaniu  $\hat{\beta}^{BD}$ . Pogrubieniem zaznaczono najmniejszą wartość RMSE, w grupie estymatorów rozpatrywanego parametru, dla danego zestawu parametrów i liczby  $n$  skoków procesu

$n$	$\varrho$	$\beta$	$\kappa$	$\hat{\varrho}_M^{BD}$	$\hat{\varrho}_G^{BD}$	$\hat{\varrho}_Z^{BD}$	$\hat{\kappa}_M^{BD}$	$\hat{\kappa}_G^{BD}$	$\hat{\kappa}_Z^{BD}$
15	0.6	0.01	0.75	(-0.076) 0.482	(0.042) 0.391	(0.071) <b>0.373</b>	(-0.389) 0.654	(-0.193) 0.456	(-0.144) <b>0.414</b>
40				(-0.030) 0.259	(0.030) 0.211	(0.041) <b>0.209</b>	(-0.138) 0.281	(-0.052) 0.166	(-0.037) <b>0.159</b>
15	0.6	0.01	1	(-0.102) 0.447	(0.000) 0.348	(0.033) <b>0.329</b>	(-0.485) 0.812	(-0.273) 0.567	(-0.204) <b>0.508</b>
40				(-0.058) 0.272	(-0.007) 0.218	(0.005) <b>0.213</b>	(-0.178) 0.374	(-0.087) 0.254	(-0.066) <b>0.242</b>
15	0.6	0.01	2	(-0.157) 0.449	(-0.094) 0.387	(-0.053) <b>0.355</b>	(-0.832) 1.529	(-0.600) 1.288	(-0.445) <b>1.154</b>
40				(-0.104) 0.283	(-0.074) 0.248	(-0.059) <b>0.239</b>	(-0.302) 0.677	(-0.205) 0.547	(-0.157) <b>0.519</b>
15	1.2	0.05	0.75	(-0.259) 1.030	(0.023) 0.758	(0.084) <b>0.721</b>	(-0.409) 0.669	(-0.186) 0.425	(-0.137) <b>0.384</b>
40				(-0.200) 0.683	(-0.060) 0.525	(-0.036) <b>0.513</b>	(-0.143) 0.295	(-0.054) 0.175	(-0.038) <b>0.167</b>
15	1.2	0.05	1	(-0.328) 1.044	(-0.114) 0.833	(-0.042) <b>0.777</b>	(-0.500) 0.837	(-0.293) 0.605	(-0.222) <b>0.544</b>
40				(-0.221) 0.671	(-0.114) 0.544	(-0.088) <b>0.528</b>	(-0.170) 0.367	(-0.081) 0.243	(-0.060) <b>0.232</b>
15	1.2	0.05	2	(-0.452) 1.063	(-0.310) 0.901	(-0.220) <b>0.822</b>	(-0.824) 1.492	(-0.585) 1.235	(-0.431) <b>1.104</b>
40				(-0.229) 0.619	(-0.160) 0.537	(-0.131) <b>0.518</b>	(-0.305) 0.671	(-0.195) 0.533	(-0.147) <b>0.505</b>
15	1.2	0.1	0.75	(-0.380) 1.188	(-0.094) 0.869	(-0.027) <b>0.816</b>	(-0.413) 0.660	(-0.209) 0.428	(-0.159) <b>0.385</b>
40				(-0.313) 0.840	(-0.158) 0.658	(-0.133) <b>0.641</b>	(-0.149) 0.297	(-0.058) 0.176	(-0.043) <b>0.168</b>
15	1.8	0.1	0.75	(-0.509) 1.760	(-0.067) 1.264	(0.031) <b>1.192</b>	(-0.410) 0.658	(-0.198) 0.427	(-0.148) <b>0.385</b>
40				(-0.421) 1.146	(-0.188) 0.870	(-0.150) <b>0.846</b>	(-0.158) 0.308	(-0.065) 0.187	(-0.049) <b>0.178</b>
15	1.8	0.1	1	(-0.548) 1.618	(-0.221) 1.266	(-0.111) <b>1.178</b>	(-0.498) 0.844	(-0.292) 0.615	(-0.222) <b>0.553</b>
40				(-0.403) 1.127	(-0.225) 0.898	(-0.185) <b>0.871</b>	(-0.181) 0.390	(-0.087) 0.250	(-0.065) <b>0.238</b>
15	1.8	0.1	2	(-0.800) 1.681	(-0.592) 1.470	(-0.449) <b>1.339</b>	(-0.875) 1.499	(-0.647) 1.267	(-0.490) <b>1.130</b>
40				(-0.334) 0.907	(-0.235) 0.784	(-0.191) <b>0.755</b>	(-0.283) 0.650	(-0.181) 0.508	(-0.133) <b>0.482</b>
15	4	0.1	0.75	(-0.772) 3.444	(0.114) 2.555	(0.317) <b>2.429</b>	(-0.401) 0.649	(-0.196) 0.417	(-0.147) <b>0.375</b>
40				(-0.521) 2.035	(-0.050) 1.559	(0.026) <b>1.528</b>	(-0.158) 0.302	(-0.064) 0.181	(-0.049) <b>0.172</b>
15	4	0.2	0.75	(-1.182) 3.954	(-0.293) 3.058	(-0.068) <b>2.871</b>	(-0.424) 0.687	(-0.222) 0.461	(-0.171) <b>0.416</b>
40				(-0.891) 2.518	(-0.375) 1.900	(-0.293) <b>1.849</b>	(-0.151) 0.301	(-0.059) 0.179	(-0.044) <b>0.171</b>
15	4	0.2	1	(-1.317) 3.757	(-0.491) 2.820	(-0.246) <b>2.624</b>	(-0.511) 0.882	(-0.282) 0.600	(-0.212) <b>0.540</b>
40				(-0.984) 2.579	(-0.551) 2.022	(-0.461) <b>1.960</b>	(-0.197) 0.402	(-0.096) 0.265	(-0.075) <b>0.252</b>
15	4	0.2	2	(-1.729) 3.884	(-1.229) 3.367	(-0.918) <b>3.076</b>	(-0.857) 1.550	(-0.616) 1.316	(-0.460) <b>1.180</b>
40				(-0.827) 2.091	(-0.607) 1.828	(-0.506) <b>1.759</b>	(-0.328) 0.697	(-0.223) 0.559	(-0.174) <b>0.529</b>

Wartości przedstawione w tabelach 4.9 i 4.10 pokazują, że niezależnie od wybranej alternatywnej metody estymacji parametru  $\beta$  (BD czy GD), najmniejsze wartości  $\widehat{RMSE}$  oraz najmniejsze wartości obciążeń ma estymator  $\kappa$  wyznaczony w oparciu zmodyfikowaną metodę NW, czyli estymator  $\hat{\kappa}_Z^{BD}$  i  $\hat{\kappa}_Z^{GD}$ . Wartości zamieszczone w tabeli 4.9 wyznaczyliśmy w oparciu o te realizacje procesu MGP, dla których moż-

liwe było wyznaczenie dodatniej wartości estymatora  $\hat{\beta}^{BD}$ . Analogicznie, wartości zamieszczone w tabeli 4.10 wyznaczyliśmy w oparciu o te realizacje procesu MGP, dla których możliwe było wyznaczenie dodatniej wartości estymatora  $\hat{\beta}^{GD}$ . W przypadku zastosowaniu metody NW estymacji parametru  $\kappa$  na podstawie estymatorów  $\hat{\beta}^{BD}$  i  $\hat{\beta}^{GD}$ , dla średnio ponad 40% realizacji nie było możliwe wyznaczenie dodatniej wartości tego estymatora (wyniki tych nie zamieściliśmy w tabelach). Warto zauważyć, że wśród oszacowań parametru  $\varrho$ , metodami alternatywnymi do metody NW, najmniejszą wartość oszacowań RMSE otrzymaliśmy dla estymatorów tego parametru, obliczonych na podstawie estymatorów  $\hat{\beta}^{BD}$ ,  $\hat{\kappa}_Z^{BD}$  i  $\hat{\beta}^{GD}$ ,  $\hat{\kappa}_Z^{GD}$ . W związku z tym, w dalszej analizie uwzględnimy wyłącznie estymatory podane w tabeli 4.11.

Tabela 4.10: Oszacowania obciążeń (podane w nawiasie) i pierwiastków średnich błędów kwadratowych estymatorów parametrów  $\varrho$  i  $\kappa$  procesu MGP, gdy parametr  $\beta$  został oszacowany przy zastosowaniu  $\hat{\beta}^{GD}$ . Pogrubieniem zaznaczono najmniejszą wartość  $\widehat{\text{RMSE}}$ , w grupie estymatorów rozpatrywanego parametru, dla danego zestawu parametrów i liczby  $n$  skoków procesu

$n$	$\varrho$	$\beta$	$\kappa$	$\hat{\varrho}_M^{GD}$	$\hat{\varrho}_G^{GD}$	$\hat{\varrho}_Z^{GD}$	$\hat{\kappa}_M^{GD}$	$\hat{\kappa}_G^{GD}$	$\hat{\kappa}_Z^{GD}$						
15	0.6	0.01	0.75	(-0.085)	0.499	(0.018)	0.395	(0.048)	<b>0.375</b>	(-0.299)	0.587	(-0.152)	0.412	(-0.105)	<b>0.375</b>
40				(-0.046)	0.298	(0.009)	0.238	(0.020)	<b>0.234</b>	(-0.116)	0.274	(-0.045)	0.164	(-0.030)	<b>0.157</b>
15	0.6	0.01	1	(-0.111)	0.491	(-0.024)	0.393	(0.010)	<b>0.370</b>	(-0.384)	0.763	(-0.225)	0.548	(-0.158)	<b>0.495</b>
40				(-0.060)	0.296	(-0.014)	0.239	(-0.002)	<b>0.233</b>	(-0.148)	0.364	(-0.073)	0.248	(-0.052)	<b>0.237</b>
15	0.6	0.01	2	(-0.165)	0.489	(-0.109)	0.422	(-0.067)	<b>0.388</b>	(-0.727)	1.469	(-0.538)	1.235	(-0.388)	<b>1.108</b>
40				(-0.103)	0.304	(-0.076)	0.270	(-0.061)	<b>0.260</b>	(-0.270)	0.667	(-0.185)	0.539	(-0.137)	<b>0.513</b>
15	1.2	0.05	0.75	(-0.290)	1.100	(-0.044)	0.829	(0.020)	<b>0.782</b>	(-0.327)	0.615	(-0.155)	0.399	(-0.108)	<b>0.362</b>
40				(-0.225)	0.755	(-0.096)	0.591	(-0.072)	<b>0.576</b>	(-0.124)	0.288	(-0.049)	0.174	(-0.034)	<b>0.167</b>
15	1.2	0.05	1	(-0.381)	1.180	(-0.174)	0.910	(-0.099)	<b>0.846</b>	(-0.419)	0.794	(-0.247)	0.571	(-0.179)	<b>0.515</b>
40				(-0.239)	0.727	(-0.142)	0.598	(-0.116)	<b>0.581</b>	(-0.148)	0.358	(-0.072)	0.239	(-0.050)	<b>0.229</b>
15	1.2	0.05	2	(-0.442)	1.096	(-0.313)	0.929	(-0.224)	<b>0.850</b>	(-0.706)	1.418	(-0.504)	1.161	(-0.356)	<b>1.040</b>
40				(-0.233)	0.650	(-0.169)	0.572	(-0.139)	<b>0.552</b>	(-0.276)	0.658	(-0.177)	0.523	(-0.129)	<b>0.497</b>
15	1.2	0.1	0.75	(-0.449)	1.336	(-0.176)	0.986	(-0.104)	<b>0.922</b>	(-0.351)	0.619	(-0.180)	0.405	(-0.132)	<b>0.365</b>
40				(-0.332)	0.904	(-0.195)	0.732	(-0.169)	<b>0.712</b>	(-0.130)	0.290	(-0.053)	0.174	(-0.037)	<b>0.166</b>
15	1.8	0.1	0.75	(-0.565)	1.860	(-0.152)	1.343	(-0.051)	<b>1.260</b>	(-0.340)	0.621	(-0.165)	0.399	(-0.117)	<b>0.361</b>
40				(-0.426)	1.236	(-0.220)	0.962	(-0.182)	<b>0.936</b>	(-0.135)	0.301	(-0.059)	0.183	(-0.043)	<b>0.175</b>
15	1.8	0.1	1	(-0.636)	1.795	(-0.323)	1.412	(-0.207)	<b>1.311</b>	(-0.428)	0.792	(-0.253)	0.575	(-0.185)	<b>0.518</b>
40				(-0.440)	1.215	(-0.274)	1.003	(-0.233)	<b>0.973</b>	(-0.166)	0.384	(-0.080)	0.247	(-0.058)	<b>0.236</b>
15	1.8	0.1	2	(-0.804)	1.769	(-0.606)	1.548	(-0.463)	<b>1.413</b>	(-0.779)	1.438	(-0.575)	1.216	(-0.422)	<b>1.086</b>
40				(-0.330)	0.968	(-0.239)	0.843	(-0.194)	<b>0.814</b>	(-0.258)	0.640	(-0.165)	0.500	(-0.118)	<b>0.475</b>
15	4	0.1	0.75	(-0.986)	3.723	(-0.181)	2.774	(0.036)	<b>2.613</b>	(-0.328)	0.609	(-0.164)	0.397	(-0.117)	<b>0.359</b>
40				(-0.602)	2.225	(-0.183)	1.722	(-0.104)	<b>1.681</b>	(-0.131)	0.291	(-0.055)	0.174	(-0.040)	<b>0.166</b>
15	4	0.2	0.75	(-1.353)	4.165	(-0.481)	3.157	(-0.247)	<b>2.954</b>	(-0.353)	0.642	(-0.184)	0.428	(-0.136)	<b>0.387</b>
40				(-0.970)	2.757	(-0.473)	2.110	(-0.389)	<b>2.053</b>	(-0.137)	0.298	(-0.054)	0.177	(-0.039)	<b>0.169</b>
15	4	0.2	1	(-1.460)	4.006	(-0.667)	2.995	(-0.414)	<b>2.780</b>	(-0.430)	0.810	(-0.237)	0.548	(-0.170)	<b>0.493</b>
40				(-0.973)	2.687	(-0.573)	2.160	(-0.482)	<b>2.096</b>	(-0.178)	0.391	(-0.088)	0.260	(-0.066)	<b>0.248</b>
15	4	0.2	2	(-1.733)	4.083	(-1.280)	3.593	(-0.966)	<b>3.290</b>	(-0.762)	1.486	(-0.554)	1.259	(-0.402)	<b>1.131</b>
40				(-0.824)	2.146	(-0.628)	1.891	(-0.527)	<b>1.821</b>	(-0.298)	0.683	(-0.207)	0.549	(-0.158)	<b>0.521</b>

Tabela 4.11: Estymatory wybrane do porównania dokładności oszacowań parametrów procesu MGP względem estymatorów NW

	$\varrho$	$\beta$	$\kappa$
NW	$\hat{\varrho}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\kappa}$
BD	$\hat{\varrho}_Z^{BD}$	$\hat{\beta}^{BD}$	$\hat{\kappa}_Z^{BD}$
GD	$\hat{\varrho}_Z^{GD}$	$\hat{\beta}^{GD}$	$\hat{\kappa}_Z^{GD}$

Po przeanalizowaniu wyników symulacji komputerowych, nie możemy wskazać metody estymacji parametrów procesu MGP, która jest najlepsza, przy przyjętych kryteriach, w każdym rozpatrywanym przypadku. W tabelach 4.12 oraz 4.13 zamieściliśmy oszacowania obciążeń oraz pierwiastków średnich błędów kwadratowych estymatorów parametrów procesu MGP. Podane w tych tabelach wartości wyznaczyliśmy w oparciu o te realizacje procesu, dla których dla wszystkich rozpatrywanych estymatorów parametru  $\beta$  (procent realizacji przedstawiono w ostatniej kolumnie tabeli 4.8) istniało dodatnie oszacowanie tego parametru. Wyniki pokazują znaczne zmniejszenie oszacowań RMSE estymatorów parametrów  $\beta$  przy zastąpieniu referencyjnej metody NW metodą BD. Dla  $n$  równego 15, redukcja RMSE sięga często powyżej 15%. Dla dłuższych procesów znacznie spadają wartości RMSE dla wszystkich rozpatrywanych estymatorów. Zależność tę przedstawiono, dla dwóch wybranych zestawów parametrów, na rysunkach 4.6 i 4.7. Mimo że początkowo widać istotne rozróżnienie pomiędzy krzywymi RMSE dla estymatorów parametru  $\beta$ , to wraz ze wzrostem liczby skoków procesu różnice zanikają, a wartość oszacowania RMSE dla metody NW jest najmniejsza. Zysk na RMSE metody GD względem metody referencyjnej NW jest mniejszy i rzadszy niż dla metody BD, ale wciąż występuje w ponad połowie rozpatrywanych parametryzacji dla  $n$  równego 15. Dodatkowo, procentowa poprawa dokładności oszacowania estymatorów alternatywnych parametru  $\beta$  pod względem RMSE zależy od parametrów procesu analogicznie jak kwestia istnienia dodatnich wartości estymatorów, zaprezentowana w tabeli 4.8. W przypadku obciążenia, estymatory  $\hat{\beta}^{BD}$  i  $\hat{\beta}^{GD}$  cechują się wartością bliższą zera niż estymator  $\hat{\beta}$ . Wraz ze wzrostem  $n$  oszacowanie obciążeń każdego estymatora zbliża się do zera, jednak zawsze obciążenie estymatora NW jest stosunkowo większe niż estymatorów alternatywnych. W estymacji parametru  $\beta$  dominują wartości oszacowań dla każdej z rozpatrywanych metod i zestawów parametrów większe od wartości teoretycznej (ujemne obciążenia). Przykładowe wykresy pudełkowe wartości oszacowań parametrów procesu MGP dla dwóch wybranych zestawów parametrów znajdują się na rysunku 4.8.

