Warszawa, 30 lipca 2022

Recenzja rozprawy doktorskiej

pt. „Estymacja parametrów niejednorodnych procesów gamma"

Pawła Skolińskiego

Tematyka i tło rozprawy

Rozprawa dotyczy pewnych zagadnień statystyki matematycznej, motywowanych zastosowaniami do teorii niezawodności. Rozważa się mianowicie procesy punktowe, które można interpretować jako losowe czasy awarii. Problem statystyczny polega, ogólnie mówiąc, na estymacji parametrów takich procesów. W rozprawie rozważa się dwie parametryczne rodziny procesów, należących do klasy „procesów odnowienia z trendem", w terminologi wprowadzonej przez Lindqvista. Są to w istocie procesy odnowienia (skumulowane sumy nieujemnych zmiennych i.i.d.) z nieliniową transformacją czasu: $\Lambda(T_n) = X_1 + \cdots + X_n$.

Procesy „gamma" w rozprawie Skolińskiego są to procesy odnowienia z trendem, dla których zmienne X_i mają rozkład Gamma z parametrem kształtu κ. (Ta terminologia użyta w tytule rozprawy może być nieco myląca dla osób, które spotkały się z zupełnie innymi obiektami noszącymi nazwę procesów gamma.)

Jeśli chodzi o transformację czasu (trend) Λ, to Autor rozprawy rozważa procesy z potęgową funkcją trendu, $\Lambda(t) = \alpha t^{\beta}$, oznaczane MPLP$(\alpha, \beta, \kappa)$ oraz z log-liniową funkcją trendu, $\Lambda(t) = (\varrho/\beta)[\exp(\beta t) - 1]$, oznaczane MGP$(\varrho, \beta, \kappa)$. Pojawiają się również w rozprawie podklasy wspomnianych procesów, oznaczane jeszcze trudniejszymi do zapamiętania kryptonimami INPPL, PLP, GRP, HPP (dla specjalnych wartości parametrów β, κ; dobrze pomyślany Rysunek 1.4 wyjaśnia relacje pomiędzy tymi podklasami).

Zarówno klasa MPLP jak i MGP są trójparametrycznymi rodzinami rozkładów prawdopodobieństwa. Tematem rozprawy jest estymacja nieznanych parametrów na podstawie danych. W literaturze rozważa się dwie sytuacje: albo obserwuje się proces w ustalonym odcinku czasu, albo obserwuje się ustaloną liczbę skoków („zdarzeń") $T_1, \ldots, T_n$. Skoliński koncentruje się na tej drugiej sytuacji.

Okazuje się, że estymacja parametrów procesów odnowienia z trendem jest zadaniem trudnym, które nie redukuje się bezpośrednio do klasycznej sytuacji, kiedy dane stanowią próbkę i.i.d. Estymatory mają niestandardowe własności asymptotyczne. W szczególności estymator $\hat{\alpha}$ w modelu MPLP i $\hat{\varrho}$ w modelu MGP zmierzają do prawdziwych wartości parametrów α i ϱ w tempie $\log n/\sqrt{n}$ zamiast typowego tempa zbieżności $1/\sqrt{n}$. Badanie asymptotyki estymatorów w tych modelach jest ciekawym zadaniem matematycznym i stanowi najważniejszą część rozprawy.

Omówienie zawartości rozprawy

Rozprawa składa się z 6 rozdziałów. Rozdział 1 zawiera podstawowe definicje i wprowadzenie do teorii procesów punktowych indeksowanych czasem. Rozdział 2 jest poświęcony estymatorom największej wiarygodności (NW) w modelach MPLP (Podrozdział 2.1) oraz MGP (Podrozdział 2.2; w mojej ocenie najważniejszy w rozprawie). Rozdział 3 przedstawia alternatywne metody estymacji, wykorzystujące różne „funkcje estymujące" (innymi słowy, rozważa się tu Z-estymatory). Rozdział 4 zawiera wyniki badań symulacyjnych, w których porównuje się jakość różnych estymatorów. Rozdział 5 zawiera analizę danych rzeczywistych. Dwa rozpatrywane przykłady (Podrozdziały 5.1 i 5.2) dotyczą zagadnień niezawodnościowych. W Rozdziale 6 Autor zebrał dowody twierdzeń. Rozprawę zamyka dość obszerna bibliografia.

