Prof. dr hab. Ryszard Rudnicki
Instytut Matematyczny PAN
Oddział w Katowicach

Katowice, 14.08.2023

Recenzja
rozprawy habilitacyjnej i dorobku naukowego
doktora Janusza Gajdy

Informacje ogólne

Doktor Janusz Gajda ukończył studia matematyczne w 2009 roku na Wydziale Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej i tamże w 2011 został magistrem ekonomii matematycznej i obronił doktorat w dziedzinie nauk matematycznych w 2014 roku. Temat rozprawy doktorskiej: *Modelowanie procesów anomalnej dyfuzji z wykorzystaniem rozkładów temperowanych stabilnych.* Do roku 2017 pracował na Politechnice Wrocławskiej, a obecnie jest zatrudniony na stanowisku adiunkta na Wydziale Nauk Ekonomicznych Uniwersytetu Warszawskiego.

Habilitant jest specjalistą w zakresie teorii procesów stochastycznych i ich zastosowań w fizyce, finansach, naukach o zdrowiu i przemyśle. Dorobek naukowy Habilitanta składa się z 44 artykułów naukowych, w tym 33 opublikowanych po doktoracie, z czego 11 wskazał jako osiągnięcie naukowe w przewodzie habilitacyjnym. Zgodnie z oświadczeniem Habilitanta jego liczba cytowań (bez autocytowań) w bazie Web of Science wynosi 401, a indeks Hirscha 13.

Ocena osiągnięcia naukowego

Wybrane przez Habilitanta 11 publikacji stanowi tematycznie spójne dzieło naukowe pt. "Analiza własności wybranych procesów stochastycznych opartych o rozkłady gaussowskie, stabilne, temperowane α-stabilne, ich subordynacja i rozszerzenia." Dwie prace są samodzielne, zaś współautorami pozostałych są głównie Arun Kumar z Indii i Agnieszka Wyłomańska z PWr.

W swoich pracach Habilitant zajmuje się głównie procesami stochastycznymi otrzymanymi z innych procesów poprzez subordynację. Polega ona na tym, że w ustalonym procesie $X(t)$, $t \geqslant 0$, czas zastępujemy nieujemym i niemalejącym procesem Lévy'ego $S(t)$, $t \geqslant 0$, niezależnym od procesu $(X(t))$ zwanym *subordynatorem*. W ten sposób wychodząc od znanych procesów $(X(t))$ możemy otrzymać zupełnie nowe klasy procesów stochastycznych $Y(t) = X(S(t))$, $t \geqslant 0$, które mogą na przykład lepiej przybliżać procesy występujące w przyrodzie. Habilitant zajmuje się badaniem własności otrzymanych procesów. W dalszym opisie będziemy korzystać z faktu, że dowolny subordynator wyznaczony jest przez funkcję Ψ spełniającą warunek $\mathbb{E}(e^{-uS(t)}) = e^{-t\Psi(u)}$.

W pracy [H1] badany jest proces $(Y(t))$, w którym proces $(X(t))$ jest również subordynatorem z Ψ postaci $\Psi(u) = (u+\nu)^\alpha - u^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $\mu > 0$, zwanym *temperowanym procesem stabilnym*, a $(S(t))$ jest procesem gamma. Autorzy pokazują szereg własności procesu: wzory na gęstość $f(t,x)$ zmiennej $Y(t)$ i gęstość miary Lévy'go, wzór na autokowariancję procesu, asymptotykę ogonów rozkładów i równanie z pochodnymi ułamkowymi spełnione przez $f(t,x)$. Każda z tych własności jest sformułowana w pracy jako "Proposition", a nie ma żadnego wyróżnionego twierdzenia. W pracy [H2] rozważa się uogólnienie procesu z [H1] na przypadek, w którym funkcja Ψ, odpowiadająca $(X(t))$ jest ogólniejszej postaci. Tu również badane są własności otrzymanego procesu, ale żadna z nich nie jest specjalnie wyróżniona. Dowody stwierdzeń są stosunkowo krótkie, choć nietrywialne i często wymagają użycia wyników innych autorów. W kolejnej pracy [H3] autorzy postępują odwrotnie niż do tej pory. Najpierw definiują pewien proces Lévy'ego z zerowym przesunięciem i dyfuzją i z miarą Lévy'ego zależną od czterech parametrów, następnie badają jego własności, m.in. wyznaczają wykładnik Laplace'a, dowodzą, że jego trajektorie mają wahanie skończone, a na koniec pokazują, że można go otrzymać poprzez subordynację.