Analizując wartości oszacowań obciążeń i pierwiastków z błędów średniokwadratowych estymatorów parametru  $\kappa$  można stwierdzić, że optymalną metodą estymacji, według przyjętych kryteriów, jest metoda GD. Dla  $n = 15$  redukcja wartości oszacowań RMSE estymatorów parametru  $\kappa$  uzyskanych metodą GD w stosunku oszacowań RMSE estymatora NW parametru  $\kappa$  wynosi powyżej 10%. Nieznacznie mniejszą poprawę RMSE widzimy także dla estymatora  $\hat{\kappa}_Z^{BD}$ . Tak jak w przypadku estymacji parametru  $\beta$ , oszacowane obciążenia estymatorów parametru  $\kappa$  przyjmują wartości ujemne. Ponadto, oszacowania obciążenia estymatora  $\hat{\kappa}$  są największe bez względu na liczbę skoków procesu. Różnice w oszacowanych wartościach obciążeń i pierwiastków

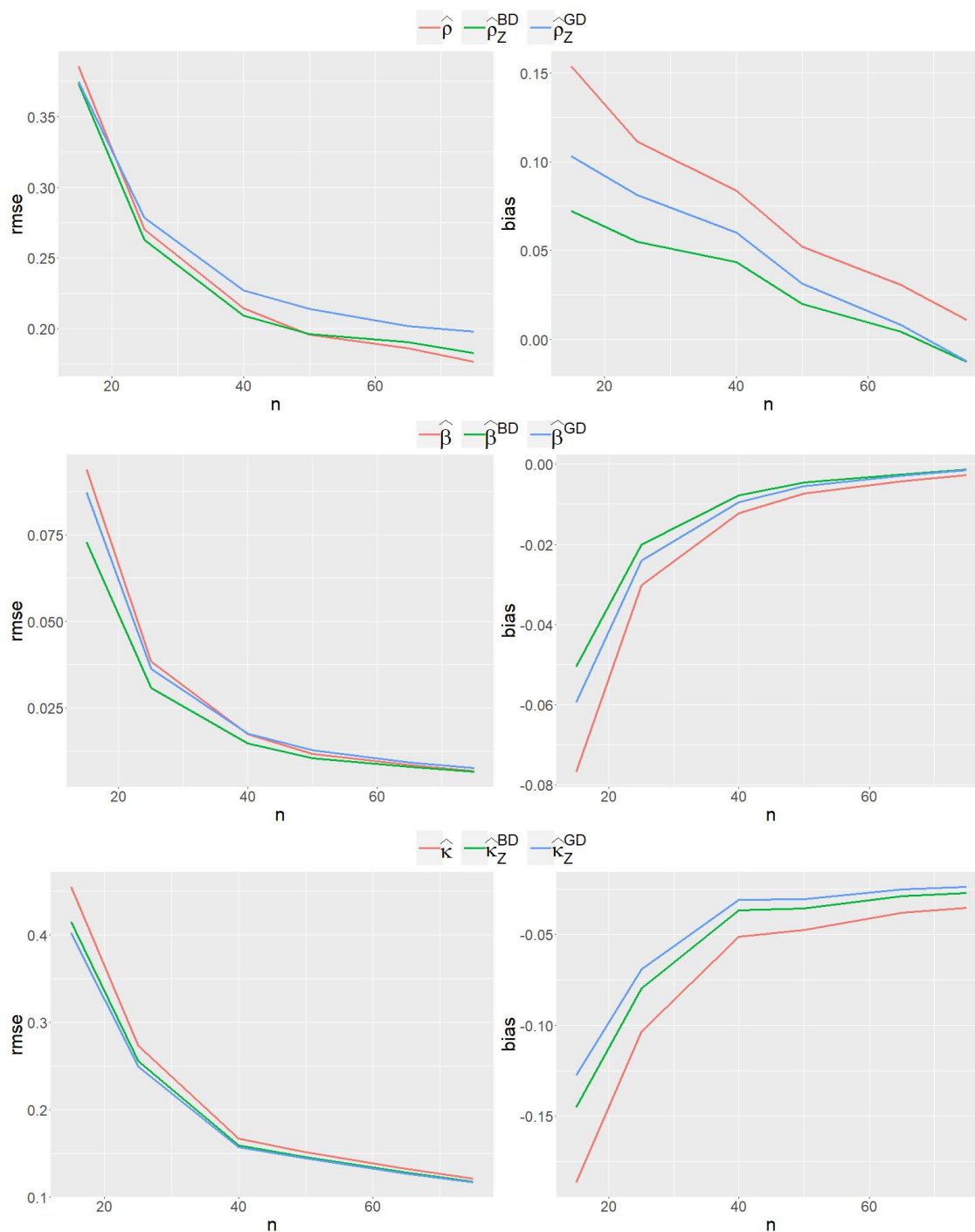
Tabela 4.12: Oszacowanie obciążenia (podane w nawiasie) i pierwiastka średniego błędu kwadratowego RMSE estymatorów parametrów procesu MGP dla wybranych zestawów parametrów  $\varrho$ ,  $\beta$  i  $\kappa$  oraz długości procesu  $n$ . Pod wartością RMSE podano, pochyloną czcionką, procentową zmianę względem odpowiedniego estymatora NW. Pogrubieniem zaznaczono najmniejszą wartość RMSE w grupie estymatorów rozpatrywanego parametru dla danego zestawu parametrów i liczby  $n$  skoków procesu

$n$	$\varrho$	$\beta$	$\kappa$	$\hat{\varrho}$	$\hat{\varrho}^{BD}$	$\hat{\varrho}^{GD}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\beta}^{BD}$	$\hat{\beta}^{GD}$	$\hat{\kappa}$	$\hat{\kappa}^{BD}$	$\hat{\kappa}^{GD}$
15	0.6	0.01	0.75	(0.154) <b>0.386</b>	(0.072) <b>0.374</b>	(0.103) 0.375	(-0.077) 0.094	(-0.050) <b>0.073</b>	(-0.059) 0.087	(-0.187) 0.455	(-0.145) 0.415	(-0.128) <b>0.403</b>
					-3.1%	-2.9%		-22.4%	-7.0%		-8.9%	-11.5%
40				(0.084) 0.214	(0.043) <b>0.209</b>	(0.060) 0.227	(-0.012) 0.017	(-0.008) <b>0.015</b>	(-0.009) 0.018	(-0.051) 0.167	(-0.037) 0.159	(-0.031) <b>0.157</b>
					-2.5%	5.8%		-15.6%	1.5%		-4.5%	-5.8%
15	0.6	0.01	1	(0.092) 0.332	(0.037) <b>0.326</b>	(0.067) 0.327	(-0.047) 0.059	(-0.032) <b>0.048</b>	(-0.037) 0.056	(-0.264) 0.561	(-0.202) 0.505	(-0.175) <b>0.485</b>
					-1.8%	-1.3%		-18.5%	-4.8%		-10.0%	-13.5%
40				(0.036) <b>0.207</b>	(0.008) 0.210	(0.025) 0.225	(-0.006) 0.011	(-0.004) <b>0.010</b>	(-0.005) 0.012	(-0.086) 0.253	(-0.065) 0.241	(-0.055) <b>0.237</b>
					1.3%	8.4%		-9.7%	10.7%		-4.7%	-6.4%
15	0.6	0.01	2	(-0.042) 0.365	(-0.051) 0.354	(-0.018) <b>0.348</b>	(-0.011) 0.017	(-0.008) <b>0.014</b>	(-0.010) 0.018	(-0.594) 1.288	(-0.444) 1.155	(-0.384) <b>1.097</b>
					-3.2%	-4.7%		-13.0%	5.5%		-10.4%	-14.8%
40				(-0.051) <b>0.237</b>	(-0.059) 0.239	(-0.055) 0.253	(-0.001) <b>0.005</b>	(0.000) 0.005	(0.000) 0.006	(-0.207) 0.549	(-0.157) 0.520	(-0.135) <b>0.508</b>
					0.7%	7.0%		0.6%	20.6%		-5.3%	-7.4%
15	1.2	0.05	0.75	(0.271) 0.724	(0.088) 0.721	(0.156) <b>0.721</b>	(-0.159) 0.206	(-0.097) <b>0.157</b>	(-0.117) 0.188	(-0.178) 0.424	(-0.137) 0.385	(-0.121) <b>0.374</b>
					-0.5%	-0.4%		-23.8%	-8.9%		-9.1%	-11.7%
40				(0.060) <b>0.486</b>	(-0.032) 0.511	(-0.009) 0.533	(-0.021) 0.041	(-0.010) <b>0.038</b>	(-0.013) 0.043	(-0.053) 0.175	(-0.039) 0.168	(-0.033) <b>0.165</b>
					5.2%	9.7%		-8.6%	4.7%		-4.4%	-6.0%
15	1.2	0.05	1	(0.084) <b>0.779</b>	(-0.044) 0.779	(0.018) 0.796	(-0.090) 0.123	(-0.056) <b>0.102</b>	(-0.068) 0.119	(-0.288) 0.605	(-0.224) 0.545	(-0.198) <b>0.527</b>
					0.0%	2.2%		-17.5%	-3.6%		-9.9%	-13.0%
40				(-0.023) <b>0.504</b>	(-0.087) 0.528	(-0.091) 0.563	(-0.011) 0.030	(-0.005) <b>0.029</b>	(-0.005) 0.033	(-0.081) 0.243	(-0.060) 0.232	(-0.052) <b>0.229</b>
					4.7%	11.8%		-2.7%	9.3%		-4.8%	-5.9%
15	1.2	0.05	2	(-0.189) 0.835	(-0.215) <b>0.815</b>	(-0.169) 0.816	(-0.020) 0.041	(-0.011) <b>0.038</b>	(-0.013) 0.044	(-0.580) 1.235	(-0.431) 1.103	(-0.372) <b>1.061</b>
					-2.3%	-2.2%		-7.4%	6.9%		-10.7%	-14.1%
40				(-0.113) <b>0.510</b>	(-0.131) 0.518	(-0.139) 0.552	(-0.003) 0.015	(-0.001) <b>0.015</b>	(0.000) 0.017	(-0.197) 0.534	(-0.147) 0.505	(-0.129) <b>0.497</b>
					1.5%	8.2%		2.0%	16.7%		-5.3%	-6.9%
15	1.2	0.1	0.75	(0.173) <b>0.781</b>	(-0.022) 0.816	(0.031) 0.838	(-0.167) 0.231	(-0.101) <b>0.188</b>	(-0.118) 0.213	(-0.203) 0.426	(-0.160) 0.386	(-0.145) <b>0.377</b>
					4.4%	7.3%		-18.7%	-7.9%		-9.4%	-11.5%
40				(-0.025) <b>0.592</b>	(-0.132) 0.640	(-0.137) 0.684	(-0.019) 0.056	(-0.005) <b>0.055</b>	(-0.006) 0.060	(-0.057) 0.176	(-0.043) 0.168	(-0.037) <b>0.166</b>
					8.1%	15.7%		-2.1%	8.4%		-4.5%	-5.5%

Tabela 4.13: Wyniki analogiczne do przedstawionych w tabeli 4.12, dla innych zestawów parametrów  $\varrho$ ,  $\beta$  i  $\kappa$

$n$	$\varrho$	$\beta$	$\kappa$	$\hat{\varrho}$	$\hat{\varrho}_{Z}^{BD}$	$\hat{\varrho}_{Z}^{GD}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\beta}_{BD}$	$\hat{\beta}_{GD}$	$\hat{\kappa}$	$\hat{\kappa}_{Z}^{BD}$	$\hat{\kappa}_{Z}^{GD}$
15	1.8	0.1	0.75	(0.313) <b>1.184</b>	(0.040) 1.191	(0.130) 1.188	(-0.247) 0.322	(-0.153) <b>0.250</b>	(-0.180) 0.293	(-0.191) 0.425	(-0.149) 0.385	(-0.133) <b>0.373</b>
					0.6%	0.4%		-22.6%	-9.3%		-9.3%	-12.1%
40				(0.000) <b>0.792</b>	(-0.144) 0.840	(-0.115) 0.886	(-0.027) 0.067	(-0.010) <b>0.064</b>	(-0.014) 0.073	(-0.064) 0.187	(-0.049) 0.178	(-0.043) <b>0.176</b>
					6.0%	11.8%		-4.5%	10.2%		-4.6%	-6.0%
15	1.8	0.1	1	(0.092) <b>1.148</b>	(-0.102) 1.170	(-0.043) 1.208	(-0.134) 0.187	(-0.081) <b>0.153</b>	(-0.093) 0.175	(-0.287) 0.614	(-0.223) 0.554	(-0.200) <b>0.536</b>
					1.9%	5.2%		-17.9%	-6.3%		-9.7%	-12.7%
40				(-0.075) <b>0.812</b>	(-0.184) 0.870	(-0.194) 0.918	(-0.016) 0.049	(-0.005) <b>0.049</b>	(-0.005) 0.055	(-0.087) 0.250	(-0.065) 0.238	(-0.057) <b>0.234</b>
					7.1%	13.1%		-0.3%	10.6%		-4.9%	-6.4%
15	1.8	0.1	2	(-0.399) 1.352	(-0.442) <b>1.329</b>	(-0.394) 1.333	(-0.028) 0.067	(-0.012) <b>0.064</b>	(-0.015) 0.072	(-0.641) 1.267	(-0.487) 1.127	(-0.434) <b>1.088</b>
					-1.7%	-1.4%		-5.2%	6.9%		-11.0%	-14.1%
40				(-0.153) <b>0.737</b>	(-0.191) 0.755	(-0.194) 0.814	(-0.004) <b>0.025</b>	(0.000) 0.026	(0.000) 0.029	(-0.182) 0.510	(-0.133) 0.482	(-0.118) <b>0.475</b>
					2.4%	10.4%		1.6%	16.7%		-5.4%	-6.8%
15	4	0.1	0.75	(0.908) 2.457	(0.320) 2.436	(0.457) <b>2.472</b>	(-0.516) 0.640	(-0.330) <b>0.496</b>	(-0.369) 0.559	(-0.190) 0.415	(-0.149) 0.377	(-0.133) <b>0.367</b>
					-0.9%	0.6%		-22.5%	-12.6%		-9.3%	-11.7%
40				(0.311) <b>1.498</b>	(0.036) 1.515	(0.123) 1.619	(-0.073) 0.118	(-0.043) <b>0.104</b>	(-0.052) 0.126	(-0.064) 0.180	(-0.049) 0.172	(-0.042) <b>0.169</b>
					1.1%	8.1%		-12.0%	6.2%		-4.7%	-6.4%
15	4	0.2	0.75	(0.554) 2.770	(-0.056) 2.866	(0.158) <b>2.738</b>	(-0.498) 0.650	(-0.304) <b>0.509</b>	(-0.366) 0.634	(-0.216) 0.459	(-0.172) 0.417	(-0.153) <b>0.400</b>
					3.5%	-1.2%		-21.6%	-2.5%		-9.2%	-12.9%
40				(0.035) <b>1.730</b>	(-0.285) 1.847	(-0.245) 1.939	(-0.061) 0.141	(-0.024) <b>0.134</b>	(-0.030) 0.153	(-0.059) 0.179	(-0.044) 0.171	(-0.039) <b>0.168</b>
					6.8%	12.1%		-5.3%	8.6%		-4.6%	-6.1%
15	4	0.2	1	(0.208) <b>2.569</b>	(-0.241) 2.607	(-0.059) 2.596	(-0.293) 0.403	(-0.174) <b>0.327</b>	(-0.204) 0.377	(-0.276) 0.598	(-0.213) 0.540	(-0.190) <b>0.518</b>
					1.5%	1.0%		-18.9%	-6.4%		-9.8%	-13.4%
40				(-0.220) <b>1.847</b>	(-0.457) 1.958	(-0.437) 2.061	(-0.033) 0.105	(-0.010) <b>0.104</b>	(-0.012) 0.117	(-0.096) 0.265	(-0.075) 0.252	(-0.067) <b>0.249</b>
					6.0%	11.6%		-1.2%	10.6%		-4.8%	-6.3%
15	4	0.2	2	(-0.806) 3.138	-0.904) <b>(3.068)</b>	(-0.777) 3.117	(-0.067) 0.149	(-0.032) <b>0.140</b>	(-0.040) 0.160	(-0.612) 1.319	(-0.460) 1.182	(-0.402) <b>1.135</b>
					-2.2%	-0.7%		-6.3%	7.5%		-10.4%	-13.9%
40				(-0.442) <b>1.727</b>	(-0.506) 1.759	(-0.527) 1.821	(-0.009) <b>0.053</b>	(-0.002) 0.055	(0.000) 0.060	(-0.225) 0.561	(-0.174) 0.529	(-0.158) <b>0.521</b>
					1.9%	5.4%		3.4%	13.4%		-5.6%	-7.1%

ze średnich błędów kwadratowych estymatorów NW i estymatorów alternatywnych maleją wraz ze wzrostem wartości  $n$ .



Rysunek 4.6: Zmiana  $\widehat{\text{bias}}$  i  $\widehat{\text{RMSE}}$  względem  $n$  dla procesu MGP(0.6, 0.01, 0.75)

W przypadku estymacji parametru  $\rho$  procesu MGP, na podstawie przeprowadzonych symulacji wnioski są następujące. W zdecydowanej większości przypadków estymator NW zapewnia najdokładniejsze oszacowania pod względem RMSE w po-

równaniu do estymatorów alternatywnych. W przypadkach, w których oszacowane wartości RMSE estymatorów alternatywnych są mniejsze od odpowiednich wartości RMSE estymatorów NW, “zysk” z zastosowania estymatorów alternatywnych jest zawsze mniejszy niż 5%. W przypadku oszacowań obciążeń, ich wartości dla estymatora  $\varrho$  są najczęściej największe (rysunek 4.6 i 4.7). Warte uwagi jest specyficzne zachowanie obciążenia estymatorów parametru  $\varrho$  dla realizacji procesu MGP przy mniejszych wartościach parametru  $\kappa$ , co jest ściśle związane z kwestią istnienia estymatorów (tabela 4.8). Pojawia się ono przy aktualnie omawianych estymatorach oraz tych prezentowanych w tabelach 4.9 i 4.10. Występują sytuacje, dla których przy mniejszej wartości  $n$  obserwujemy oszacowanie obciążenia bliższe zeru. Na rysunku 4.8 możemy zaobserwować naturalne zjawisko większej wariancji estymatora dla krótszych procesów. Występujące wartości odstające dla  $n = 15$  zaburzają oszacowania obciążenia. Jednakże sama wariancja estymatorów nie tłumaczy zmiany znaku obciążenia oraz zauważalnej różnicy w zachowaniu estymatorów. W przypadku procesu MGP(0.6, 0.01, 0.75) widoczne jest, że dla wszystkich estymatorów parametru  $\varrho$  mediana oszacowań dla mniejszych  $n$  znajduje się poniżej wartości teoretycznej, a dla procesu MGP(1.8, 0.1, 2) mediana wartości obliczonych estymatorów od najmniejszej wartości  $n$  leży w okolicy prawdziwej wartości parametru. Zjawisko to prawdopodobnie jest zależne od przebiegu procesu, którego nietypowość odzwierciedla się w kwestii istnienia estymatorów. Analizę procesu MGP(0.6, 0.01, 0.75) przy  $n$  równym 15 wykonano na  $\sim 58\%$  wygenerowanych realizacjach, a dla  $n = 65$  było to już  $\sim 87\%$ . Dla porównania rozważając proces MGP(1.8, 0.1, 2) przy  $n = 15$ ,  $\sim 92\%$  realizacji było wziętych do analizy.