Omówienie i ocena wyników

Nowe teoretyczne wyniki znajdują się w Podrozdziale 2.2 oraz w Rozdziale 3.

Asymptotyka estymatorów NW

Uważam, że najbardziej wartościowa w tej rozprawie jest analiza własności asymptotycznych estymatorów NW w modelu MGP. Wyniki są podobne do znanych wcześniej wyników w modelu MPLP (te ostatnie są zaczerpnięte z pracy Bandyopadhyay & Sen, 2005 oraz Sen & Somboonsavatdee, 2015 i przedstawione jako Twierdzenia 2.1.1 i 2.1.2, 2.1.3). Rozprawa Skolińskiego zawiera analogiczne wyniki dla modelu MGP, mianowicie Twierdzenia 2.2.2, 2.2.3 i 2.2.4. Pierwsze z wymienionych twierdzeń podaje graniczną postać drugiej pochodnej log-wiarygodności. Drugie mówi o istnieniu rozwiązań równań wiarygodności.

Najciekawszym wynikiem jest według mnie Twierdzenie 2.2.4, które podaje asymptotyczny rozkład estymatorów NW: $\hat{\varrho}, \hat{\beta}, \hat{\kappa}$. Zaskakującą cechą tego wyniku jest fakt, że $\hat{\varrho}$ ma asymptotycznie rozkład $\mathrm{N}(\varrho, \mathrm{const} \cdot (\log n)^2/n)$, podczas gdy $\hat{\beta}, \hat{\kappa}$ są asymptotycznie normalne z wariancją malejącą jak $1/n$. Znaczy to, że parametr ϱ jest „trudniejszy do estymacji" niż β i κ. Jest to trudne do interpretacji na poziomie intuicyjnym, ponieważ ϱ w gruncie rzeczy odgrywa rolę parametru skali, a zazwyczaj estymacja parametrów skali jest łatwiejsza niż parametrów kształtu (w rozważanym modelu κ). Podobny fakt zachodzi dla estymacji parametru α w modelu MPLP (Twierdzenie 2.1.3).

Prześledziłem dokładnie dowód Twierdzenia 2.2.4 (i analogicznego Twierdzenia 2.2.5 w uproszczonym modelu INPPL). Chociaż sprawdziłem, że dowód jest poprawny, to muszę przyznać, że ten dowód nie wyjaśnił mi intuicyjnego sensu wyników. Autor oferuje pewne wyjaśnienie, mianowicie zauważa, że niestandardowa asymptotyka $\hat{\varrho}$ jest związana z osobliwością granicznej macierzy drugich pochodnych wiarogodności (Uwaga 2.2.1 po Twierdzeniu 2.2.2). Jednakże dowód Twierdzeń 2.2.4 i 2.2.5 przebiega inaczej, niezależnie od Twierdzenia 2.2.2.

Muszę podkreślić, że moje uwagi nie podważają wartości przedstawionych w rozprawie Skolińskiego twierdzeń. Przeciwnie, udowodnienie zaskakujących wyników ma większą wartość niż udowodnienie wyników standardowej postaci. Chciałbym tylko zwrócić uwagę na możliwość i potrzebę ogólniejszego twierdzenia, które zawierałoby jako szczególne przypadki Twierdzenia 2.1.3 (dla MPLP) i 2.2.4 (dla MGP). Skoro w obu modelach pojawia się ta sama niestandardowa asymptotyka, warto poszukać wspólnej przyczyny tego zjawiska.

Wyniki zawarte w Rozdziale 2 pochodzą z artykułu opublikowanego wspólnie z promotorką pracy.

