

Warszawa, dn. 26.08.2021 r.

dr hab. Rafał Marcin Łochowski
Katedra Matematyki i Ekonomii Matematycznej
Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Łukasza Leżaja *Non-symmetric Lévy processes on the real line*

Wstęp

Przedstawiona do oceny rozprawa doktorska magistra Łukasza Leżaja liczy 135 stron, zawiera streszczenie w języku polskim a następnie pięć rozdziałów, dodatek i bibliografię w języku angielskim.

Tematyka pracy wpisuje się w nurt intensywnie rozwijanych od prawie stu lat badań dotyczących procesów Lévy'ego, w których badacze wrocławscy mają znaczący udział. Trzy zagadnienia, którym poświęcona jest praca to: (a) asymptotyka i oszacowania gęstości prawdopodobieństw przejścia subordynatorów, (b) asymptotyka i oszacowania gęstości prawdopodobieństw przejścia procesów spektralnie jednostronnych o nieskończonym wahanii, (c) czasy trafienia (głównie) niesymetrycznych procesów w zbiór zwarty. Jak Autor rozprawy zauważa, niesymetryczność rozważanych procesów stanowi wyzwanie, wymagające znalezienia odpowiednich technik (choć ogólny przypadek symetryczny dla zagadnienia (c) też jest bardzo trudny). Rozprawa powstała z połączenia trzech prac, odpowiadających ww. zagadnieniom (a), (b) i (c). Dwie prace napisane zostały m. in. wspólnie z promotorem a jedna napisana została samodzielnie; wszystkie trzy prace przyjęto do druku w dobrych lub bardzo dobrych czasopismach matematycznych.

Omówienie głównych wyników rozprawy

Główne wyniki zawarte są w 3., 4. i 5. rozdziale rozprawy.

- Rozdział 3.

Rozdział 3. powstał na podstawie pracy *Transition densities of subordinators of positive order*, napisanej przez Autora rozprawy wspólnie z Tomaszem Grzywnym i Bartoszem Trojanem. Praca została przyjęta do czasopisma *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*.

W rozdziale 3. znaleziono asymptotykę i oszacowania gęstości prawdopodobieństw przejścia subordynatorów, których wykładnik Laplace'a ma (minus) drugą pochodną, która ma własność słabej (dolnej lub górnej) skalowalności (w nieskończoności). Pojęcie słabej dolnej lub górnej skalowalności jest naturalnym uogólnieniem pojęcia regularnej zmienności, które znowu jest uogólnieniem skalowalności, charakterystycznej dla wykładników Laplace'a procesów α -stabilnych. Gra ono podstawową rolę również w rozdziale 4. i ważną rolę w rozdziale 5.

Głównym wynikiem rozdziału 3. jest Twierdzenie 3.1.1, którego tezą jest istnienie gęstości prawdopodobieństw przejścia procesu oraz fakt, że w pewnym obszarze, gęstości te pomnożone przez niezbyt skomplikowane wyrażenia zawierające pierwszą i drugą pochodną wykładnika Laplace'a ϕ , można aproksymować przez stałą (równą 1). Co należy podkreślić, jedynym zakładanym w Twierdzeniu 3.1.1 warunkiem jest własność słabej dolnej skalowalności w nieskończoności funkcji $-\phi''$ z indeksem regularności z przedziału $(-2, -1)$. Jest to dosyć słaby warunek (np. miara Lévy'ego nie musi być absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a); z faktu, że ϕ jest funkcją Bernsteina wynika jednak wiele pomocniczych relacji wiążących ϕ z miarą Lévy'ego lub wykładnikiem Lévy'ego-Chinczyna procesu. Technika dowodu Twierdzenia 3.1.1 polega na udowodnieniu dolnego szacowania na wzrost części rzeczywistej rozszerzenia analitycznego ϕ a następnie na zastosowaniu formuły Mellina na odwrócenie transformaty. Dowód jest technicznie zaawansowany. Cały rozdział 3. zawiera bardzo wiele twierdzeń, wniosków i stwierdzeń z formułami szacującymi gęstości prawdopodobieństw przejść z dołu i z góry, formułowanych z różnymi założeniami. Z Twierdzenia 3.1.1, przy założeniu, że $\lim_{w \rightarrow +\infty} \phi'(w) = 0$, można otrzymać asymptotykę gęstości prawdopodobieństw przejścia (Wniosek 3.3.5). Przy dodatkowym założeniu własności globalnej słabej dolnej i górnej skalowalności ϕ , i założeniu istnienia prawie malejącej gęstości miary Lévy'ego, otrzymuje się globalne szacowania gęstości prawdopodobieństw przejścia z góry i z dołu (Twierdzenie 3.1.2). Szczególnie trudne do otrzymania, wymagające sprytnych technik, są dolne oszacowania gęstości. Ciekawymi wnioskami z otrzymanych rezultatów są oszacowania gęstości prawdopodobieństw przejścia relatywistycznego subordynatora α -stabilnego (Przykład 3.4.15) oraz obustronne szacowania funkcji Greena (Twierdzenie 3.5.8).