Poniżej przedstawiamy wnioski z symulacji komputerowych dotyczących predykcji momentu kolejnego,  $(n + 1)$ -wszego, skoku procesu MGP. Wartości predyktorów  $\hat{t}_{n+1}$  wyznaczyliśmy zgodnie ze wzorem (4.1), który w przypadku procesu MGP przyjmuje postać

$$\hat{t}_{n+1} = \frac{1}{\hat{\varrho}^*} \log \left[ \exp(\hat{\beta}^* t_n) + \frac{\hat{\beta}^*}{\hat{\varrho}^*} \hat{\kappa}^* \right],$$

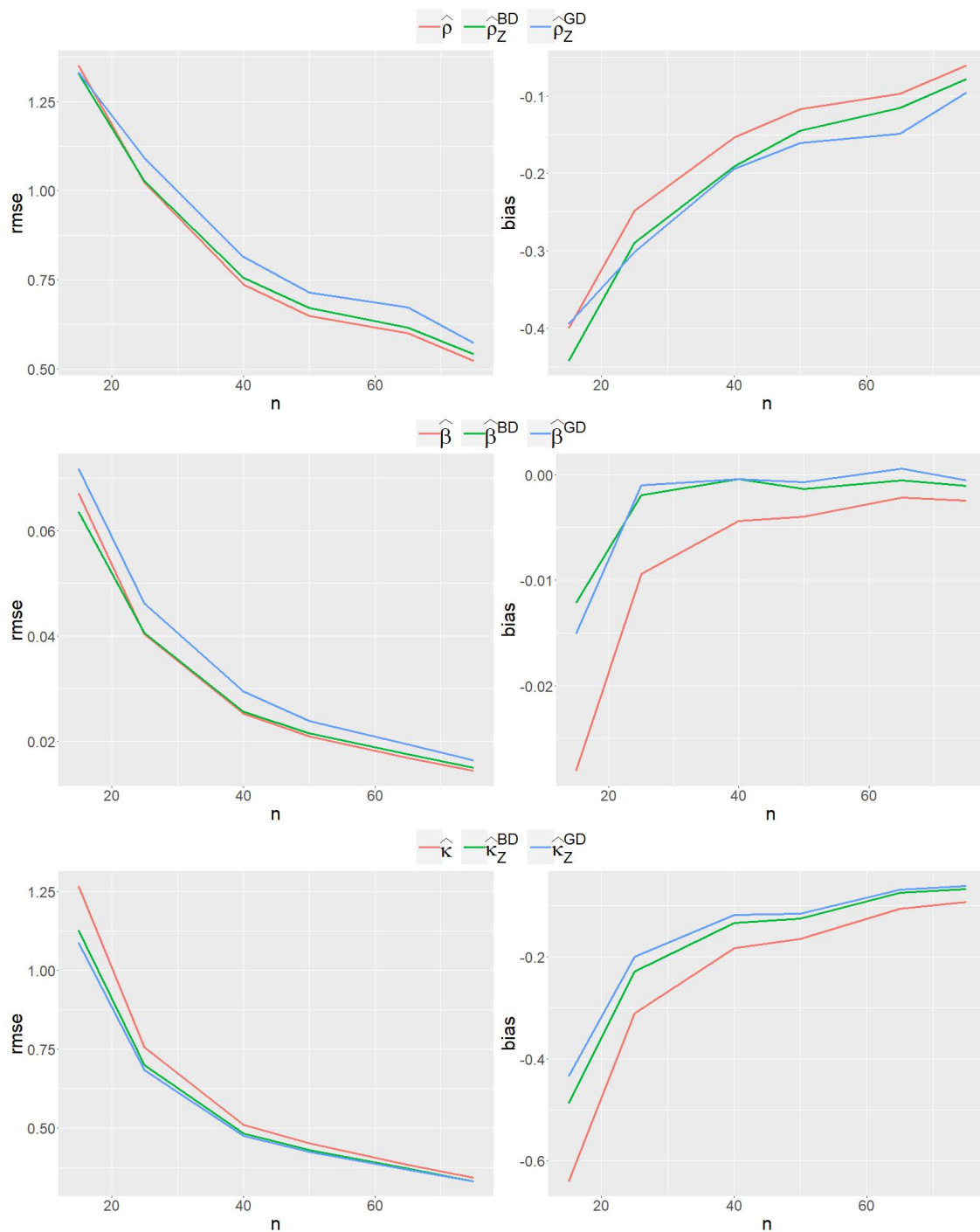
gdzie  $\hat{\varrho}^*$ ,  $\hat{\beta}^*$  i  $\hat{\kappa}^*$  są dowolnymi estymatorami parametrów procesu MGP, odpowiednio  $\varrho$ ,  $\beta$  i  $\kappa$ . Zauważmy, że, analogicznie do przypadku procesu MPLP, podstawiając do powyższego wzoru za  $\hat{\varrho}^* = n\hat{\kappa}^*\hat{\beta}^*/[\exp(\hat{\beta}^* t_n) - 1]$  otrzymamy, że

$$\hat{t}_{n+1} = \frac{1}{\hat{\beta}^*} \log \left[ \exp(\hat{\beta}^* t_n) \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right], \quad (4.3)$$

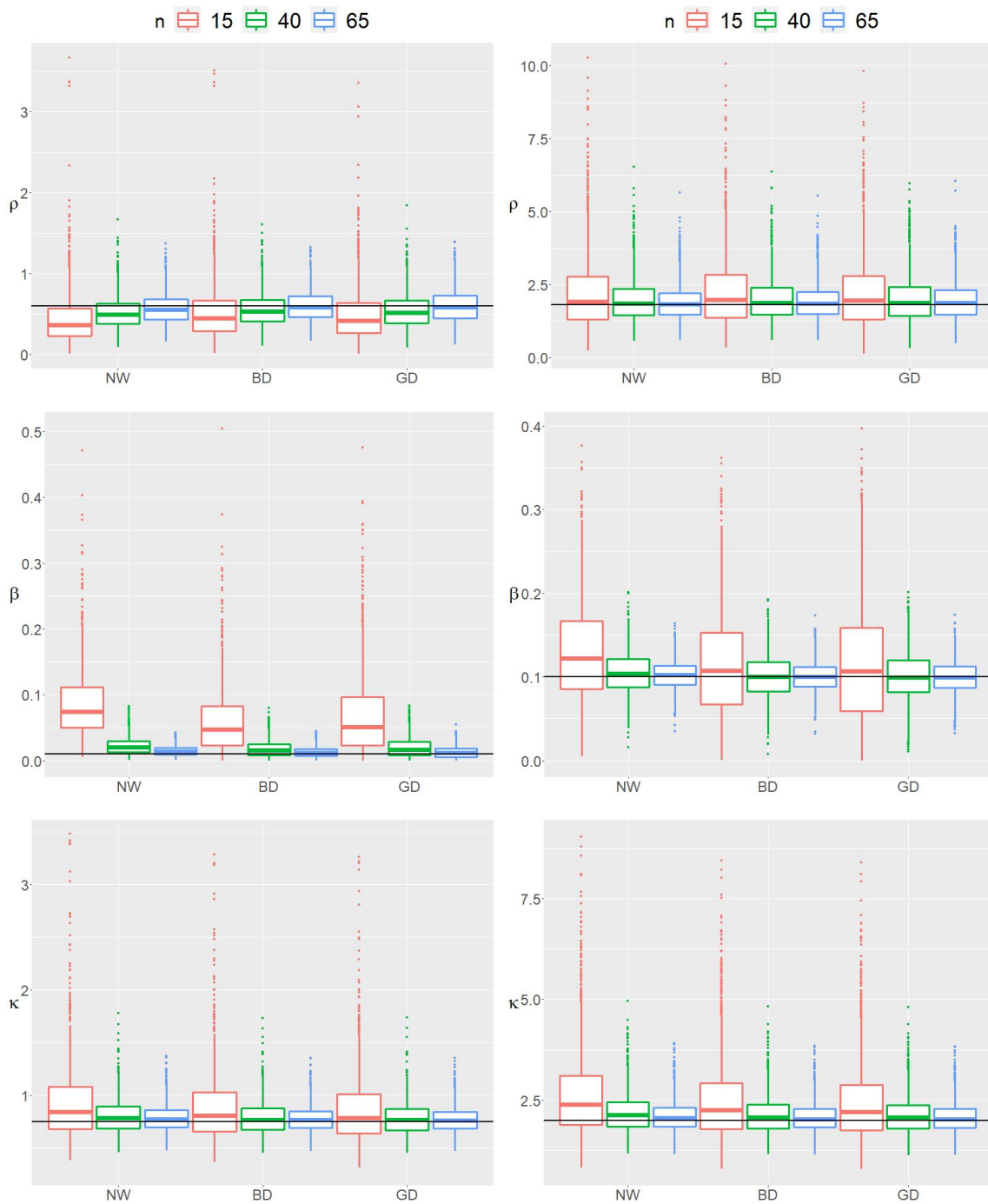
zależy wyłącznie od wartości estymatora parametru  $\beta$  i momentu  $t_n$   $n$ -tego zdarzenia. Stąd wynika, że im większe jest oszacowanie parametru  $\beta$ , tym mniejsza jest wartość predyktora.

W tabeli 4.14 przedstawiliśmy oszacowania obciążeń i pierwiastków z błędów średniokwadratowych predykcji momentu kolejnego skoku procesu MGP, obliczone w zależności od przyjętych parametrów procesu, ich estymatorów oraz liczby skoków procesu. Otrzymane wartości  $\widehat{\text{RMSE}}$  predyktorów, uzyskanych w oparciu o różne rozpatrywane estymatory, nie różnią się znacznie, przy ustalonych parametrach procesu. Różnice w wartościach  $\widehat{\text{RMSE}}$  predyktorów bazujących na estymatorach NW i





Rysunek 4.7: Zmiana  $\widehat{\text{bias}}$  i  $\widehat{\text{RMSE}}$  względem  $n$  dla procesu MGP(1.8, 0.1, 2)



(a) MGP(0.6, 0.01, 0.75)

(b) MGP(1.8, 0.1, 2)

Rysunek 4.8: Uzyskane wartości estymatorów parametrów procesu MGP przedstawione w postaci wykresów pudełkowych. Odpowiednio od góry zaprezentowano wyniki dla parametr  $\rho$ ,  $\beta$  i  $\kappa$  oraz przyjęto następujące oznaczenia zależne od wykresu: NW - estymatory  $\hat{\rho}$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\kappa}$ , BD -  $\hat{\rho}^{BD}$ ,  $\hat{\beta}^{BD}$ ,  $\hat{\kappa}^{BD}$  oraz GD -  $\hat{\rho}^{GD}$ ,  $\hat{\beta}^{GD}$ ,  $\hat{\kappa}^{GD}$

estymatorach alternatywnych nie przekraczają 2.5%. W przypadku, gdy  $n = 40$  zazwyczaj najmniejsze wartości  $\widehat{\text{RMSE}}$  uzyskaliśmy dla estymatorów NW, gdy  $n = 15$  – dla estymatorów BD. Uzyskane relacje między wartościami  $\widehat{\text{RMSE}}$  rozpatrywanych predyktorów są zbliżone do relacji, która zachodzi między wartościami  $\widehat{\text{RMSE}}$  odpowiednich estymatorów parametru  $\beta$  (zob. tabele 4.12 oraz 4.13). Oszacowane obciążenia predyktorów uzyskanych w oparciu o estymatory NW są dodatnie dla każdego rozpatrywanego zestawu parametrów i dla większości przypadków predyktorów uzyskanych w oparciu o estymatory alternatywne. Ponadto, predyktory momentu kolejnego skoku procesu, otrzymane w oparciu o estymatory BD i GD mają mniejsze bias niż predyktory otrzymane w oparciu o estymatory NW.

Tabela 4.14: Oszacowanie obciążenia (podane w nawiasie) i pierwiastka średniego błędu kwadratowego predykcji czasu kolejnego zdarzenia przy wybranych metodach estymacji parametrów procesu MGP. Pogrubieniem zaznaczono najmniejszą wartość  $\widehat{\text{RMSE}}$  dla danego zestawu parametrów i liczby  $n$  skoków procesu

$n$	$\varrho$	$\beta$	$\kappa$	$\bar{t}_{n+1}$	NW	BD	GD
15	0.6	0.01	0.75	18.4	(0.365) 1.309	(0.238) <b>1.296</b> [-1.3%]	(0.262) 1.312 [-0.1%]
40				41.6	(0.141) 0.971	(0.085) <b>0.968</b> [-0.3%]	(0.098) 0.974 [0.2%]
15	0.6	0.01	1	23.4	(0.465) 1.380	(0.338) <b>1.359</b> [-1.6%]	(0.363) 1.359 [-1.6%]
40				52.4	(0.089) <b>0.989</b>	(0.036) 0.989 [0.0%]	(0.050) 0.991 [0.3%]
15	0.6	0.01	2	43	(0.413) 1.732	(0.278) <b>1.716</b> [-0.9%]	(0.328) 1.736 [0.2%]
40				86.1	(0.058) <b>1.058</b>	(0.018) 1.061 [0.2%]	(0.010) 1.074 [1.5%]
15	1.2	0.05	0.75	8.2	(0.135) 0.521	(0.078) <b>0.515</b> [-1.2%]	(0.088) 0.520 [-0.2%]
40				16.4	(0.018) 0.303	(-0.001) 0.304 [0.2%]	(0.001) 0.306 [0.9%]
15	1.2	0.05	1	10.2	(0.160) 0.552	(0.104) <b>0.545</b> [-1.5%]	(0.116) 0.551 [-0.3%]
40				19.8	(0.022) <b>0.325</b>	(0.005) 0.327 [0.5%]	(0.002) 0.328 [0.9%]
15	1.2	0.05	2	17	(0.089) <b>0.571</b>	(0.043) 0.572 [0.1%]	(0.047) 0.573 [0.4%]
40				29.6	(0.009) <b>0.277</b>	(0.000) 0.277 [0.3%]	(-0.005) 0.282 [2.0%]
15	1.2	0.1	0.75	6.9	(0.101) 0.393	(0.058) <b>0.393</b> [-0.2%]	(0.064) 0.393 [-0.1%]
40				12.7	(0.010) <b>0.204</b>	(-0.003) 0.206 [0.8%]	(-0.005) 0.207 [1.1%]
15	1.8	0.1	0.75	5	(0.086) 0.299	(0.053) <b>0.294</b> [-1.8%]	(0.057) 0.295 [-1.3%]
40				9.9	(0.009) <b>0.181</b>	(-0.002) 0.182 [0.6%]	(-0.001) 0.183 [1.1%]
15	1.8	0.1	1	6.3	(0.084) 0.332	(0.051) <b>0.327</b> [-0.9%]	(0.054) 0.329 [-0.4%]
40				11.8	(0.008) <b>0.174</b>	(-0.001) 0.174 [0.5%]	(-0.003) 0.176 [1.6%]
15	1.8	0.1	2	10.2	(0.031) <b>0.314</b>	(0.004) 0.316 [0.6%]	(0.004) 0.322 [2.6%]
40				17.1	(0.001) <b>0.144</b>	(-0.004) 0.145 [0.3%]	(-0.005) 0.146 [1.3%]
15	4	0.1	0.75	2.6	(0.049) 0.167	(0.030) <b>0.165</b> [-1.5%]	(0.032) 0.166 [-0.8%]
40				5.7	(0.017) 0.126	(0.010) <b>0.126</b> [-0.3%]	(0.011) 0.127 [0.4%]
15	4	0.2	0.75	2.4	(0.034) 0.147	(0.019) <b>0.147</b> [-0.5%]	(0.021) 0.147 [0.1%]
40				4.6	(0.003) <b>0.086</b>	(-0.002) 0.086 [0.4%]	(-0.003) 0.087 [1.0%]
15	4	0.2	1	2.9	(0.040) 0.155	(0.024) <b>0.154</b> [-1.0%]	(0.026) 0.155 [-0.4%]
40				5.5	(0.002) <b>0.080</b>	(-0.003) 0.081 [0.7%]	(-0.003) 0.081 [0.9%]
15	4	0.2	2	4.8	(0.011) <b>0.142</b>	(-0.002) 0.144 [1.0%]	(-0.002) 0.146 [2.4%]
40				8.1	(0.006) <b>0.076</b>	(0.004) 0.076 [0.3%]	(0.003) 0.076 [0.8%]



## Rozdział 5

# Analiza danych rzeczywistych

W poniższym rozdziale przedstawiamy analizę dwóch zbiorów danych rzeczywistych. Dla każdego zbioru danych, jeżeli była taka możliwość, obliczyliśmy wartości estymatorów parametrów procesu MPLP lub MGP, metodami podanymi w tabeli 4.1 (oznaczenia zgodne z rozdziałem 4). Ponadto, korzystając z twierdzenia 2.1.2 oraz 2.2.4, wyznaczyliśmy realizacje asymptotycznych punktowo przedziałów ufności, na poziomie ufności 0.95, dla parametrów przyjętego modelu. Realizacje te dla ustalonego parametru  $\theta$  rozważanego procesu, zostały wyznaczone zgodnie ze wzorem

$$\left[ \hat{\theta} - q_{0.975} \frac{\hat{\sigma}}{h(n)}, \hat{\theta} + q_{0.975} \frac{\hat{\sigma}}{h(n)} \right],$$

gdzie  $\hat{\theta}$  jest wartością estymatora NW parametru  $\theta$ ,  $\hat{\sigma}^2$  – oszacowaniem wariancji asymptotycznego rozkładu estymatora NW, uzyskanym przez zastąpienie niezanych wartości parametrów ich oszacowaniami NW we wzorze na waraincje podaną w twierdzeniu 2.1.2 (w przypadku procesu MPLP) lub 2.2.4 (w przypadku procesu MGP),  $q_{0.975}$  oznacza kwantyl rzędu 0.975 standardowego rozkładu normalnego, a  $h(n)$  jest współczynnikiem normującym, przyjmującym wartość  $\sqrt{n}$  dla parametrów  $\beta$  i  $\kappa$  obydwu rozważanych procesów oraz  $(\log n)^{-1}\sqrt{n}$  w przypadku parametru  $\alpha$  procesu MPLP i parametru  $\varrho$  procesu MGP.

Obliczyliśmy również (zgodnie ze wzorami (4.2) oraz (4.3)) wartości predyktorów momentu wystąpienia kolejnego zdarzenia na podstawie otrzymanych oszacowań parametrów procesów.

Dwa zbiory danych, które w niniejszym rozdziale poddaliśmy analizie, były już analizowane w literaturze (zob np. [10], [36], Hurtado [15]) przy założeniu, że są realizacjami procesu PLP – szczególnego przypadku procesu MPLP i szczególnego przypadku procesu IGP. Powstaje pytanie, czy model MPLP ("nadmodel" modelu PLP) jest właściwy i czy nie lepszym modelem byłby np. model MGP. W związku z tym, dokonaliśmy wyboru modelu pomiędzy modelem procesu MPLP a MGP, przyjmując za kryterium wyboru kryterium informacyjne Akaikego [1], oznaczane w literaturze przez AIC (AIC - ang. *Akaike Information Criterion*). Zwróćmy uwagę, że tzw. kara za wymiar modelu w kryterium AIC (równa  $2k$ , gdzie  $k$  jest liczbą niezanych parametrów modelu) została wyznaczona przez autora przy założeniu niezależności obserwowalnych zmiennych losowych. Oczywiście w rozpatrywanych modelach założenie to nie jest spełnione, ale w związku z tym, że porównujemy modele o tej samej

liczbie parametrów, kara za wymiar modelu nie jest w rozpatrywanym przypadku problematyczna.

Kolejnym problemem, po wyborze modelu, jest wybór metody estymacji jego parametrów. Chociaż symulacje komputerowe, z których wnioski zamieściliśmy w poprzednim rozdziale, pozwoliły nam na ograniczenie zbioru rozważanych metod estymacji z dziewięciu do trzech, to trudno jest jednoznacznie wskazać metodę estymacji (jedną z trzech), którą powinniśmy zastosować w praktyce. W związku z tym, zaproponowaliśmy pewną metodę graficzną sprawdzania, czy oszacowany model jest dobrze dopasowany do danych. Metoda ta opiera się na własności procesu IGP (zob. definicja 1.2.6). Mianowicie, zmienne losowe

$$X_i = \Lambda(T_i) - \Lambda(T_{i-1}), \quad (5.1)$$

mają rozkład  $\mathcal{G}(\kappa, 1)$ . W celu wyboru odpowiedniej metody estymacji parametrów dla danego procesu, porównaliśmy dopasowanie dystrybuanty empirycznej wyznaczonej w oparciu o realizację  $\hat{x}_i = \hat{\Lambda}(t_i) - \hat{\Lambda}(t_{i-1})$ , gdzie  $\hat{\Lambda}(\cdot)$  jest oszacowaniem funkcji trendu, wyznaczonym w oparciu o rozważaną metodę estymacji, z dystrybuantą rozkładu gamma  $\mathcal{G}(\hat{\kappa}, 1)$ , gdzie  $\hat{\kappa}$  jest oszacowaniem parametru  $\kappa$ , wyznaczonym w oparciu o rozważaną metodę estymacji.

## 5.1 Generator lotniczy

Dane  $\{10, 55, 166, 205, 341, 488, 567, 731, 1308, 2050, 2453, 3115, 4017, 4596\}$  przedstawiają 14 kolejnych awarii generatora lotniczego, liczonych w roboczogodzinach od momentu uruchomienia. Pierwszy raz zostały przedstawione w pracy Duana [10]. Zbiór był analizowany m.in. w pracach Rigdon i Basu [36] i Hurtado [15].

Przyjeliśmy, że rozpatrywane dane są realizacją procesu MPLP. Dla procesu MGP, zgodnie z twierdzeniem 2.2.1 i faktami 3.2.2, 3.3.1, nie było możliwe wyznaczenie dodatniej wartości żadnego z rozpatrywanych w pracy estymatorów parametru  $\beta$ , a stąd w konsekwencji, wyznaczenie wartości AIC. Analizy przeprowadziliśmy przy założeniu, że obserwujemy system do momentu wystąpienia 13. zdarzenia w 4017. godzinie pracy generatora. Moment wystąpienia 14. awarii wykorzystaliśmy do zbadania precyzji predykcji, otrzymanych na podstawie uzyskanych różnymi metodami oszacowań parametrów procesu MPLP.