Inne estymatory

Zaproponowane w Rozdziale 3 alternatywne estymatory dla trójparametrycznych procesów MPLP i MGP są, według mojej wiedzy, nowe. W odróżnieniu od estymatorów NW, nie jest w rozprawie zbadana ich asymptotyka. Wyniki symulacyjne, przytoczone w Rozdziale 4 nie przynoszą jasnej odpowiedzi na pytanie, czy zapropnowane nowe estymatory są konkurencyjne w stosunku do klasycznych ENW. W rezultacie, omawiana część pracy nasuwa wiele pytań, na które nie udziela odpowiedzi. Czy asymptotyczny rozkład Z-estymatorów $\hat{\varrho}, \hat{\beta}, \hat{\kappa}$ wymaga takiej samej niestandardowej normalizacji, jak ENW? (Zazwyczaj badanie asymptotyki Z-estymatorów przebiega dość podobnie jak dla ENW.) Czy można się spodziewać, że ENW są asymptotycznie efektywne?

Wyniki symulacyjne i analiza danych rzeczywistych

Jak już wspomniełem, wyniki badań symulacyjnych są mało konkluzywne. Raz jedne estymatory są lepsze, kiedy indziej inne, w zależności od wartości parametrów, które estymujemy (str. 74, akapit po Tabeli 4.11; str. 62, akapit po Tabeli 4.4). Jak zwykle w statystyce. Nie bardzo widać, jakie stąd wynikają wnioski praktyczne. Wydaje mi się, że dobrze postawione i ważniejsze od zadania estymacji jest zadanie predykcji (przewidywanie przyszłych punktów procesu). Autor postąpił słusznie, uwzględniając predykcję w badaniach symulacyjnych.

Analiza danych rzeczywistych w Rozdziale 5 nasuwa kolejne intrygujące pytanie: czy są jakieś merytoryczne przesłanki stojące za wyborem modelu MPLP lub MGP? Mam na myśli wybór modelu oparty na zrozumieniu „mechanizmu generującego" proces awarii. Podejrzewam, że kryteria czysto statystyczne wskażą, że oba modele (i wiele jeszcze innych modeli trójparametrycznych) może „pasować do danych" równie dobrze (str. 87, po Tabeli 5.4). Na str. 87, linie 5-8 i na str. 86, linie 5-7 znajdują się ciekawe spostrzeżenia: duże różnice w (estymowanych) wartościach parametrów prowadzą do niewielkich różnic w przebiegu procesu i w predykcji. Nasuwa się więc kolejne intrygujące pytanie: czyżby rozważane modele nie były „przeparametryzowane" (może jakaś dwuparametryczna rodzina byłaby odpowiednia)?

Redakcja pracy i sposób prezentacji wyników

Czytając rozprawę Skolińskiego miałem wrażenie, że jest skonstruowana jak dobra powieść kryminalna. Wyjaśnienie zagadkowych zjawisk pojawia się dopiero na samym końcu! Wzór, który wyjaśnia strategię dowodu zasadniczych Twierdzeń 2.2.4 i 2.2.5 przedstawiony jest w przedostatniej linijce na ostatniej stronie 108. Nawiasem mówiąc, ten, najciekawszy w całej rozprawie wzór, zawiera literówkę: zamiast β powinno być β_0. (Najciekawsze w całej rozprawie Twierdzenie 2.2.5 zawiera aż 2 literówki: zamiast α_0 powinno być w 2 miejscach ϱ_0. W zasadniczej Definicji 1.2.9 użyty jest symbol ρ zamiast używanego wszędzie indziej symbolu ϱ. Nie próbowałem szukać i zaznaczać literówek w mniej ważnych miejscach.)

Układ rozprawy jest logiczny i konsekwentny, ale sposób prezentacji rozumowań nie ułatwia lektury. Dużo niezbyt intuicyjnych oznaczeń, skomplikowanych rachunków, z których teza wynika w dość zagadadkowy sposób.

Podsumowanie i konkluzja

To jest dobra rozprawa doktorska. Zawiera nowe, poprawnie udowodnione wyniki matematyczne, solidnie przeprowadzone badania symulacyjne i analizę danych rzeczywistych. Co niemniej ważne, praca jest ciekawa i skłania do postawienia szeregu pytań, które mogą być impulsem do dalszych badań. Chociaż, jak wspomniałem, styl prezentacji uznaję za niezbyt przyjazny, to redakcja pracy jest w zasadzie poprawna.

Rozprawa spełnia wszystkie ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane pracom doktorskim z matematyki. Wnoszę o dopuszczenie Pawła Skolińskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Wojciech Niemiro

WNiemiro.