- Rozdział 4.

Rozdział 4. zawiera wyniki analogiczne do tych, które uzyskano w rozdziale 3. dla subordynatorów, ale dla nieco innej klasy procesów, mianowicie dla procesów spektralnie jednostronnych o nieskończonym wahaniu. Rozdział ten powstał na podstawie samodzielnie napisanej przez Autora rozprawy pracy *Transition densities of spectrally positive Lévy processes*, przyjętej do *Lithuanian Mathematical Journal*.

Klasa (jednowymiarowych) procesów spektralnie jednostronnych przyciągała i przyciąga uwagę wielu probabilistów ze względu na możliwość opisu prawdopodobieństw wyjść tych procesów z odcinka za pomocą tzw. funkcji skali. Autor jednak nie używa w swoich rozważaniach funkcji skali. Zauważa, że transformata Laplace'a może tu być użyta w analogiczny sposób jak w przypadku subordynatorów. Założenia i techniki dowodów są bardzo podobne do technik zastosowanych w rozdziale 3., co jest chyba jednym z oryginalniejszych podejść używanych dla tej klasy procesów. Trochę mylące jest definiowanie transformaty Laplace'a ze znakiem przeciwnym niż ma obiekt, który nazywany jest transformatą Laplace'a w rozdz. 3. Dodatkowo, pewną trudność sprawia, że transformata procesów spektralnie

jednostronnych może przyjmować wartości ujemne, stąd Twierdzenie 4.1.2, odpowiednik Twierdzenia 3.1.2, ma w założeniach dodatkowe warunki nałożone na transformatę. Dowody dolnych oszacowań wymagały tu też pewnej pomysłowości. Autor wykorzystał tu wyniki uzyskane przez promotora i promotora pomocniczego w innej pracy, opublikowanej w *Bernoulli*. Rozdział 4. kończy się eleganckim (choć narzucającym się) przykładem zastosowania rozwiniętej teorii do uzyskania dokładnej asymptotyki i globalnych oszacowań prawdopodobieństw przejścia dla scentrowanych, spektralnie dodatnich procesów α -stabilnych.

- Rozdział 5.

Rozdział 5. powstał na podstawie pracy *Hitting probabilities for Lévy processes on the real line*, napisanej przez Autora rozprawy wspólnie z Tomaszem Grzywnym i Maciejem Miśtą. Praca ukazała się w czasopiśmie *Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics*.

Rozdział 5. dotyczy innych zagadnień niż dwa poprzedzające rozdziały. W rozdziale tym Autor rozważa czasy trafienia trajektorii procesu w zbiór zwarty. Do opisu asymptotyki rozkładów tych czasów, przy założeniu regularnej zmienności części rzeczywistej wykładnika Lévy'ego-Chinczyna ψ (Twierdzenie 5.3.7, Wniosek 5.3.8, 5.3.9, Stwierdzenie 5.3.10) wprowadza się tzw. skompensowane jądro potencjału, którego istnienie jest dosyć delikatnym zagadnieniem. Autorzy dowodzą, że warunek

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\xi}{1 + \Re\psi(\xi)} < +\infty$$

wraz z nieujemnością części urojonej ψ na niewielkim przedziale otwartym na prawo od 0 wystarcza na istnienie skompensowanego jądra potencjału (Lemat 5.3.1).