Tabela 5.1: Wartości estymatorów parametrów procesu MPLP wyznaczone na podstawie danych dotyczących awarii generatora lotniczego

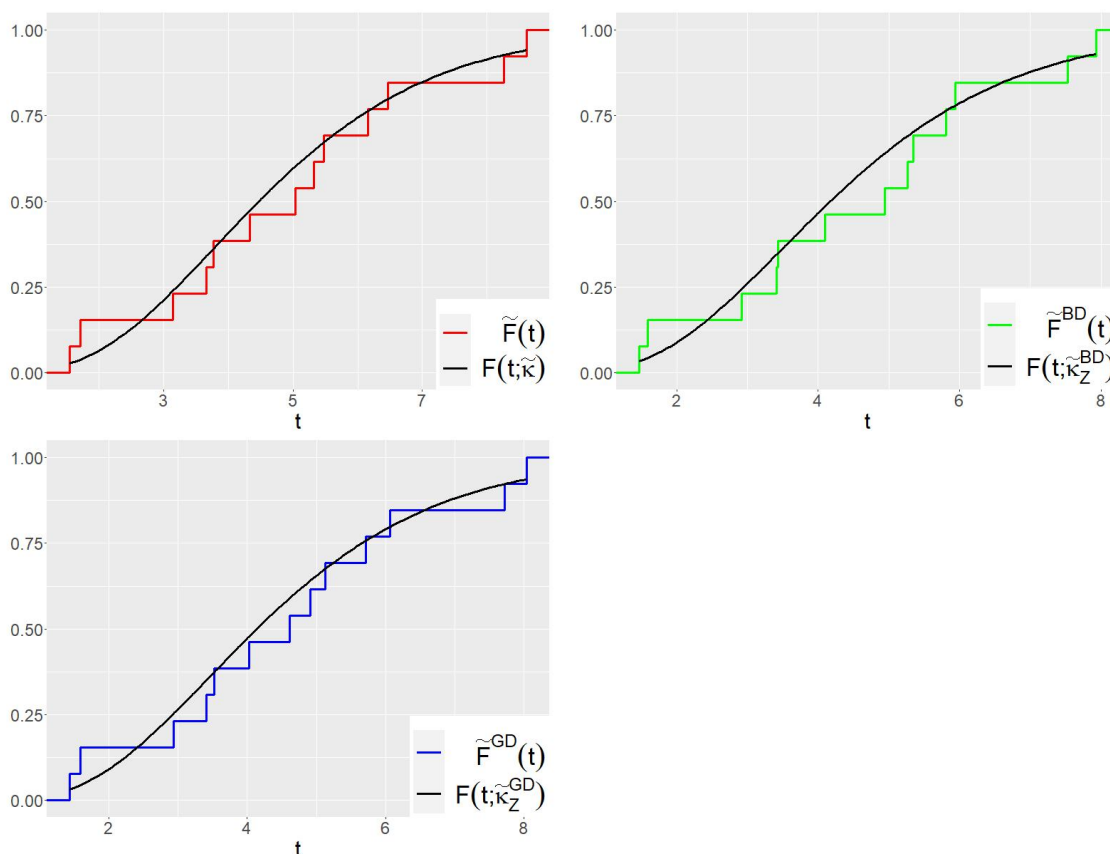
metoda	$\alpha$	$\beta$	$\kappa$	$t_{14}$	$\widetilde{t}_{14}$
NW	1.904	0.423	4.801		4773.2
BD	2.116	0.402	4.500	4596	4812.4
GD	1.732	0.425	4.470		4768.0

W tabeli 5.1 przedstawiliśmy oszacowania parametrów procesu MPLP wyznaczone w oparciu o metodę NW i metody alternatywne oraz uzyskane na ich podstawie wartości predyktorów momentu wystąpienia kolejnej awarii. Wartości estymatorów są

Tabela 5.2: Realizacje 95% przedziałów ufności dla wartości nieznanych parametrów modelu MPLP, uzyskane na podstawie własności asymptotycznych estymatorów NW

Parametr	Oszacowanie NW	95% przedział ufności	
		Dolna granica	Górna granica
$\varrho$	1.904	0.692	3.116
$\beta$	0.423	0.318	0.527
$\kappa$	4.801	1.231	8.371

do siebie dość zbliżone, a wszystkie wartości predyktorów przeszacowują prawdziwy moment wystąpienia 14. awarii. Wyznaczone wartości wszystkich estymatorów parametru  $\kappa$  są większe niż 1, więc można przyjąć, że rozpatrywany system jest w lepszym stanie po awarii i jego naprawie niż tuż przed awarią.



Rysunek 5.1: Graficzna metoda wyboru metody estymacji parametrów procesu MPLP dla danych dotyczących awarii generatora lotniczego

W tabeli 5.2 zamieściliśmy wartości dolnych i górnych granic realizacji asymptotycznych punktowo przedziałów ufności dla nieznanych parametrów modelu MPLP, obliczonych na podstawie estymatorów NW. Warto zauważyć, że dolna granica realizacji przedziału ufności dla parametru  $\kappa$  jest większa od 1.

Na rysunku 5.1 przedstawiliśmy porównanie dopasowania dystrybuanty empirycznej wyznaczonej w oparciu o realizacje  $\hat{x}_i = \hat{\Lambda}(t_i) - \hat{\Lambda}(t_{i-1})$ , gdzie  $\hat{\Lambda}(\cdot)$  jest osza-

cowaniem funkcji trendu, wyznaczonym w oparciu o rozważaną metodę estymacji, z dystrybuantą rozkładu gamma  $\mathcal{G}(\hat{\kappa}, 1)$ , gdzie  $\hat{\kappa}$  jest oszacowaniem parametru  $\kappa$ , wyznaczonym w oparciu o rozważaną metodę estymacji. Na podstawie przedstawionej graficznej metody wyboru metody estymacji, uznaliśmy, że w przypadku rozpatrywanych danych, powinniśmy wykorzystać metodę GD. Jednak należy zauważyć, że wykres dla procesu MPLP( $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\kappa}$ ) jest bardzo podobny do wykresu odpowiadającemu modelowi MPLP( $\tilde{\alpha}_Z^{GD}, \tilde{\beta}^{GD}, \tilde{\kappa}_Z^{GD}$ ).

## 5.2 Silnik napędowy

Jako drugi przykład zastosowania metod estymacji opisanych w poprzednich rozdziałach, rozważyliśmy analizę danych dotyczących nieplanowanych czynności konserwacyjnych głównego silnika napędowego jednostki USS Halfbeak (zobacz [3]). Dane zawierają informacje o 71 momentach awarii, przedstawionych w roboczogodzinach. Ze względów numerycznych do obliczeń przyjęliśmy momenty awarii w tysiącach roboczogodzin:

{1.382, 2.990, 4.124, 6.827, 7.472, 7.567, 8.845, 9.450, 9.794, 10.848, 11.993, 12.300, 15.413, 16.497, 17.352, 17.632, 18.122, 19.067, 19.172, 19.299, 19.360, 19.686, 19.940, 19.944, 20.121, 20.132, 20.431, 20.525, 21.057, 21.061, 21.309, 21.310, 21.378, 21.391, 21.456, 21.461, 21.603, 21.658, 21.688, 21.750, 21.815, 21.820, 21.822, 21.888, 21.930, 21.943, 21.946, 22.181, 22.311, 22.634, 22.635, 22.669, 22.691, 22.846, 22.947, 23.149, 23.305, 23.491, 23.526, 23.774, 23.791, 23.822, 24.006, 24.286, 25.000, 25.010, 25.048, 25.268, 25.400, 25.500, 25.518}

Powyższe dane były analizowane w pracy Rigodna [35], w której autor przyjął, że dane są realizacją proces PLP( $\alpha, \beta$ ) i parametry tego procesu oszacował metodą NW.

Przeprowadzone poniżej analizy wykonaliśmy przy założeniu, że obserwowaliśmy system do momentu wystąpienia 70. zdarzenia, które miało miejsce w 25500. roboczogodzinie. Moment 71. awarii wykorzystaliśmy do zbadania precyzji predykcji, otrzymanych na podstawie uzyskanych różnymi metodami oszacowań parametrów odpowiednich procesów.

Tabela 5.3: Wartości estymatorów parametrów procesu MPLP i MGP wyznaczone na podstawie danych rzeczywistych dotyczących awarii głównego silnika napędowego jednostki USS Halfbeak

		$\alpha$	$\beta$	$\kappa$	$t_{71}$	$\tilde{t}_{71}$
MPLP	NW	0.0046	2.849	0.661		25.6257
	BD	0.0017	3.158	0.645	25.518	25.6134
	GD	0.0003	3.682	0.618		25.5973
		$\varrho$	$\beta$	$\kappa$	$t_{71}$	$\widehat{t}_{71}$
MGP	NW	0.1664	0.152	0.724		25.5906
	BD	0.2125	0.138	0.717	25.518	25.5984
	GD	0.1089	0.172	0.709		25.5806



W tabeli 5.3 przedstawiliśmy oszacowania parametrów MPLP i MGP, wyznaczone w oparciu o metodę NW i metody alternatywne oraz uzyskane na ich podstawie wartości predyktorów momentu wystąpienia kolejnego zdarzenia. Za wyjątkiem wartości estymatorów parametru  $\kappa$ , oszacowania pozostałych parametrów różnią się dość znacznie. Pomimo różnic w wartościach estymatorów, uzyskane wartości predyktorów, przy tak długim procesie są bardzo zbliżone to rzeczywistego momentu 71. awarii. Wyznaczone wartości wszystkich estymatorów parametru  $\kappa$  są mniejsze od 1, więc można przyjąć, że rozpatrywany system jest w gorszym stanie po awarii i jego naprawie niż tuż przed awarią.

Tabela 5.4: Realizacje 95% przedziałów ufności dla wartości nieznanymi parametrów modelu MGP, uzyskane na podstawie własności asymptotycznych estymatorów NW

Parametr	Oszacowanie NW	95% przedział ufności	
		Dolna granica	Górna granica
$\varrho$	0.1664	0.000	0.360
$\beta$	0.152	0.110	0.193
$\kappa$	0.724	0.521	0.928

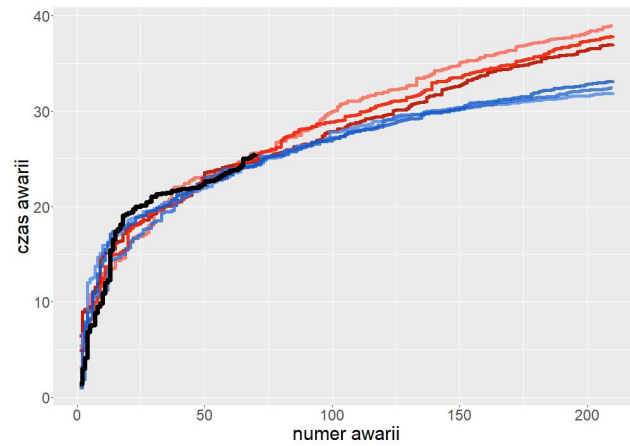
Warto zwrócić uwagę na przykładowe realizacje procesów MPLP i MGP przedstawione na wykresie 5.2 (procesy wygenerowane na podstawie parametrów oszacowanych metodą NW, wartości podane w tabeli 5.3). Oba modele dość dobrze dopasowują się do danych rzeczywistych, a wartości predyktorów momentu kolejnego zdarzenia występującego bezpośrednio po okresie służącym do estymacji parametrów odpowiednich procesów są do siebie bardzo zbliżone. Ponadto, żeby dodatkowo zobrazować różnice pomiędzy dopasowanymi metodą NW procesami MGP i MPLP, skorzystamy ze wzoru na przybliżenie oczekiwanej liczby zdarzeń do momentu  $t$  (zobacz [38]).

$$E(N(t)) \approx \frac{\Lambda(t)}{\kappa} + \frac{1 - \kappa}{2\kappa},$$

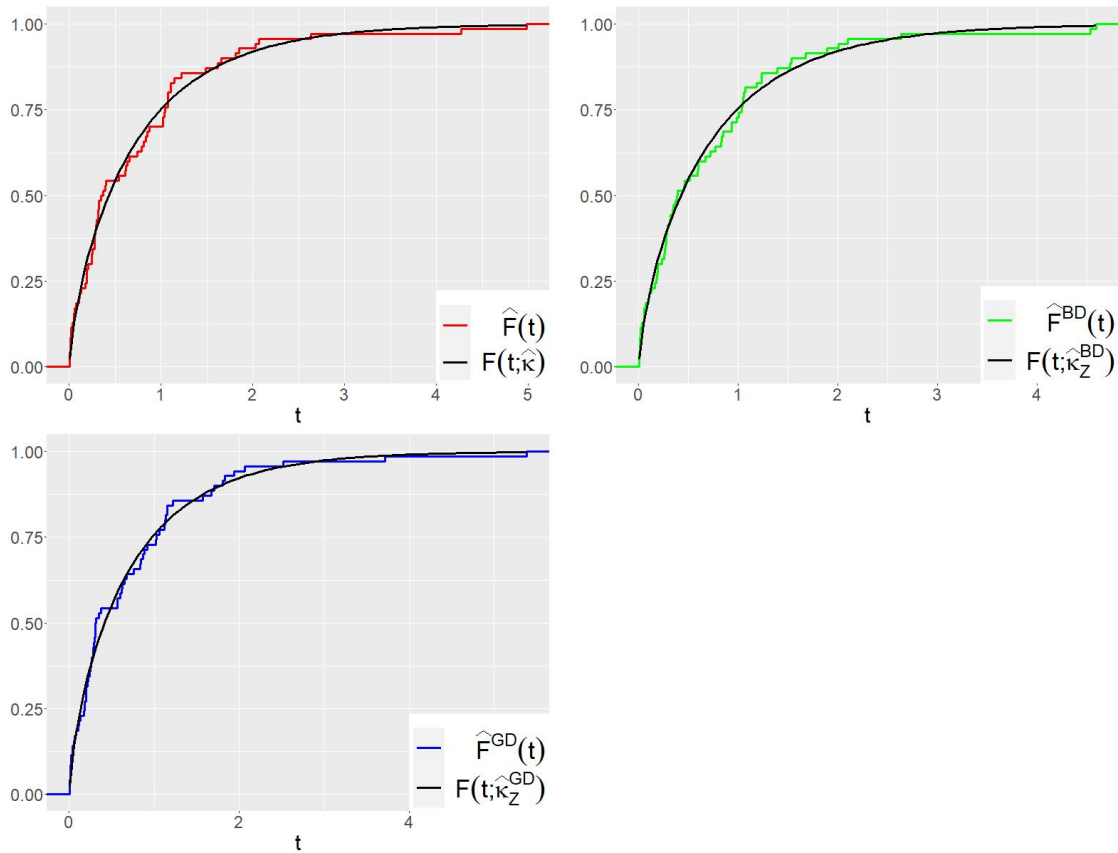
gdzie  $\{N(t), t \geq 0\}$  jest procesem liczącym, który odpowiada procesowi IGP. Przyjmując  $t = 50$  dla MPLP spodziewamy się wystąpienia w przybliżeniu 483 zdarzeń, a dla procesu MGP aż 2965.

Uzyskane wartości AIC odpowiednio dla procesu MPLP i MGP, rozpatrując estymatory uzyskane metodą NW, wynoszą odpowiednio  $-61.0063$  oraz  $-65.4373$ . Zatem, zgodnie z przyjętym kryterium, proces MGP jest modelem lepszym z dwóch rozpatrywanych.

Na rysunku 5.3 przedstawiliśmy porównanie dopasowania dystrybuanty empirycznej wyznaczonej w oparciu o realizacje  $\hat{x}_i = \hat{\Lambda}(t_i) - \hat{\Lambda}(t_{i-1})$ , gdzie  $\hat{\Lambda}(\cdot)$  jest oszacowaniem funkcji trendu, wyznaczonym w oparciu o rozważaną metodę estymacji, z dystrybuantą rozkładu gamma  $\mathcal{G}(\hat{\kappa}, 1)$ , gdzie  $\hat{\kappa}$  jest oszacowaniem parametru  $\kappa$ , wyznaczonym w oparciu o rozważaną metodę estymacji. Na podstawie przedstawionej graficznej metody wyboru metody estymacji, uznaliśmy, że w przypadku rozpatrywanych danych, powinniśmy wykorzystać metodę GD.



Rysunek 5.2: Czasy awarii silnika napędowego jednostki USS Halfbeak (czarna linia) oraz przykładowe realizacje procesów MPLP (czerwone linie) i procesów MGP (niebieskie linie), których parametry zostały oszacowane metodą NW. Dokładne wartości oszacowań parametrów podane są w tabeli 5.3



Rysunek 5.3: Graficzna metoda wyboru metody estymacji parametrów procesu MGP dla danych dotyczących awarii głównego silnika napędowego jednostki USS Halfbeak

# Rozdział 6

## Dowody twierdzeń

W niniejszym rozdziale korzystamy z oznaczeń wprowadzonych w rozdziale 2.2. Ponadto, zbieżność według rozkładu ciągu zmiennych losowych  $(X_n)_{n \geq 1}$  do zmiennej losowej  $X$ , gdy  $n \rightarrow \infty$ , będziemy oznaczać następująco  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X$  lub krótko  $X_n \xrightarrow{d} X$ , natomiast zbieżność według prawdopodobieństwa –  $X_n \xrightarrow{p} X$ . Jeżeli ciąg zmiennych losowych  $X_n$  o dystrybuantach  $F_n$  jest taki, że dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieją takie  $M_\varepsilon$  i  $N_\varepsilon$ , że dla każdego  $n > N_\varepsilon$ ,  $F_n(M_\varepsilon) - F_n(-M_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ , to ciąg  $(X_n)_{n \geq 1}$  jest ograniczony według prawdopodobieństwa i będziemy tę własność oznaczać  $X_n = O_p(1)$ . Symbolu  $X_n = o_p(Y_n)$  będziemy używać dla oznaczenia, że ciąg zmiennych losowych  $X_n/Y_n \xrightarrow{p} 0$ , gdy  $n \rightarrow \infty$ .

### 6.1 Dowód twierdzenia 2.2.2

Dowód twierdzenia rozpoczynamy od sformułowania, a następnie udowodnienia kilku lematów. Lematy te będą również wykorzystane w dowodach twierdzeń 2.2.3 i 2.2.4. Dla uproszczenia notacji zdefiniujmy następujące zmienne losowe

$$U_{1n} = n^{-1/2} \left[ \sum_{i=1}^n \log \frac{\exp(\beta_0 T_n)}{\exp(\beta_0 T_i)} - n \right], \quad (6.1)$$

$$U_{2n} = n^{-1/2} \left\{ \frac{\varrho_0}{\beta_0} [\exp(\beta_0 T_n) - 1] - n\kappa_0 \right\}, \quad (6.2)$$

$$U_{3n} = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \left\{ \log \left[ \frac{\varrho_0}{\beta_0} [\exp(\beta_0 T_i) - \exp(\beta_0 T_{i-1})] \right] - \psi(\kappa_0) \right\} \quad (6.3)$$

oraz

$$Y_i = \frac{\varrho_0 \exp(\beta_0 T_i)}{i\kappa_0}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.4)$$

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i. \quad (6.5)$$

Poniższy lemat dotyczy własności zmiennych losowych  $Y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , oraz ich funkcji oraz zmiennej losowej  $U_{3n}$ .

**Lemat 6.1.1.** Niech  $Y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\bar{Y}_n$  i  $U_{3n}$  będą zmiennymi losowymi określonymi odpowiednio wzorami (6.4), (6.5) i (6.3). Wówczas

- (i)  $n^{1/2}(Y_n - 1) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \kappa_0^{-1})$ ,
- (ii)  $n^{1/2}(Y_n - \bar{Y}_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \kappa_0^{-1})$ ,
- (iii)  $U_{3n}$  i  $n^{1/2}(Y_n - \bar{Y}_n)$  są nieskorelowane,
- (iv)  $n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \log \left( \frac{Y_n}{Y_i} \right) = n^{1/2}(Y_n - \bar{Y}_n) + o_P(1)$ .

*Dowód.* (i) Zauważmy, że

$$Y_n = \frac{1}{n\kappa_0} \left( \sum_{i=1}^n X_i + \frac{\varrho_0}{\beta_0} \right), \quad (6.6)$$

gdzie

$$X_i = \Lambda(T_i) - \Lambda(T_{i-1}) = \frac{\varrho_0}{\beta_0} [\exp(\beta_0 T_i) - \exp(\beta_0 T_{i-1})], \quad i = 1, \dots, n.$$

Z własności procesu MGP, zmienne losowe  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , są niezależne oraz o jednakowym rozkładzie gamma  $\mathcal{G}(\kappa_0, 1)$ . Ze wzoru (6.6)

$$n^{1/2}(Y_n - 1) = \frac{1}{\sqrt{\kappa_0}} \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\kappa_0}{\sqrt{n\kappa_0}} + \frac{\varrho_0}{\sqrt{n\kappa_0}\beta_0}$$

i teza wynika z centralnego twierdzenia granicznego Lindeberga-Fellera i twierdzenia Slutskiego.

(ii) Pokażemy, że ciąg zmiennych losowych

$$K_n = -n^{1/2}(Y_n - \bar{Y}_n) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n (Y_i - Y_n) = n^{-1/2} \left( \sum_{i=1}^n Y_i - nY_n \right)$$

zbiega według rozkładu do zmiennej o rozkładzie normalnym o wartości oczekiwanej zero i wariancji  $1/\kappa_0$ . Korzystając z (6.6) oraz z tego, że

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n b_i a_j, \quad (6.7)$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n Y_i &= \kappa_0^{-1} \sum_{i=1}^n i^{-1} \left[ \frac{\varrho_0}{\beta_0} + \sum_{j=1}^n X_j \right] = \kappa_0^{-1} \sum_{i=1}^n X_i \sum_{j=i}^n j^{-1} + \frac{\varrho_0}{\beta_0 \kappa_0} \sum_{i=1}^n i^{-1}, \\ nY_n &= \kappa_0^{-1} \sum_{i=1}^n X_i + \frac{\varrho_0}{n\beta_0 \kappa_0} = \kappa_0^{-1} \sum_{i=1}^n X_i \sum_{j=i}^n (n-i-1)^{-1} + \frac{\varrho_0}{n\beta_0 \kappa_0}. \end{aligned}$$

Stąd

$$K_n = \kappa_0^{-1} n^{-1/2} \sum_{i=1}^n X_i e_{in} + n^{-1/2} \frac{\varrho_0}{\beta_0 \kappa_0} \sum_{i=1}^{n-1} i^{-1}, \quad (6.8)$$

gdzie

$$e_{in} = \sum_{j=i}^n [j^{-1} - (n - i - 1)^{-1}], \quad (6.9)$$

gdy  $n \geq 2$  i  $K_1 = 0$ . Oznaczmy pierwszy i drugi składnik wyrażenia (6.8) odpowiednio przez  $K_{n1}$  i  $K_{n2}$ , czyli

$$K_{n1} = \kappa_0^{-1} n^{-1/2} \sum_{i=1}^n X_i e_{in},$$

$$K_{n2} = n^{-1/2} \frac{\varrho_0}{\beta_0 \kappa_0} \sum_{i=1}^{n-1} i^{-1}.$$

Pokażemy, że ciąg zmiennych losowych  $K_{n1}$  zbiega według rozkładu do zmiennej losowej o rozkładzie normalnym i ciąg  $K_{n2}$  zbiega do zera, gdy  $n$  dąży do nieskończoności. Pierwszą z powyższych zbieżności wykażemy korzystając z centralnego twierdzenia granicznego Lapunowa. Korzystając z tego, że  $E_{\vartheta_0}(X_i) = \kappa_0$ ,  $\text{Var}_{\vartheta_0}(X_i) = \kappa_0$ , zmienne losowe  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , są niezależne oraz ze wzoru (6.7) mamy, że

$$E_{\vartheta_0}(K_{n1}) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n e_{in} = 0,$$

$$\text{Var}_{\vartheta_0}(K_{n1}) = \frac{1}{n\kappa_0} \sum_{i=1}^n e_{in}^2.$$

Podstawiając za  $e_{in}$  sumę określoną wzorem (6.9) mamy, że gdy  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\text{Var}_{\vartheta_0}(K_{n1}) \rightarrow \kappa_0^{-1} \int_0^1 \left[ \int_u^1 \left( \frac{1}{v} - \frac{1}{1-u} \right) dv \right]^2 du = \frac{1}{\kappa_0}.$$

Ponadto, spełniony jest warunek Lapunowa, ponieważ

$$\kappa_0^{-4} n^{-2} \sum_{i=1}^n E_{\vartheta_0}(X_i)^4 e_{in}^4 = \kappa_0^{-3} (\kappa_0^3 + 6\kappa_0^2 + 11\kappa_0 + 6) n^{-2} \sum_{i=1}^n e_{in}^4$$

oraz

$$\kappa_0^{-4} n^{-2} \sum_{i=1}^n E_{\vartheta_0}(X_i)^4 e_{in}^4 \sim n^{-1} \kappa_0^{-3} (\kappa_0^3 + 6\kappa_0^2 + 11\kappa_0 + 6) \int_0^1 \left[ \int_u^1 \left( \frac{1}{v} - \frac{1}{1-u} \right) dv \right]^4 du$$

zbiega do zera, gdy  $n$  dąży do nieskończoności. Zatem, z centralnego twierdzenia granicznego Lapunowa mamy, że ciąg zmiennych losowych  $K_{n1}$  zbiega według rozkładu do zmiennej losowej o rozkładzie normalnym o wartości oczekiwanej zero i wariancji  $1/\kappa_0$ .

Wyrazy ciągu  $(K_{n2})$ , dla  $n \geq 2$ , można przedstawić następująco

$$K_{n2} = n^{-1/2} \frac{\varrho_0}{\beta_0 \kappa_0} H_{n-1},$$

gdzie  $H_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , są liczbami harmonicznymi. Z własności liczb harmonicznymi mamy, że  $K_{n2} \rightarrow 0$ , gdy  $n \rightarrow \infty$ , co kończy dowód punktu (ii).

(iii) Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \text{Cov}_{\vartheta_0}[U_{3n}, n^{1/2}(Y_n - \bar{Y}_n)] &= \text{Cov}_{\vartheta_0}\left[n^{-1/2} \sum_{i=1}^n (\log X_i - \psi(\kappa_0)), \right. \\ &\quad \left. n^{-1/2} \kappa_0^{-1} \sum_{i=1}^n X_i e_{in} + n^{-1/2} \frac{\varrho_0}{\beta_0 \kappa_0} \sum_{i=1}^{n-1} i^{-1}\right] \\ &= \text{Cov}_{\vartheta_0}\left[n^{-1/2} \sum_{i=1}^n (\log X_i - \psi(\kappa_0)), n^{-1/2} \kappa_0^{-1} \sum_{i=1}^n X_i e_{in}\right] \\ &= - (n\kappa_0)^{-1} \sum_{i=1}^n \text{Cov}_{\vartheta_0}[(X_i - \kappa_0), (\log X_i - \psi(\kappa_0))] e_{in} \\ &= - (n\kappa_0)^{-1} \sum_{i=1}^n e_{in} = 0, \end{aligned}$$

czyli zmienne losowe  $U_{3n}$ ,  $n^{1/2}(Y_n - \bar{Y}_n)$  są nieskorelowane.

(iv) Wystarczy pokazać, że

$$n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{Y_n}{Y_i}\right) - n^{1/2}(Y_n - \bar{Y}_n) = o_P(1).$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{Y_n}{Y_i}\right) - n^{1/2}(Y_n - \bar{Y}_n) &= n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \left[\log\left(\frac{Y_n}{Y_i}\right) - (Y_n - Y_i)\right] \\ &=: n^{-1/2} \sum_{i=1}^n G_{in}. \end{aligned}$$

Z nierówności  $\frac{x-1}{x} \leq \log x \leq x-1$  dla  $x > 0$  mamy

$$(1/Y_n - 1)n^{-1/2} \sum_{i=1}^n (Y_n - Y_i) \leq n^{-1/2} \sum_{i=1}^n G_{in} \leq n^{-1/2} \sum_{i=1}^n (Y_n - Y_i)(1/Y_i - 1). \quad (6.10)$$

Korzystając z twierdzenia Słuckiego oraz zbieżności wykazanych w punkcie (i) oraz (ii), możemy wywnioskować, że ograniczenie dolne w (6.10) jest  $o_P(1)$ . Następnie udowodnimy, że ograniczenie górne w (6.10), które można przedstawić następująco

$$n^{1/2}(Y_n - 1) \left[ n^{-1} \sum_{i=1}^n (1/Y_i - 1) \right] - n^{-1/2} \sum_{i=1}^n (Y_i - 1)(1/Y_i - 1), \quad (6.11)$$

jest również  $o_P(1)$ . Oznaczmy pierwszy i drugi składnik wyrażenia (6.11) odpowiednio przez  $B_1$  i  $B_2$ , czyli

$$B_1 = n^{1/2}(Y_n - 1) \left[ n^{-1} \sum_{i=1}^n (1/Y_i - 1) \right],$$

$$B_2 = -n^{-1/2} \sum_{i=1}^n (Y_i - 1)(1/Y_i - 1).$$

Na podstawie podpunktu (i) tego lematu mamy, że  $B_1 = o_P(1)$ . Pokażemy, że również  $B_2 = o_P(1)$ . Korzystając z nierówności Cauchy'ego-Schwarza,

$$B_2^2 \leq \left[ \frac{\log n}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{Y_i} - 1 \right)^2 \right] \frac{1}{\log n} \sum_{i=1}^n (Y_i - 1)^2.$$

Zauważmy, że

$$\frac{\log n}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{Y_i} - 1 \right)^2 \leq \frac{\log n}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{\tilde{Y}_i} - 1 \right)^2,$$

gdzie

$$\tilde{Y}_i = \frac{\varrho_0}{\beta_0} \frac{[\exp(\beta_0 T_i) - 1]}{i\kappa_0}.$$

Ponadto

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{\log n}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{\tilde{Y}_i} - 1 \right)^2 \right] &\leq \frac{\log n}{n} \sum_{i=1}^n E \left( \frac{1}{\tilde{Y}_i} - 1 \right)^2 \\ &= \frac{\log n}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i\kappa_0 + 2}{(i\kappa_0 - 1)(i\kappa_0 - 2)} \\ &\leq \frac{\log n}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\kappa_0 + 2}{i(\kappa_0 - 1)(\kappa_0 - 2)} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

gdy  $n$  dąży do nieskończoności. Z nierówności Markowa otrzymujemy

$$\frac{\log n}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{\tilde{Y}_i} - 1 \right)^2 = o_P(1).$$

W celu wykazania, że  $(\log n)^{-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - 1)^2 = O_P(1)$ , rozważmy

$$\begin{aligned} E_{\vartheta_0} \left[ \frac{1}{\log n} \sum_{i=1}^n (Y_i - 1)^2 \right] &= \frac{1}{\log n} \sum_{i=1}^n \text{Var}_{\vartheta_0}(Y_i) = \frac{1}{\log n} \sum_{i=1}^n \text{Var}_{\vartheta_0} \left( \tilde{Y}_i + \frac{\varrho_0}{i\beta_0\kappa_0} \right) \\ &= \frac{1}{\log n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i\kappa_0} \rightarrow \frac{1}{\kappa_0}. \end{aligned}$$

Zatem  $(\log n)^{-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - 1)^2$  jest  $O_P(1)$ , z czego wynika, że  $B_2 = o_P(1)$  i w konsekwencji, górne ograniczenie na  $n^{-1/2} \sum_{i=1}^n G_{in}$  jest  $o_P(1)$ , co kończy dowód.  $\square$

**Lemat 6.1.2.** Ciąg wektorów losowych  $\mathbf{U}_n = (U_{1n}, U_{2n}, U_{3n})^T$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , zbiega według rozkładu do wektora losowego o wielowymiarowym rozkładzie normalnym o wartości oczekiwanej  $\mu_{\mathbf{U}} = (0, 0, 0)^T$  i macierzy kowariancji

$$\Sigma_{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \kappa_0^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_0 & 1 \\ 0 & 1 & \psi'(\kappa_0) \end{bmatrix}.$$

*Dowód.* Z własności procesu MGP( $\varrho_0, \beta_0, \kappa_0$ ) (definicja 1.2.6), zmienne losowe  $X_i = \Lambda(T_i) - \Lambda(T_{i-1}) = \varrho_0 \beta_0^{-1} [\exp(\beta_0 T_i) - \exp(\beta_0 T_{i-1})]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie gamma  $\mathcal{G}(\kappa_0, 1)$ . Zmienne losowe  $U_{2n}$  i  $U_{3n}$  możemy wyrazić następująco

$$U_{2n} = \sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \kappa_0 \right),$$

$$U_{3n} = \sqrt{n} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log X_i - \psi(\kappa_0) \right].$$

Stąd, korzystając z wielowymiarowego centralnego twierdzenia granicznego, ciąg wektorów losowych  $(U_{2n}, U_{3n})^T$  dąży według rozkładu do wektora losowego o rozkładzie normalnym o wartości oczekiwanej  $(0, 0)^T$  i macierzy kowariancji

$$\begin{bmatrix} \kappa_0 & 1 \\ 1 & \psi'(\kappa_0) \end{bmatrix}.$$

Zmienna losowa  $U_{1n}$  może być wyrażona za pomocą zmiennych  $Y_i$  w następujący sposób

$$U_{1n} = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \log \left( \frac{Y_n}{Y_i} \right) + n^{-1/2} (n \log n - \log n! - n).$$

Korzystając ze wzoru Stirlinga, drugi składnik powyższego wyrażenia jest  $o_P(1)$ . Z własności procesu MGP i Lematu 6.1.1 wynika, że zmienna losowa  $U_{1n}$  jest niezależna od wektora losowego  $(U_{2n}, U_{3n})^T$ . Podpunkt (iv) Lematu 6.1.1 implikuje zbieżność według rozkładu ciągu zmiennych losowych  $U_{1n}$  do zmiennej losowej o rozkładzie  $\mathcal{N}(0, \kappa^{-1})$ , co kończy dowód.  $\square$

**Lemat 6.1.3.** *Niech  $T_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , będą momentami kolejnych skoków procesu MGP( $\varrho_0, \beta_0, \kappa_0$ ). Wówczas*

$$(i) \quad n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\exp(\beta_0 T_{i-1}) \beta_0 (T_i - T_{i-1})}{\exp(\beta_0 T_i) - \exp(\beta_0 T_{i-1})} - 1 \right] = o_P(1),$$

$$(ii) \quad n^{-1} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\exp(\beta_0 T_i) \exp(\beta_0 T_{i-1}) \beta_0^2 (T_i - T_{i-1})^2}{[\exp(\beta_0 T_i) - \exp(\beta_0 T_{i-1})]^2} - 1 \right\} = o_P(1).$$

*Dowód.* (i) Korzystając z nierówności  $\frac{x-1}{x} \leq \log x \leq x-1$  dla  $x > 0$ , gdzie za  $x$  przyjmujemy  $\frac{\exp(\beta_0 T_i)}{\exp(\beta_0 T_{i-1})} > 0$  mamy, że

$$\frac{\exp(\beta_0 T_i) - \exp(\beta_0 T_{i-1})}{\exp(\beta_0 T_i)} \leq \log \frac{\exp(\beta_0 T_i)}{\exp(\beta_0 T_{i-1})} \leq \frac{\exp(\beta_0 T_i) - \exp(\beta_0 T_{i-1})}{\exp(\beta_0 T_{i-1})},$$

czyli

$$\frac{\exp(\beta_0 T_i) - \exp(\beta_0 T_{i-1})}{\exp(\beta_0 T_i)} \leq \beta_0 (T_i - T_{i-1}) \leq \frac{\exp(\beta_0 T_i) - \exp(\beta_0 T_{i-1})}{\exp(\beta_0 T_{i-1})}. \quad (6.12)$$



Po pomnożeniu stron powyższych nierówności (6.12) przez odwrotność wyrażenia po jego prawej stronie, a następnie odjęciu jedynki otrzymujemy

$$\frac{\exp(\beta_0 T_{i-1})}{\exp(\beta_0 T_i)} - 1 \leq \frac{\exp(\beta_0 T_{i-1})\beta_0(T_i - T_{i-1})}{\exp(\beta_0 T_i) - \exp(\beta_0 T_{i-1})} - 1 \leq 0. \quad (6.13)$$

Następnie, korzystając z nierówności  $\frac{x-1}{y-1} \leq \frac{x}{y}$  dla  $x < y$  i  $x, y > 1$ , otrzymujemy

$$\frac{\exp(\beta_0 T_{i-1}) - 1}{\exp(\beta_0 T_i) - 1} - 1 \leq \frac{\exp(\beta_0 T_{i-1})}{\exp(\beta_0 T_i)} - 1. \quad (6.14)$$

Biorąc pod uwagę (6.13) i (6.14) otrzymujemy

$$\begin{aligned} n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\exp(\beta_0 T_{i-1}) - 1}{\exp(\beta_0 T_i) - 1} - 1 \right] \\ \leq n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\exp(\beta_0 T_{i-1})\beta_0(T_i - T_{i-1})}{\exp(\beta_0 T_i) - \exp(\beta_0 T_{i-1})} - 1 \right] \leq 0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Oznaczmy ograniczenie dolne w (6.15) przez  $B_{L1}$ , czyli

$$B_{L1} = n^{-1/2} \sum_{i=2}^n \left[ \frac{\exp(\beta_0 T_{i-1}) - 1}{\exp(\beta_0 T_i) - 1} - 1 \right].$$

Wystarczy pokazać, że  $B_{L1} = o_P(1)$ . Z własności procesu MGP( $\varrho_0, \beta_0, \kappa_0$ ) wiemy, że zmienne losowe

$$V_i = \frac{\Lambda(T_{i-1})}{\Lambda(T_i)} = \frac{\exp(\beta_0 T_{i-1}) - 1}{\exp(\beta_0 T_i) - 1}, \quad i = 2, \dots, n,$$

są niezależne o rozkładzie  $\mathcal{B}(\kappa_0(i-1), \kappa_0)$ . Stąd

$$\begin{aligned} E_{\vartheta_0}(B_{L1}^2) &= \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \text{Var}_{\vartheta_0}(V_i) + \frac{1}{n} \left[ \sum_{i=2}^n (E_{\vartheta_0}(V_i) - 1) \right]^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \frac{i-1}{i^2(i\kappa_0+1)} + \frac{\log^2 n}{n} \left( \frac{1}{\log n} \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} \right) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

gdy  $n$  dąży do nieskończoności, co pociąga za sobą, że  $B_{L1} = o_P(1)$ .