Kolejny podrozdział rozdziału 5. zawiera dowód mocnej własności jaką jest nierówność Harnacka (i jej konsekwencje) dla procesów, których części rzeczywista wykładnika Lévy'ego-Chinczyna spełnia założenie globalnej słabej dolnej skalowalności (Twierdzenie 5.4.4).

Ostatni podrozdział rozdziału 5. poświęcony jest oszacowaniom ogonów czasów trafienia w 0 lub czasów trafienia w kulę. Główny wynik (Twierdzenie 5.5.11) daje globalne uniwersalne oszacowania czasów trafienia w kulę. Dowód wynika z wielu pośrednich faktów, dowiedzionych w literaturze.

Ocena rozprawy

Rozprawa liczy ponad 130 stron i powstała z trzech prac, odwołujących się do wielu innych wyników w literaturze, co sprawia, że nie jest łatwa w lekturze. Praca jest napisana jednak bardzo starannie, strona językowa nie budzi najmniejszych zastrzeżeń a wszystkie oznaczenia i obiekty matematyczne są wcześniej zdefiniowane (choć czasem trzeba poświęcić nieco czasu na odnalezienie ich definicji). Wszystkie uzyskane wyniki są ciekawe a niektóre nawet bardzo

ciekawe. Ich otrzymanie wymagało bardzo dużej biegłości analitycznej i doskonałej znajomości teorii procesów Markowa, procesów Lévy'ego, teorii potencjału, i bieżącej literatury. Pewien niedosyt może sprawiać to, że (choćby niektóre) stałe pojawiające się w oszacowaniach nie są opisane w sposób ilościowy, ale recenzent zdaje sobie sprawę, że byłoby to przy przyjmowanych ogólnych założeniach o słabej skalowalności bardzo kłopotliwe.

Dodatkowe uwagi

Praca, oprócz wymienionych wcześniej trzech rozdziałów, zawiera streszczenie w języku polskim, wstęp (rozdział 1.), równoważny ze streszczeniem w języku polskim, rozdział 2., w którym wprowadzono notację i najważniejsze pojęcia, oraz dodatek.

Pewien niedosyt budzi u mnie wprowadzona w rozdz. 2. definicja procesów Lévy'ego, gdzie nie podano żadnej interpretacji miary Lévy'ego w terminach skoków procesu.

W streszczeniu polskim rażą kalki z języka angielskiego typu: *propozycja* (zamiast *stwierdzenie*), *sekcja* (zamiast *(pod)rozdział*); należałoby też poprawić gramatykę niektórych zdań, np. zdania na str. vi, linia -21: „Jednakże ale z racji tego ...”.

Definicja uogólnionej funkcji odwrotnej na str. 6. budzi zastrzeżenia, gdyż argument $r > 0$, dla którego $f^*(r) = s$ może w ogólnym przypadku nie istnieć. Autor powinien uzasadnić dlaczego w sytuacjach rozważanych w rozprawie jednak taka sytuacja się nie zdarzy (zasada Darboux?).

W dowodzie Stwierdzenia 3.2.2 nie trzeba brać $y \rightarrow +\infty$.

Konkluzja

Nie budzi żadnych wątpliwości, że przedstawiona do oceny rozprawa spełnia wymagania ustawy *Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce* z dnia 20 lipca 2018 r. Wnoszę o jej przyjęcie i dopuszczenie magistra Łukasza Leżaja do dalszych etapów w postępowaniu o nadanie stopnia doktora. W przypadku, gdy udział Autora rozprawy w wynikach prezentowanych w rozdz. 3. i 5. jest większy niż 50% wnoszę o wyróżnienie rozprawy.

Z poważaniem

Robert Korowka