(ii) Ze wzoru (6.12) otrzymujemy

$$\left[ \frac{\exp(\beta_0 T_i) - \exp(\beta_0 T_{i-1})}{\exp(\beta_0 T_i)} \right]^2 \leq \beta_0^2 (T_i - T_{i-1})^2 \leq \left[ \frac{\exp(\beta_0 T_i) - \exp(\beta_0 T_{i-1})}{\exp(\beta_0 T_{i-1})} \right]^2.$$

Po pomnożeniu stron powyższych nierówności przez  $\frac{\exp(\beta_0 T_i) \exp(\beta_0 T_{i-1})}{[\exp(\beta_0 T_i) - \exp(\beta_0 T_{i-1})]^2}$ , a następnie odjęciu jedynki otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\exp(\beta_0 T_{i-1})}{\exp(\beta_0 T_i)} - 1 &\leq \frac{\exp(\beta_0 T_i) \exp(\beta_0 T_{i-1}) \beta_0^2 (T_i - T_{i-1})^2}{[\exp(\beta_0 T_i) - \exp(\beta_0 T_{i-1})]^2} - 1 \\ &\leq \frac{\exp(\beta_0 T_i)}{\exp(\beta_0 T_{i-1})} - 1. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Następnie, korzystając z nierówności  $\frac{x-1}{y-1} \leq \frac{x}{y}$ , dla  $1 < x < y$ , oraz  $\frac{x}{y} \leq \frac{x-1}{y-1}$ , dla  $1 < y < x$ , mamy

$$\frac{\exp(\beta_0 T_{i-1}) - 1}{\exp(\beta_0 T_i) - 1} - 1 \leq \frac{\exp(\beta_0 T_{i-1})}{\exp(\beta_0 T_i)} - 1 \quad (6.17)$$

oraz

$$\frac{\exp(\beta_0 T_i)}{\exp(\beta_0 T_{i-1})} - 1 \leq \frac{\exp(\beta_0 T_i) - 1}{\exp(\beta_0 T_{i-1}) - 1} - 1. \quad (6.18)$$

Biorąc pod uwagę (6.16), (6.17) i (6.18) mamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \left[ \frac{\exp(\beta_0 T_{i-1}) - 1}{\exp(\beta_0 T_i) - 1} - 1 \right] &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \left\{ \frac{\exp(\beta_0 T_i) \exp(\beta_0 T_{i-1}) \beta_0^2 (T_i - T_{i-1})^2}{[\exp(\beta_0 T_i) - \exp(\beta_0 T_{i-1})]^2} - 1 \right\} \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \left[ \frac{\exp(\beta_0 T_i) - 1}{\exp(\beta_0 T_{i-1}) - 1} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Oznaczmy dolne i górne ograniczenie w powyższych nierównościach odpowiednio przez  $B_{L2}$  i  $B_{U2}$ . Na podstawie podpunktu (i) tego lematu mamy, że  $B_{L2}$  jest  $o_P(1)$ . Stąd wystarczy pokazać że  $B_{U2} = o_P(1)$ . Mamy, że

$$\begin{aligned} E_{\vartheta_0}(B_{U2}^2) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^n \text{Var}_{\vartheta_0}(Y_i^{-1}) + \frac{1}{n} \left[ \sum_{i=2}^n (E_{\vartheta_0}(Y_i^{-1}) - 1) \right]^2 \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^n \frac{(i\kappa_0 - 1)\kappa_0}{(i\kappa_0 - \kappa_0 - 1)^2(i\kappa_0 - \kappa_0 - 2)} + \left( \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \frac{\kappa_0}{i\kappa_0 - \kappa_0 - 1} \right)^2 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

gdy  $n$  dąży do nieskończoności, co pociąga za sobą, że  $B_{U2} = o_P(1)$ .  $\square$

Dysponując powyższymi lematami, możemy przejść do dowodu twierdzenia 2.2.2, który opiera się na odpowiednim przedstawieniu elementów macierzy  $C_n(\vartheta_0) = (c_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , tak, żeby można było skorzystać z udowodnionych wcześniej własności występujących w tych elementach zmiennych losowych. Elementy macierzy  $C_n(\vartheta_0) = (c_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , możemy wyrazić następująco

$$\begin{aligned} c_{11}(\vartheta_0) &= \frac{\kappa_0}{\rho_0}, \\ c_{12}(\vartheta_0) &= \frac{\kappa_0}{\rho_0 \beta_0} - \frac{U_{2n}}{n^{1/2} \log(n) \rho_0 \beta_0} + \left( \frac{U_{2n}}{n^{1/2} \log(n) \rho_0 \beta_0} + \frac{1}{n \log(n) \beta_0^2} \right) \left( \tilde{U}_n - \log \frac{\rho_0}{\beta_0 \kappa_0} \right) \\ &\quad + \frac{\kappa_0}{\log(n) \rho_0 \beta_0} \log \left( \frac{U_{2n}}{n \kappa_0} + 1 + \frac{\rho_0}{n \beta_0 \kappa_0} \right) + \frac{1}{n \beta_0^2} - \frac{\kappa_0}{\log(n) \rho_0 \beta_0} + \frac{U_{2n}}{n^{1/2} \rho_0 \beta_0} \\ &= c_{21}(\vartheta_0), \\ c_{13}(\vartheta_0) &= -\frac{1}{\rho_0} = c_{31}(\vartheta_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{22}(\vartheta_0) &= \frac{\kappa_0}{\beta_0^2} + \frac{2U_{2n}}{n^{1/2}(\log n)^2\beta_0^2} - \frac{1}{(\log n)^2} \left[ \tilde{U}_n - \log\left(\frac{\varrho_0}{\beta_0\kappa_0}\right) + \log(n) \right] \\
&\quad \times \left[ \frac{2U_{2n}}{n^{1/2}\beta_0^2} + \frac{2\kappa_0}{\beta_0^2} + \frac{\varrho_0}{n\beta_0^3} - \left( \tilde{U}_n - \log\left(\frac{\varrho_0}{\beta_0\kappa_0}\right) + \log(n) \right) \left( \frac{U_{2n}}{n^{1/2}\beta_0^2} + \frac{\varrho_0}{n\beta_0^3} \right) \right] \\
&\quad + \frac{2\kappa_0}{(\log n)^2\beta_0^2} + \left( \tilde{U}_n - \log\left(\frac{\varrho_0}{\beta_0\kappa_0}\right) \right) \left[ \frac{1}{(\log n)^2} \left( \tilde{U}_n - \log\left(\frac{\varrho_0}{\beta_0\kappa_0}\right) \right) + \frac{2}{\log(n)} \right] \\
&\quad + \frac{\kappa_0 - 1}{n \log^2(n)\beta_0^2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\exp(\beta_0 T_i) \exp(\beta_0 T_{i-1}) \beta_0^2 (T_i - T_{i-1})^2}{(\exp(\beta_0 T_i) - \exp(\beta_0 T_{i-1}))^2} - 1 \right), \\
c_{23}(\vartheta_0) &= -\frac{1}{\beta_0} + \frac{1}{\log(n)\beta_0} \left( \frac{U_{1n}}{n^{1/2}} + 1 \right) - \frac{1}{\log(n)\beta_0} \left( \tilde{U}_n - \log\left(\frac{\varrho_0}{\beta_0\kappa_0}\right) \right) + \frac{2}{\log(n)\beta_0} \\
&\quad - \frac{1}{n \log(n)\beta_0} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\exp(\beta_0 T_{i-1}) \beta_0 (T_i - T_{i-1})}{\exp(\beta_0 T_i) - \exp(\beta_0 T_{i-1})} - 1 \right) = c_{32}(\vartheta_0), \\
c_{33}(\vartheta_0) &= \psi'(\kappa_0),
\end{aligned}$$

gdzie

$$\tilde{U}_n = \log\left(\frac{U_{2n}}{n^{1/2}\kappa_0} + 1 + \frac{\varrho_0}{n\beta_0\kappa_0}\right)$$

i  $U_{1n}, U_{2n}, U_{3n}$  zostały zdefiniowane odpowiednio przez (6.1), (6.2), (6.3). Korzystając z lematu 6.1.3 oraz faktu, że  $\mathbf{U}_n = O_p(1)$ , łatwo widać, że elementy macierzy  $C_n(\vartheta_0)$  zbiegają według rozkładu do elementów macierzy  $\Sigma_C$  określonej wzorem (2.32).  $\square$

## 6.2 Dowód twierdzenia 2.2.3

W dowodzie twierdzenia 2.2.3 skorzystamy z dwóch lematów. Pierwszy z nich dotyczy własności dwóch ciągów zmiennych losowych.

**Lemat 6.2.1.** *Niech  $T_n$  będzie momentem  $n$ -tego skoku procesu  $MGP(\varrho_0, \beta_0, \kappa_0)$ . Wówczas*

$$(i) \quad \frac{T_n^2 \exp(\beta_0 T_n)}{[\exp(\beta_0 T_n) - 1]^2} = o_P(1),$$

$$(ii) \quad \frac{\sqrt{n} T_n}{\exp(\beta_0 T_n) - 1} = o_P(1).$$

*Dowód.* (i) Rozważaną zmienną losową można przedstawić w następującej postaci

$$\frac{T_n^2 \exp(\beta_0 T_n)}{[\exp(\beta_0 T_n) - 1]^2} = \frac{1}{[1 - 1/\exp(\beta_0 T_n)]^2} \frac{T_n^2}{\exp(\beta_0 T_n)}.$$

Pierwszy czynnik po prawej stronie powyższego równania jest  $O_p(1)$ . Następnie, korzystając z rozwinięcia funkcji wykładniczej w szereg Taylora, otrzymujemy

$$\frac{T_n^2}{\exp(\beta_0 T_n)} = \frac{T_n^2}{\frac{\beta_0 T_n}{1!} + \frac{\beta_0^2 T_n^2}{2!} + \frac{\beta_0^3 T_n^3}{3!} + \dots} \leq \frac{6}{\beta_0^3 T_n}.$$

Stąd wystarczy pokazać, że  $1/T_n$  jest  $o_p(1)$ . Dla  $\varepsilon > 0$  mamy

$$P_{\vartheta_0}\left(\frac{1}{T_n} > \varepsilon\right) = P_{\vartheta_0}\left(T_n < \frac{1}{\varepsilon}\right) = P_{\vartheta_0}\left(\Lambda(T_n) < \Lambda\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) \approx \Phi\left(\Lambda\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)/\sqrt{n\kappa_0} - \sqrt{n\kappa_0}\right).$$

Z czego wynika, że  $P_{\vartheta_0}\left(\frac{1}{T_n} > \varepsilon\right) \rightarrow 0$ , gdy  $n \rightarrow \infty$ .

(ii) Mamy

$$\frac{\sqrt{n}T_n}{\exp(\beta_0 T_n) - 1} = \left[ \frac{T_n^2 \exp(\beta_0 T_n)}{(\exp(\beta_0 T_n) - 1)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{n}{\exp(\beta_0 T_n)} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Z podpunktu (i) wynika, że pierwszy czynnik po prawej stronie powyższego równania jest  $o_p(1)$ . Drugi czynnik

$$\left[ \frac{n}{\exp(\beta_0 T_n)} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left( \frac{\varrho_0}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{n}{\frac{\varrho_0}{\beta_0} [\exp(\beta_0 T_n) - 1]} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Z własności procesu MGP i prawa wielkich liczb

$$\frac{\frac{\varrho_0}{\beta_0} [\exp(\beta_0 T_n) - 1]}{n} \xrightarrow{p} \kappa_0,$$

gdy  $n \rightarrow \infty$ . Z powyższego oraz stąd, że przekształcenie  $g(x) = (\varrho_0/\beta_0 x)^{1/2}$  jest ciągle na przedziale  $(0, \infty)$ , otrzymujemy, że

$$\left( \frac{\varrho_0}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{n}{\frac{\varrho_0}{\beta_0} [\exp(\beta_0 T_n) - 1]} \right\}^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{p} \left( \frac{\varrho_0}{\beta_0 \kappa_0} \right)^{\frac{1}{2}},$$

co kończy dowód podpunktu (ii).  $\square$

W dalszej części tego rozdziału przez  $\ell_n^*(\theta) = (\ell_{1n}^*(\theta), \ell_{2n}^*(\theta))$  będziemy oznaczać wektor losowy określony wzorem (2.33), gdzie realizację  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$  procesu MGP( $\varrho, \beta, \kappa$ ) zastępujemy wektorem losowym  $(T_1, \dots, T_n)$  losowych momentów skoków procesu MGP( $\varrho, \beta, \kappa$ ).

Oznaczmy

$$C_n^*(\theta) = n^{-1} A_n^*(\theta), \quad (6.19)$$

gdzie  $A_n^*(\theta) = -\frac{\partial \ell_n^*(\theta)}{\partial \theta} = (a_{ij}^*(\theta))$ ,  $i, j = 1, 2$ ,

$$a_{11}^*(\theta) = \frac{n}{\beta^2} - n\kappa T_n^2 \frac{\exp(\beta T_n)}{[\exp(\beta T_n) - 1]^2} + (\kappa - 1) \sum_{i=1}^n \frac{\exp(\beta T_i) \exp(\beta T_{i-1}) (T_i - T_{i-1})^2}{[\exp(\beta T_i) - \exp(\beta T_{i-1})]^2},$$

$$a_{12}^*(\theta) = nT_n \frac{\exp(\beta T_n)}{\exp(\beta T_n) - 1} - \sum_{i=1}^n \frac{T_i \exp(\beta T_i) - T_{i-1} \exp(\beta T_{i-1})}{\exp(\beta T_i) - \exp(\beta T_{i-1})} = a_{21}^*,$$

$$a_{22}^*(\theta) = n\psi'(\kappa) - \frac{n}{\kappa}.$$

**Lemat 6.2.2.** (i) Ciąg zmiennych losowych

$$\mathbf{V}_n^* = n^{-1/2} \ell_n^*(\theta_0), \quad (6.20)$$

gdzie  $\theta_0 = (\beta_0, \kappa_0)$ , zbiega według rozkładu do zmiennej losowej o dwuwymiarowym rozkładzie normalnym o wartości oczekiwanej  $(0, 0)^T$  i macierzy kowariancji

$$\Sigma^* = \begin{bmatrix} \kappa_0 & 0 \\ \beta_0^2 & 0 \\ 0 & \psi'(\kappa_0) - \frac{1}{\kappa_0} \end{bmatrix}. \quad (6.21)$$

(ii)  $C_n^*(\theta_0) \xrightarrow{d} \Sigma^*$ , gdy  $n \rightarrow \infty$ .

(iii)  $[C_n^*(\theta) - C_n^*(\theta_0)] \rightarrow 0$  jednostajnie według prawdopodobieństwa dla  $\theta \in M_n(\theta_0)$ , gdy  $n$  dąży do nieskończoności.

*Dowód.* (i) Zmienne losowe  $\ell_{1n}^*(\theta_0)$  i  $\ell_{2n}^*(\theta_0)$  możemy wyrazić poprzez zmienne losowe  $U_{1n}$ ,  $U_{2n}$  oraz  $U_{3n}$  następująco

$$\begin{aligned} \ell_{1n}^*(\theta_0) &= \frac{n}{\beta_0} + \sum_{i=1}^n T_i - \frac{n\kappa_0}{\beta_0} \log[\exp(\beta_0 T_n)] \left[ 1 + \frac{1}{\exp(\beta_0 T_n) - 1} \right] \\ &\quad + (\kappa_0 - 1) \sum_{i=1}^n \frac{\exp(\beta_0 T_{i-1})(T_i - T_{i-1})}{\exp(\beta_0 T_i) - \exp(\beta_0 T_{i-1})} + (\kappa_0 - 1) \sum_{i=1}^n T_i \\ &= \frac{n\kappa_0}{\beta_0} + \frac{\kappa_0}{\beta_0} \sum_{i=1}^n \log[\exp(\beta_0 T_i)] - \frac{n\kappa_0}{\beta_0} \log[\exp(\beta_0 T_n)] \left[ 1 + \frac{1}{\exp(\beta_0 T_n) - 1} \right] \\ &\quad + \frac{(\kappa_0 - 1)}{\beta_0} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\exp(\beta_0 T_{i-1})\beta_0(T_i - T_{i-1})}{\exp(\beta_0 T_i) - \exp(\beta_0 T_{i-1})} - 1 \right] \\ &= -\frac{n^{1/2}\kappa_0}{\beta_0} U_{1n} + \frac{n\kappa_0 T_n}{\exp(\beta_0 T_n) - 1} \\ &\quad + \frac{(\kappa_0 - 1)}{\beta_0} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\exp(\beta_0 T_{i-1})\beta_0(T_i - T_{i-1})}{\exp(\beta_0 T_i) - \exp(\beta_0 T_{i-1})} - 1 \right], \\ \ell_{2n}^*(\theta_0) &= n \log n + n \log \kappa_0 - n \log \left[ \frac{\varrho_0}{\beta_0} (\exp(\beta_0 T_n) - 1) \right] + n \log \frac{\varrho_0}{\beta_0} - n\psi(\kappa_0) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \log \left[ \exp(\beta_0 T_i) - \exp(\beta_0 T_{i-1}) \right] \\ &= -n \log \left[ 1 + \frac{\frac{\varrho_0}{\beta_0} (\exp(\beta_0 T_n) - 1) - n\kappa_0}{n\kappa_0} \right] \\ &\quad + n^{1/2} \left\{ n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \left( \log \left[ \exp(\beta_0 T_i) - \exp(\beta_0 T_{i-1}) \right] - \psi(\kappa_0) \right) \right\} \\ &= -n \log \left( 1 + \frac{U_{2n}}{n^{1/2}\kappa_0} \right) + n^{1/2} U_{3n}. \end{aligned}$$

Stąd, korzystając z lematów 6.1.3 i 6.2.1 oraz rozwinięcia funkcji logarytmicznej w szereg Taylora z resztą Lagrange'a, otrzymujemy

$$V_{1n}^* = -\frac{\kappa_0}{\beta_0}U_{1n} + o_P(1),$$

$$V_{2n}^* = -\frac{U_{2n}}{\kappa_0} + U_{3n} + o_P(1).$$

Korzystając z lematu 6.1.2 mamy, że ciąg zmiennych losowych  $\mathbf{V}_n^*$  zbiega według rozkładu do zmiennej losowej o rozkładzie normalnym o wartości oczekiwanej  $(0, 0)^T$  i macierzy kowariancji  $\Sigma^*$ , określonej wzorem (6.21).

(ii) Elementy macierzy  $C_n^*(\theta_0)$  można przedstawić następująco

$$c_{11}^* = \frac{\kappa}{\beta_0^2} - \frac{\kappa_0 T_n^2 \exp(\beta_0 T_n)}{(\exp(\beta_0 T_n) - 1)^2} + \frac{\kappa_0 - 1}{\beta_0^2 n} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\exp(\beta_0 T_i) \exp(\beta_0 T_{i-1}) \beta_0^2 (T_i - T_{i-1})^2}{(\exp(\beta_0 T_i) - \exp(\beta_0 T_{i-1}))^2} - 1 \right],$$

$$c_{12}^* = \frac{1}{n\beta_0} \left( \sum_{i=1}^n \log \left[ \frac{\exp(\beta_0 T_n)}{\exp(\beta_0 T_i)} \right] - n \right) - \frac{1}{n\beta_0} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\exp(\beta_0 T_{i-1}) \beta_0 (T_i - T_{i-1})}{\exp(\beta_0 T_i) - \exp(\beta_0 T_{i-1})} - 1 \right]$$

$$- \frac{T_n}{\exp(\beta_0 T_n) - 1} = c_{21}^*,$$

$$c_{22}^* = \psi'(\kappa_0) - \frac{1}{\kappa_0}.$$

Na podstawie lematów 6.1.2, 6.1.3 i 6.2.1 mamy, że ciąg macierzy  $C_n^*(\theta_0)$  zbiega według prawdopodobieństwa do nieosobliwej macierzy  $\Sigma^*$ .

(iii) Pokażemy, że dla każdego  $i, j \in \{1, 2\}$ ,  $E_{\theta_0}(|c_{ij}^*(\theta) - c_{ij}^*(\theta_0)|) \rightarrow 0$ , jednostajnie dla  $\theta \in M_n(\theta_0)$  i wówczas teza wynika z nierówności Markowa. Z rozwinięcia funkcji  $c_{22}^*(\theta)$  w szereg Taylora w otoczeniu punktu  $\theta_0$  otrzymujemy

$$c_{22}^*(\theta) - c_{22}^*(\theta_0) = (\kappa - \kappa_0) \left[ \psi''(\kappa^*) + \frac{1}{(\kappa^*)^2} \right],$$

gdzie  $\kappa^*$  jest punktem odcinka o końcach  $\kappa$  i  $\kappa_0$ . Z powyższego mamy, że

$$E_{\theta_0}(|c_{22}^*(\theta) - c_{22}^*(\theta_0)|) \leq |\kappa - \kappa_0| \left[ |\psi''(\kappa^*)| + \frac{1}{(\kappa^*)^2} \right]$$

$$\leq 2hn^{-\delta} \left[ \psi''(\kappa_0 + hn^{-\delta}) + \frac{1}{(\kappa_0 - hn^{-\delta})^2} \right],$$

dla  $\theta \in M_n(\theta_0)$ . Ponieważ  $\delta > 0$ , pokazaliśmy wymaganą jednostajną zbieżność  $E_{\theta_0}(|c_{22}^*(\theta) - c_{22}^*(\theta_0)|)$ . W analogiczny sposób jak w pracy [4] można pokazać, że  $E_{\theta_0}(|c_{11}^*(\theta) - c_{11}^*(\theta_0)|) \rightarrow 0$  oraz  $E_{\theta_0}(|c_{12}^*(\theta) - c_{12}^*(\theta_0)|) \rightarrow 0$  jednostajnie, gdy  $\theta \in M_n(\theta_0)$ .  $\square$

Przechodzimy do dowodu twierdzenia 2.2.3.

Niech  $\theta \in M_n(\theta_0)$ , więc  $\theta - \theta_0 = n^{-\gamma}(\tau_1, \tau_2)'$  oraz

$$\ell_{1n}^*(\theta(\tau)) = \ell_{1n}^*(\theta_0) - n^{-\gamma}(a_{11}^*(\xi)\tau_1 + a_{12}^*(\xi)\tau_2),$$

$$\ell_{2n}^*(\theta(\tau)) = \ell_{2n}^*(\theta_0) - n^{-\gamma}(a_{21}^*(\xi)\tau_1 + a_{22}^*(\xi)\tau_2),$$

gdzie  $\xi$  jest punktem odcinka o końcach  $\theta$  i  $\theta_0$ .

Oznaczmy  $\lambda_n(\tau) = (\ell_1^*(\theta(\tau)), \ell_2^*(\theta(\tau)))'$ . Wówczas

$$\lambda_n(\tau) = n^{1/2}\mathbf{V}^* - n^{1-\gamma}C_n^*(\theta(\tau))\tau, \quad (6.22)$$

gdzie  $\mathbf{V}^*$  i  $C_n^*$  określone są odpowiednio wzorami (6.20) i (6.19).

Oznaczmy

$$g_n(\tau) = (n^{1-\delta})^{-1}(\Sigma^*)^{-1}\lambda_n(\tau).$$

Mnożąc obie strony równania (6.22) przez  $\tau'(n^{1-\delta})^{-1}(\Sigma^*)^{-1}$  otrzymujemy, że

$$\tau'g_n(\tau) = -\tau'\tau + \tau'\frac{(\Sigma^*)^{-1}\mathbf{V}^*}{n^{1/2-\delta}} + \tau'[I_2 - (\Sigma^*)^{-1}C_n^*(\theta(\tau))]\tau,$$

gdzie  $I_2$  jest macierzą jednostkową  $2 \times 2$ . Ponieważ  $\delta < 1/2$ , z lematu 6.2.2  $\mathbf{V}^* = O_p(1)$  oraz  $(\Sigma^*)^{-1}C_n^*(\theta(\tau)) \xrightarrow{P} I_2$ , to

$$\tau'g_n(\tau) = -\tau'\tau + o_p(1).$$

Powyższy rezultat implikuje, że dla dowolnego  $\varepsilon > 0$ , istnieje  $n_0 = n_0(\varepsilon, h)$ , takie, że dla  $n > n_0$

$$P(\sup_{\|\tau\|=h} \tau'g_n(\tau) < 0) \geq 1 - \varepsilon.$$

Na podstawie wersji twierdzenia Brouwera o punkcie stałym ([41], Lemma 5) otrzymujemy, że  $g_n(\hat{\tau}) = 0$  dla pewnego  $\hat{\tau}$  takiego, że  $\|\hat{\tau}\| < h$ . Stąd, dla każdego  $n > n_0$ , prawdopodobieństwo, że istnieje  $\hat{\tau}_n = (\hat{\tau}_{1n}, \hat{\tau}_{2n})'$  takie, że  $g_n(\hat{\tau}_n) = 0$  i  $\|\hat{\tau}_n\| < h$ , jest nie mniejsze niż  $1 - \varepsilon$ . Ciąg  $\hat{\theta}_n = \theta_0 + n^{-\delta}(\hat{\tau}_{1n}, \hat{\tau}_{2n})'$  jest szukanym ciągiem rozwiązań układu równań (2.33).  $\square$

### 6.3 Dowód twierdzenia 2.2.4

Założmy, że równanie  $\ell_n^*(\theta) = 0$  ma rozwiązanie  $\hat{\theta}_n = (\hat{\beta}_n, \hat{\kappa}_n)'$  w zbiorze  $M_n(\theta_0)$ . Wówczas

$$\ell_n^*(\theta_0) = A_n^*(\xi_n)(\hat{\theta}_n - \theta_0),$$

gdzie  $\xi_n$  jest punktem odcinka o końcach  $\hat{\theta}_n$  i  $\theta_0$  oraz  $\mathbf{V}_n^*$ , określone wzorem (6.20), jest postaci

$$\mathbf{V}_n^* = C_n^*(\xi_n)\mathbf{Z}_n^*, \quad (6.23)$$

gdzie  $\mathbf{Z}_n^* = (Z_{2n}, Z_{3n})'$ , natomiast  $Z_{2n}$  i  $Z_{3n}$  określone są wzorami odpowiednio (2.34) i (2.35).

Mnożąc obie strony równania (6.23) przez  $(\Sigma^*)^{-1}$  mamy

$$(\Sigma^*)^{-1}\mathbf{V}_n^* = (\Sigma^*)^{-1}[C_n^*(\xi_n) - C_n^*(\theta_0) + C_n^*(\theta_0)]\mathbf{Z}_n^* = \mathbf{Z}_n^* + o_P(1).$$

Dla  $\xi_n \in M_n(\theta_0)$ , ostatnia równość wynika z lematu 6.2.2. Stąd  $\mathbf{Z}_n^* \sim \mathcal{AN}((0, 0)', (\Sigma^*)^{-1})$ . Następnie rozważmy

$$\log(\hat{\varrho}_n) - \log(\varrho_0) = \log(n\hat{\kappa}_n\hat{\beta}_n) - \log[\exp(\hat{\beta}_n T_n) - 1] - \log(\varrho_0).$$

Ze wzoru  $\log_b(a - c) = \log_b a + \log_b(1 - \frac{a}{c})$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\log(\hat{\varrho}_n) - \log(\varrho_0) &= \log(n\hat{\kappa}_n\hat{\beta}_n) - \frac{\hat{\beta}_n}{\beta_0} \log(\exp(\beta_0 T_n)) - \log\left(1 - \frac{1}{\exp(\hat{\beta}_n T_n)}\right) - \log(\varrho_0) \\
&= \log(n\hat{\kappa}_n\hat{\beta}_n) - \frac{\hat{\beta}_n}{\beta_0} \log\left(\frac{\varrho_0\beta_0^{-1} \exp(\beta_0 T_n) - n\kappa_0}{n\kappa_0} + 1\right) - \frac{\hat{\beta}_n}{\beta_0} \log(n\kappa_0\beta_0) \\
&\quad - \left(1 - \frac{\hat{\beta}_n}{\beta_0}\right) \log(\varrho_0) - \log\left(1 - \frac{1}{\exp(\hat{\beta}_n T_n)}\right) \\
&= \left(1 - \frac{\hat{\beta}_n}{\beta_0}\right) \log(n) + (\log \hat{\kappa}_n - \log \kappa_0) + \left(1 - \frac{\hat{\beta}_n}{\beta_0}\right) \log \kappa_0 + (\log \hat{\beta}_n - \log \beta_0) \\
&\quad + \left(1 - \frac{\hat{\beta}_n}{\beta_0}\right) \log \beta_0 - \left(1 - \frac{\hat{\beta}_n}{\beta_0}\right) \log \varrho_0 - \frac{\hat{\beta}_n}{\beta_0} \log\left(\frac{\varrho_0\beta_0^{-1} \exp(\beta_0 T_n) - n\kappa_0}{n\kappa_0} + 1\right) \\
&\quad - \log\left(1 - \frac{1}{\exp(\hat{\beta}_n T_n)}\right).
\end{aligned}$$

Z powyższego mamy, że

$$\begin{aligned}
\frac{n^{1/2}}{\log(n)} [\log(\hat{\varrho}_n) - \log(\varrho_0)] &= -\frac{n^{1/2}(\hat{\beta}_n - \beta_0)}{\beta_0} + \frac{n^{1/2}}{\log(n)} [\log(\hat{\kappa}_n) - \log(\kappa_0)] \\
&\quad + \frac{n^{1/2}}{\log(n)} [\log(\hat{\beta}_n) - \log(\beta_0)] - \frac{1}{\log(n)} \frac{n^{1/2}(\hat{\beta}_n - \beta_0)}{\beta_0} \log\left(\frac{\beta_0\kappa_0}{\varrho_0}\right) \\
&\quad - \frac{n^{1/2}}{\log(n)} \frac{\hat{\beta}_n}{\beta_0} \log\left(\frac{\varrho_0\beta_0^{-1} \exp(\beta_0 T_n) - n\kappa_0}{n\kappa_0} + 1\right) \\
&\quad - \frac{n^{1/2}}{\log(n)} \log\left(1 - \frac{1}{\exp(\hat{\beta}_n T_n)}\right).
\end{aligned}$$

Pierwszy składnik sumy po prawej stronie powyższego równania jest równy  $-Z_{2n}/\beta_0$ . Na podstawie pierwszej części dowodu oraz metody delta, drugi, trzeci i czwarty składnik powyższej sumy jest równy  $o_p(1)$ . Pokażemy, że pozostałe składniki są również  $o_p(1)$ . Korzystając z nierówności  $(x-1)/x \leq \log(x) \leq x-1$  dla  $x > 0$  mamy, że

$$\begin{aligned}
\frac{n^{1/2}}{\log(n)} \frac{\hat{\beta}_n}{\beta_0} \log\left(\frac{\varrho_0\beta_0^{-1} \exp(\beta_0 T_n) - n\kappa_0}{n\kappa_0} + 1\right) &\leq \frac{n^{1/2}}{\log(n)} \frac{\hat{\beta}_n}{\beta_0} \frac{\varrho_0\beta_0^{-1} \exp(\beta_0 T_n) - n\kappa_0}{n\kappa_0} \\
&= \frac{1}{\kappa_0 \log(n)} \frac{\hat{\beta}_n}{\beta_0} n^{-1/2} (\varrho_0\beta_0^{-1} \exp(\beta_0 T_n) - n\kappa_0)
\end{aligned}$$

oraz

$$\frac{n^{1/2}}{\log(n)} \frac{\hat{\beta}_n}{\beta_0} \log\left(\frac{\varrho_0\beta_0^{-1} \exp(\beta_0 T_n) - n\kappa_0}{n\kappa_0} + 1\right) \geq \frac{n^{1/2}}{\log(n)} \frac{\hat{\beta}_n}{\beta_0} \frac{\varrho_0\beta_0^{-1} \exp(\beta_0 T_n) - n\kappa_0}{\varrho_0\beta_0^{-1} \exp(\beta_0 T_n)}.$$

Z lematu 6.1.2 wiemy, że ciąg zmiennych losowych

$$U_{2n} = n^{-1/2} \{ \varrho_0\beta_0^{-1} [\exp(\beta_0 T_n) - 1] - n\kappa_0 \}$$



zbiega według rozkładu do zmiennej o rozkładzie normalnym o wartości oczekiwanej 0 i wariancji  $\kappa_0$ . Stąd, korzystając z twierdzenia Słuckiego, ciąg zmiennych losowych

$$n^{-1/2}(\varrho_0\beta_0^{-1}\exp(\beta_0T_n) - n\kappa_0)$$

także zbiega do takiego rozkładu. Korzystając z tego, że

$$\frac{\hat{\beta}_n}{\beta_0} = \frac{n^{1/2}(\hat{\beta}_n - \beta_0)}{n^{1/2}\beta_0} + 1$$

oraz

$$n^{1/2}(\hat{\beta}_n - \beta_0) = O_p(1),$$

otrzymujemy, że

$$\frac{1}{\kappa_0 \log(n)} \frac{\hat{\beta}_n}{\beta_0} n^{-1/2}(\varrho_0\beta_0^{-1}\exp(\beta_0T_n) - n\kappa_0) = o_p(1). \quad (6.24)$$

Korzystając z analogicznych argumentów

$$\begin{aligned} & \frac{n^{1/2}}{\log(n)} \frac{\hat{\beta}_n}{\beta_0} \frac{\varrho_0\beta_0^{-1}\exp(\beta_0T_n) - n\kappa_0}{\varrho_0\beta_0^{-1}\exp(\beta_0T_n)} \\ &= \frac{1}{\log(n)} \frac{\hat{\beta}_n}{\beta_0} \frac{[\varrho_0\beta_0^{-1}\exp(\beta_0T_n) - n\kappa_0]/\sqrt{n}}{\varrho_0\beta_0^{-1}\exp(\beta_0T_n)/n} = o_p(1). \end{aligned} \quad (6.25)$$

Biorąc pod uwagę (6.24) i (6.25) mamy, że

$$\frac{n^{1/2}}{\log(n)} \frac{\hat{\beta}_n}{\beta_0} \log \left( \frac{\varrho_0\beta_0^{-1}\exp(\beta_0T_n) - n\kappa_0}{n\kappa_0} + 1 \right) = o_p(1).$$

Pokażemy również, że

$$\sqrt{n}(\log n)^{-1} \log \left( 1 - \frac{1}{\exp(\hat{\beta}_n T_n)} \right) = o_p(1). \quad (6.26)$$

Korzystając z nierówności  $(x-1)/x \leq \log(x) \leq x-1$  dla  $x > 0$  mamy, że

$$\sqrt{n}(\log n)^{-1} \log \left( 1 - \frac{1}{\exp(\hat{\beta}_n T_n)} \right) \leq -\sqrt{n}(\log n)^{-1} \exp(-\hat{\beta}_n T_n) < 0 \quad (6.27)$$

oraz

$$\sqrt{n}(\log n)^{-1} \log \left( 1 - \frac{1}{\exp(\hat{\beta}_n T_n)} \right) \geq -\sqrt{n}(\log n)^{-1} \frac{1}{\exp(\hat{\beta}_n T_n) - 1}. \quad (6.28)$$

Biorąc pod uwagę nierówności (6.27) i (6.28), wystarczy pokazać, że

$$\sqrt{n}(\log n)^{-1} \frac{1}{\exp(\hat{\beta}_n T_n) - 1} = o_p(1).$$

Zmienna losowa

$$\exp(\hat{\beta}_n T_n) = \exp \left[ \sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta_0) \frac{T_n}{\sqrt{n}} \right] \exp(\beta_0 T_n).$$

Z powyższego

$$\sqrt{n}(\log n)^{-1} \frac{1}{\exp(\hat{\beta}_n T_n) - 1} = \frac{1}{\log(n) \left\{ \sqrt{n} \exp \left[ \sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta_0) \frac{T_n}{\sqrt{n}} \right] \exp(\beta_0 T_n)/n - 1/\sqrt{n} \right\}}.$$

Z własności procesu MGP

$$\frac{\exp(\beta_0 T_n)}{n} = O_p(1)$$

oraz

$$\beta_0 T_n - \log(n) = O_p(1),$$

z czego wynika, że  $T_n/\sqrt{n} = o_p(1)$  i prawdziwa jest równość (6.26).

Zatem

$$\sqrt{n}(\log n)^{-1}(\log(\hat{\varrho}_n) - \log(\varrho_0)) = -\frac{1}{\beta_0} Z_{2n} + o_P(1).$$

Korzystając z asymptotycznej normalności  $\mathbf{Z}_n^*$  i z metody delta otrzymujemy tezę.  $\square$

## 6.4 Dowód twierdzenia 2.2.5

Przedstawiony poniżej dowód, będzie przebiegał analogicznie do dowodów twierdzeń 2.2.2, 2.2.3 i 2.2.4 oraz korzystał z udowodnionych w poprzednich sekcjach lematów. Dla uproszczenia zapisu w dowodzie tym zamiast oznaczenia  $\hat{\beta}_{INP,n}$  estymatora NW parametru  $\beta$ , będziemy stosować oznaczenie  $\hat{\beta}_n$ . Oznaczmy  $\mu = (\varrho, \beta)$  nieznaną parametr procesy INPPL, a  $\mu_0 = (\varrho_0, \beta_0)$  prawdziwą wartość tego parametru. Niech  $B_n(\theta) = -\partial^2 \ell_{INP,n}(\mu, \mathbf{t}) / \partial \mu \partial \mu'$  będzie macierzą drugich pochodnych logarytmu funkcji wiarygodności procesu INP. Zatem  $B_n(\mu) = (b_{ij}(\mu))$ ,  $i, j = 1, 2$ , gdzie

$$\begin{aligned} b_{11}(\mu) &= -\frac{\partial^2 \ell_{INP,n}(\mu, \mathbf{t})}{\partial \varrho^2} = \frac{n}{\varrho^2}, \\ b_{12}(\mu) &= -\frac{\partial^2 \ell_{INP,n}(\mu, \mathbf{t})}{\partial \varrho \partial \beta} = \frac{1}{\beta} t_n \exp(\beta t_n) - \frac{1}{\beta^2} [\exp(\beta t_n) - 1] = b_{21}(\mu), \\ b_{22}(\mu) &= -\frac{\partial^2 \ell_{INP,n}(\mu, \mathbf{t})}{\partial \beta^2} = \frac{2\varrho}{\beta^3} [\exp(\beta t_n) - 1] - \frac{2\varrho}{\beta^2} t_n \exp(\beta t_n) + \frac{\varrho}{\beta} t_n^2 \exp(\beta t_n). \end{aligned}$$

Oznaczmy

$$D_n(\vartheta) = (d_{ij}(\vartheta)) := n^{-1} \begin{bmatrix} b_{11}(\vartheta) & \frac{b_{12}(\vartheta)}{\log n} \\ \frac{b_{21}(\vartheta)}{\log n} & \frac{b_{22}(\vartheta)}{\log^2 n} \end{bmatrix}$$

macierz odpowiednio skalowanych elementów macierzy  $B_n(\vartheta)$ .

**Lemat 6.4.1.** Ciąg  $D_n(\mu_0)$  zbiega według prawdopodobieństwa, przy  $n$  dążącym do nieskończoności, do macierzy

$$\Sigma_D = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varrho_0^2} & \frac{1}{\beta_0 \varrho_0} \\ \frac{1}{\beta_0 \varrho_0} & \frac{1}{\beta_0^2} \end{bmatrix}.$$

*Dowód.* Zauważmy, że lemat 6.1.2 zachodzi dla  $\kappa_0 = 1$ . Elementy macierzy  $B_n(\mu_0)$  możemy przedstawić w sposób analogiczny do wybranych elementów macierzy  $A_n(\vartheta_0)$  następująco

$$\begin{aligned} d_{11}(\mu_0) &= \frac{1}{\rho_0}, \\ d_{12}(\mu_0) &= \frac{1}{\rho_0 \beta_0} - \frac{U_{2n}^*}{n^{1/2} \log(n) \rho_0 \beta_0} + \left( \frac{U_{2n}^*}{n^{1/2} \log(n) \rho_0 \beta_0} + \frac{1}{n \log(n) \beta_0^2} \right) \left( \tilde{U}_n - \log \frac{\rho_0}{\beta_0} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\log(n) \rho_0 \beta_0} \log \left( \frac{U_{2n}^*}{n} + 1 + \frac{\rho_0}{n \beta_0} \right) + \frac{1}{n \beta_0^2} - \frac{1}{\log(n) \rho_0 \beta_0} + \frac{U_{2n}^*}{n^{1/2} \rho_0 \beta_0} \\ &= d_{21}(\mu_0), \\ d_{22}(\mu_0) &= \frac{1}{\beta_0^2} + \frac{2U_{2n}^*}{n^{1/2} (\log n)^2 \beta_0^2} - \frac{1}{(\log n)^2} \left[ \tilde{U}_n - \log \left( \frac{\varrho_0}{\beta_0} \right) + \log(n) \right] \\ &\quad \left[ \frac{2U_{2n}^*}{n^{1/2} \beta_0^2} + \frac{2}{\beta_0^2} + \frac{\varrho_0}{n \beta_0^3} - \left( \tilde{U}_n - \log \left( \frac{\varrho_0}{\beta_0} \right) + \log(n) \right) \left( \frac{U_{2n}^*}{n^{1/2} \beta_0^2} + \frac{\varrho_0}{n \beta_0^3} \right) \right] \\ &\quad + \frac{2}{(\log n)^2 \beta_0^2} + \left( \tilde{U}_n - \log \left( \frac{\varrho_0}{\beta_0} \right) \right) \left[ \frac{1}{(\log n)^2} \left( \tilde{U}_n - \log \left( \frac{\varrho_0}{\beta_0} \right) \right) + \frac{2}{\log(n)} \right], \end{aligned}$$

gdzie

$$\tilde{U}_n = \log \left( \frac{U_{2n}^*}{n^{1/2}} + 1 + \frac{\varrho_0}{n \beta_0} \right),$$

$$U_{2n}^* = U_{2n, \kappa_0=1} = n^{1/2} \left\{ \frac{\varrho_0}{\beta_0} [\exp(\beta_0 T_n) - 1] - n \right\}.$$

Z lematu 6.1.2 otrzymujemy, że  $U_{2n}^* = O_p(1)$ , skąd wynika teza.  $\square$

Pokazaliśmy, analogicznie do przypadku procesu MGP, że macierz  $\Sigma_D$  jest macierzą osobliwą, w tym przypadku rzędu jeden. Zatem, w kolejnym kroku zredukujemy liczbę rozpatrywanych równań wiarygodności

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_{INP,n}(\varrho, \beta; \mathbf{t})}{\partial \varrho} &= \frac{n}{\varrho} - \frac{1}{\beta} [\exp(\beta t_n) - 1] = 0, \\ \frac{\partial \ell_{INP,n}(\varrho, \beta; \mathbf{t})}{\partial \beta} &= \sum_{i=1}^n t_i + \frac{\varrho}{\beta^2} [\exp(\beta t_n) - 1] - \frac{\varrho}{\beta} t_n \exp(\beta T_n) = 0, \end{aligned} \quad (6.29)$$

podstawiając do równania (6.29)  $\hat{\varrho}_{INP}$ , określone wzorem (2.38), za  $\varrho$ . Tym sposobem otrzymamy jedno równanie postaci

$$\ell_{INP,n}^*(\beta) := \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n T_i - \frac{nt_n \exp(\beta t_n)}{\exp(\beta t_n) - 1} = 0. \quad (6.30)$$

Zdefiniujmy

$$M_{INP,n}(\beta_0) = \{(\beta) : \beta = \beta_0 + \tau_1 n^{-\delta}, \|\tau\| \leq h\},$$

gdzie  $\delta$  i  $h$  są ustalonymi wartościami,  $0 < \delta < 1/2$ ,  $0 < h < \infty$ .

**Lemat 6.4.2.** *Z prawdopodobieństwem dążącym do 1, gdy  $n \rightarrow \infty$ , istnieje ciąg rozwiązań  $\hat{\beta}_n \in M_n(\beta_0)$  równania (6.30).*

*Dowód.* Oznaczmy

$$b_n^*(\beta) = -\frac{\partial \ell_n^*(\beta)}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta^2} - n\kappa T_n^2 \frac{\exp(\beta T_n)}{[\exp(\beta T_n) - 1]^2}$$

oraz

$$d_n^*(\beta) = n^{-1} b_n^*(\beta). \quad (6.31)$$

Zauważmy, że  $\ell_{INP,n}^*(\beta) = \ell_n^*(\beta, \kappa = 1)$ . Pamiętając, że proces INPPL jest procesem MGP( $\varrho, \beta, \kappa = 1$ ) oraz korzystając z lematu 6.2.2, prawdziwe są następujące stwierdzenia.

(i) Ciąg zmiennych losowych

$$V_{INP,n}^* = n^{-1/2} \ell_{INP,n}^*(\beta_0) \quad (6.32)$$

zbiega według rozkładu do rozkładu normalnego o wartości oczekiwanych 0 i wariancji  $\sigma^* = 1/\beta_0^2$ .

(ii) Ciąg  $d_n^*(\beta_0)$  zbiega do  $\sigma^*$  według prawdopodobieństwa.

(iii)  $[d_n^*(\beta) - d_n^*(\beta_0)] \rightarrow 0$  jednostajnie według prawdopodobieństwa dla  $\beta \in M_n(\beta_0)$ , gdy  $n \rightarrow \infty$ .

Niech  $\beta \in M_n(\beta_0)$ . Wówczas  $\beta - \beta_0 = n^{-\gamma} \tau$  oraz

$$\ell_{INP,n}^*(\beta(\tau)) = \ell_{INP,n}^*(\beta_0) - n^{-\gamma} (b_n^*(\xi) \tau),$$

gdzie  $\xi$  jest punktem odcinka o końcach  $\beta$  i  $\beta_0$ .

Oznaczmy  $\lambda_n(\tau) = \ell_{INP,n}^*(\beta(\tau))$ . Wówczas

$$\lambda_n(\tau) = n^{1/2} V_{INP,n}^* - n^{1-\gamma} d_n^*(\beta(\tau)) \tau, \quad (6.33)$$

gdzie  $V_{INP,n}^*$  i  $d_n^*$  są określone wzorami odpowiednio (6.32) i (6.31).

Oznaczmy

$$g_n(\tau) = (n^{1-\delta})^{-1} (\sigma^*)^{-1} \lambda_n(\tau).$$

Mnażąc obie strony równania (6.33) przez  $\tau(n^{1-\delta})^{-1} (\sigma^*)^{-1}$  mamy że

$$\tau g_n(\tau) = -\tau^2 + \tau \frac{(\sigma^*)^{-1} V_{INP,n}^*}{n^{1/2-\delta}} + \tau^2 [1 - (\sigma^*)^{-1} d_n^*(\beta(\tau))].$$

Ponieważ  $\delta < 1/2$ ,  $V_{INP,n}^* = O_p(1)$  oraz  $(\sigma^*)^{-1}d_n^*(\beta(\tau)) \rightarrow 1$  według prawdopodobieństwa co zostało zauważone na początku dowodu na podstawie lematu 6.2.2, mamy

$$\tau g_n(\tau) = -\tau^2 + o_p(1).$$

Powyższy rezultat implikuje, że dla zadanego  $\epsilon > 0$  istnieje  $n_0 = n_0(\epsilon, h)$ , takie że dla  $n > n_0$

$$P\left(\sup_{\|\tau\|=h} \tau g_n(\tau) < 0\right) \geq 1 - \epsilon.$$

Na podstawie wersji twierdzenia Brouwera o punkcie stałym ([41], Lemma 5) otrzymujemy, że  $g_n(\hat{\tau}) = 0$  dla pewnego  $\hat{\tau}$  spełniającego  $\|\hat{\tau}\| < h$ . Stąd, dla każdego  $n > n_0$ , prawdopodobieństwo, że istnieje  $\hat{\tau}_n$  spełniające  $g_n(\hat{\tau}_n) = 0$  i  $\|\hat{\tau}_n\| < h$ , jest nie mniejsze niż  $1 - \epsilon$ . Ciąg  $\hat{\beta}_n = \beta_0 + n^{-\delta}\hat{\tau}_n$  jest zatem szukanym ciągiem, co kończy dowód.  $\square$

Korzystając z lematu 6.4.2 możemy założyć, że równanie  $\ell_{INP,n}^*(\beta) = 0$  ma rozwiązanie  $\hat{\beta}_n$  w zbiorze  $M_{INP,n}(\beta_0)$  oraz następnie rozwinąć  $\ell_{INP,n}^*(\hat{\beta}_n)$  w otoczeniu  $\beta_0$  otrzymując

$$\ell_{INP,n}^*(\beta_0) = b_n^*(\xi_n)(\hat{\beta}_n - \beta_0),$$

gdzie  $\xi_n$  jest punktem odcinka o końcach  $\hat{\beta}_n$  i  $\beta_0$ .

Wówczas

$$V_{INP,n}^* = d_n^*(\xi_n)\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta_0).$$

Mnożąc obie strony powyższego równania przez  $(\sigma^*)^{-1}$  mamy

$$\begin{aligned} (\sigma^*)^{-1}V_{INP,n}^* &= (\sigma^*)^{-1}\left[d_n^*(\xi) - d_n^*(\theta_0) + d_n^*(\theta_0)\right]\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta_0) \\ &= \sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta_0) + o_p(1). \end{aligned}$$

Dla  $\xi \in M(\beta_0)$ , ostatnia równość wynika z lematu 6.2.2. Stąd ciąg zmiennych losowych  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta_0)$  zbiega według rozkładu do zmiennej losowej o rozkładzie normalnym o wartości oczekiwanej 0 i wariancji  $(\sigma^*)^{-1}$ . Następnie rozważmy

$$\log(\hat{\varrho}_n) - \log(\varrho_0) = \log(n\hat{\beta}_n) - \log(\exp(\hat{\beta}_n T_n) - 1) - \log(\varrho_0).$$

Z równości  $\log_b(a - c) = \log_b a + \log_b(1 - \frac{c}{a})$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} \log(\hat{\varrho}_n) - \log(\varrho_0) &= \log(n\hat{\beta}_n) - \frac{\hat{\beta}_n}{\beta_0} \log(\exp(\beta_0 T_n)) - \log\left(1 - \frac{1}{\exp(\hat{\beta}_n T_n)}\right) - \log(\varrho_0) \\ &= \log(n\hat{\beta}_n) - \frac{\hat{\beta}_n}{\beta_0} \log\left(\frac{\varrho_0 \beta_0^{-1} \exp(\beta_0 T_n) - n}{n} + 1\right) - \frac{\hat{\beta}_n}{\beta_0} \log(n\beta_0) \\ &\quad - \left(1 - \frac{\hat{\beta}_n}{\beta_0}\right) \log(\varrho_0) - \log\left(1 - \frac{1}{\exp(\hat{\beta}_n T_n)}\right) \\ &= \left(1 - \frac{\hat{\beta}_n}{\beta_0}\right) \log(n) + (\log \hat{\beta}_n - \log \beta_0) + \left(1 - \frac{\hat{\beta}_n}{\beta_0}\right) \log \beta_0 - \left(1 - \frac{\hat{\beta}_n}{\beta_0}\right) \log(\varrho_0) \\ &\quad - \frac{\hat{\beta}_n}{\beta_0} \log\left(\frac{\varrho_0 \beta_0^{-1} \exp(\beta_0 T_n) - n}{n} + 1\right) - \log\left(1 - \frac{1}{\exp(\hat{\beta}_n T_n)}\right). \end{aligned}$$

Odwołując się do dowodu Twierdzenia 2.2.4 wiemy, że ostatnie dwa wyrażenia powyższego równania są  $o_P(1)$ . Zatem

$$\sqrt{n}(\log n)^{-1}(\log(\hat{\varrho}_n) - \log(\varrho_0)) = -\frac{1}{\beta}\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta_0) + o_P(1).$$

Teza wynika z asymptotycznej normalności  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta_0)$  i metody delta.  $\square$

# Bibliografia

- [1] Akaike H. (1973). Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. In Petrov B. N. and Csaki F., editors, *2nd International Symposium on Information Theory*, pages 267–281, Budapest.
- [2] Andersen P. K., Borgan Ø., Gill R. D. i Keiding N. (1993). *Statistical Models Based on Counting Processes*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York.
- [3] Ascher H. i Feingold H. (1969). “Bad-as-old” analysis of system failure data. In *Proceedings of 8th Reliability and Maintenance Conference*, pages 49–62, Denver.
- [4] Bandyopadhyay N. i Sen A. (2005). Non-standard asymptotic in an inhomogeneous gamma process. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 57(4):703–732.
- [5] Berman M. (1981). Inhomogeneous and modulated gamma processes. *Biometrika*, 68:143–152.
- [6] Bickel P. J. i Doksum K. A. (2015). *Mathematical Statistics. Basic Idea and Selected Topics.*, volume I. CRC Press.
- [7] Black S. E. i Rigdon S. E. (1996). Statistical inference for a modulated power law process. *Journal of Quality Technology*, 28(1):81–90.
- [8] Boucher J.-P. i Couture-Piché G. (2015). Modeling the number of insureds’ cars using queuing theory. *Insurance: Mathematics and Economics*, 64:67–76.
- [9] Daley D. J. and Vere-Jones D. (2003). *An Introduction to Theory of Point Processes*, volume Elementary Theory and Methods. Springer.
- [10] Duane J. T. (1964). Learning curve approach to reliability monitoring. *IEEE Transactions on Aerospace*, 2:563–566.
- [11] Durrett R. (2012). *Essentials of Stochastic Processes*. Springer.
- [12] Godambe V. P. i Kale B. K. (1991). Estimating functions: An overview. In Godambe V. P., editor, *Estimating Functions*, pages 3–20. Oxford University Press, Oxford.
- [13] Goel A. L. i Okumoto K. (1979). Time-dependent error-detection rate model for software reliability and other performance measures. *IEEE Transactions on Reliability*, 28:206–211.

- [14] Hoang P. i Xuemei Z. (2003). NHPP software reliability and cost models with testing coverage. *European Journal of Operational Research*, 145:443–454.
- [15] Hurtado J. L., Joglar F. i Mohammad M. (2005). Generalized renewal process models, parameter estimation and applications to maintenance problems. *International Journal of Performability Engineering*, 1(1):37–50.
- [16] Jacobsen M. (2006). *Point Process Theory and Applications. Marked Point and Piecewise Deterministic Processes*. Birkhäuser.
- [17] Jeske, D. P. H. (2001). On the maximum estimates for the goel-okumoto software reliability model. *The American Statistician*, 55(3):219–222.
- [18] Johnson N. L. i Kotz S. (1970). *Distributions in Statistics. Continuous Univariate Distributions – 1*. John Wiley & Sons.
- [19] Jokieli-Rokita A. i Magiera R. (2016). On the existence of maximum likelihood estimates in modulated gamma process. *International Journal of Economics and Statistics*, 4:203–209.
- [20] Jokieli-Rokita A. i Magiera R. (2018). *Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance*, chapter Estimation and Prediction for the Modulated Power Law Process, pages 443–447. Springer, Cham.
- [21] Jokieli-Rokita A. i Skoliński P. (2021). Maksimum likelihood estimation for an inhomogeneous gamma process with log-linear rate function. *Journal of Statistical Theory and Practice*, 15:79.
- [22] Khoshgoftaar T. M. (1988). Nonhomogeneous Poisson processes for software reliability growth. In *COMPSTAT'88, Copenhagen, Denmark*.
- [23] Kopociński B. (1973). *Zarys teorii odnowy i niezawodności*. PWN, Warszawa.
- [24] Kočetova J., Leipus R. i Šiaulyš J. (2009). A property of the renewal counting process with application to the finite-time ruin probability. *Lithuanian Mathematical Journal*, 49:55–61.
- [25] Lakey M. i Rigdon S. E. (1992). The modulated power law process. In *Proc. 45th Annual Quality Congress*, pages 559–563, Milwaukee.
- [26] Letham B., Letham L.-M. i Rudian C. (2016). Bayesian inference of arrival rate and substitution behavior from sales transaction data with stockouts. *Proceedings of the 22nd International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, page 1695–1704.
- [27] Lindqvist B. H. (1993). The trend-renewal process, a useful model for repairable systems. Malmö, Sweden. Society in Reliability Engineers, Scandinavian Chapter, Annual Conference.



- 
- [28] Lindqvist B. H. (2006). On the statistical modeling and analysis of repairable systems. *Statist. Sci.*, 21(4):532–551.
- [29] Lindqvist B. H. i Doksum K. A. (2003). *Mathematical and Statistical Methods in Reliability*, volume 7 of *Series on Quality, Reliability & Engineering Statistics*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ.
- [30] Lindqvist B. H., Elvebakk G. i Heggland K. (2003). The trend-renewal process for statistical analysis of repairable systems. *Technometrics*, 45(1):31–44.
- [31] Mitov K. V. i Omev E. (2010). *Renewal Processes*. Springer.
- [32] Mukhopadhyay P. (2004). *An Introduction to Estimating Functions*. Alpha Science International.
- [33] Nayak T. K., Bose S. i Kundu S. (2008). On inconsistency of estimators of parameters of non-homogeneous Poisson process models for software reliability. *Statistics & Probability Letters*, 78:2217–2221.
- [34] Rao M. M. (2014). *Stochastic Processes – Inference Theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer.
- [35] Rigdon S. (2011). Repairable systems: Renewal and nonrenewal. In *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science*. American Cancer Society.
- [36] Rigdon S. E. i Basu A. P. (2000). *Statistical Methods for the Reliability of Repairable Systems*. Wiley.
- [37] Ross S. M. (1996). *Stochastic Processes*. John Wiley & Sons.
- [38] Saito Y. i Dohi T. (2015). Robustness of non-homogeneous gamma process-based software reliability models. In *2015 IEEE International Conference on Software Quality, Reliability and Security*, pages 75–84.
- [39] Sen A. i Somboonsavatdee A. (2015). Statistical inference for power-law process with competing risks. *Technometrics*, 57(1):112–122.
- [40] Shin T. J. L. i Lie C. H. (1996). Estimating parameters of intensity function and maintenance effect for repairable unit. *Reliability Engineering & System Safety*, 54:1–10.
- [41] Smith R. (1985). Maximum likelihood estimation in a class of nonregular cases. *Biometrika*, 72:67–90.
- [42] Sumiati I., Rahmani U., Supian S. i Subiyanto S. (2019). Application of the nonhomogeneous Poisson process for counting earthquakes. *World Scientific News*, 127:163–176.
- [43] Weiss L. (1971). Properties of maximum likelihood estimators in some nonstandard cases. *Journal of the American Statistical Association*, 66(334):345–350.

- [44] Weiss L. (1973). Properties of maximum likelihood estimators in some nonstandard cases, ii. *Journal of the American Statistical Association*, 68(342):428–430.
- [45] Wieczorkowski R. i Zieliński R. (1997). *Generatory liczb losowych*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.
- [46] Wong H.-L., Hsieh S.-H. i Tu Y.-H. (2009). Application of non-homogeneous Poisson process modeling of containership arrival rate. In *2009 Fourth International Conference on Innovative Computing, Information and Control (ICICIC)*, pages 849–854.
- [47] Yanagimoto T. i Yamamoto E. (1991). The role of unbiasedness in estimating equations. In Godambe V. P., editor, *Estimating Functions*, pages 89–101. Oxford University Press.
- [48] Zaigraev A. i A. P.-K. (2008). On estimation of the shape parameter of the gamma distribution. *Statistics & Probability Letters*, 78:286–295.
- [49] Zhao M. i Xie M. (1996). On maximum likelihood estimation for a general non-homogeneous Poisson process. *Scandinavian Journal of Statistics*, 23(4):597–607.