W kolejnych pracach [H4] i [H5] również badamy procesy otrzymane przez subordynację z procesem gamma, ale proces zewnętrzny $(X(t))$ już sam nie jest subordynatorem. W pracy [H4] tym procesem jest ułamkowy ruch Browna rzędu n (krótko n-FBM), który jest uogólnieniem ułamkowego ruchu Browna (krótko FBM), a którego z kolei przedstawicielem jest proces Wienera. O ile własności procesu FBN są dobrze znane, to już niektóre własności procesu n-FBN, z których później korzysta się, zostały zbadane w [H4]. Główne wyniki pracy dotyczą procesu otrzymanego przez subordynację:

postać równania różniczkowego, które spełnia gęstość rozkładu; wzór na kowariancję i sprawdzenie, że korelacja zachowuje się asymptotycznie jak odpowiednia funkcja potęgowa. W pracy [H5] procesem zewnętrznym jest ułamkowy proces stabilny, który jest również uogólnieniem procesu FBM. Ponieważ ułamkowy proces stabilny ma nieskończony drugi moment dla $\alpha < 2$, więc nie możemy badać korelacji i trzeba ją zastąpić przez inne pojęcie. Jest nim kodyferencja, którą wykorzystujemy do sprawdzenia czy proces ma własność długozasięgowej zależności. Główne wyniki w tej pracy to wyznaczenie i zbadanie funkcji charakterystycznej procesu oraz kodyferencji. W pracy [H6] badamy proces, w którym subordynatorem jest temperowany proces stabilny, a więc taki jak proces zewnętrzny z pracy [H1], zaś procesem zewnętrznym jest symetryczny proces α-stabilny. W pracy wyprowadzony jest wzór na gęstości rozkładów $f(t,x)$ procesu i równanie różniczkowe dla f. Badana są też momenty oraz asymptotyka ogonów. Wyniki w pracach [H4]–[H6] wymagają sporych umiejętności, nie tylko rachunkowych.

Ostatnia grupa prac wchodzących w skład habilitacji poświęcona jest uogólnieniom procesu Ornsteina–Uhlenbecka. Badany jest proces $(U(t))$, który otrzymujemy rozwiązując równanie stochastyczne

$$dU(t) = -\mu U(t)\,dt + dT(t), \quad U(0) = u_0. \tag{1}$$

Gdy $(T(t))$ jest procesem Wienera, to otrzymujemy klasyczny procesu Ornsteina–Uhlenbecka. W pracy [H7] przyjmujemy, że $(T(t))$ jest dwustronnym procesem temperowanym α-stabilnym. Habilitant otrzymuje dość skomplikowany wzór na funkcję charakterystyczną procesu $(U(t))$, wyprowadza równanie różniczkowe z pochodnymi ułamkowymi dla gęstości rozkładu tego procesu, oraz wyznacza autokowariancję procesu. W pracy [H8] badamy dwa procesy otrzymane poprzez subordynację procesem gamma. Procesem zewnętrznym jest proces $(U(t))$ spełniający równanie (1), w którym $(T(t))$ jest dwustronnym procesem α-stabilnym. Otrzymano wzory na funkcję charakterystyczną procesu, a w szczególnym przypadku, gdy procesem zewnętrznym jest klasyczny proces Ornsteina–Uhlenbecka, również na autokowariancję procesu i oszacowanie wielkości ogonów. W pracy [H9] badany jest proces otrzymany przez subordynację klasycznego procesu Ornsteina–Uhlenbecka procesem, który jest odwrotnym subordynatorem do S_Ψ. Również tu wyznaczona jest kowariancja otrzymanego procesu. Dowód tego faktu jest długi i technicznie zaawansowany. Tematyka ta jest kontynuowana w pracach [H10] i [H11], w których są badane subordynacje α-stabilnych wersji procesu Ornsteina–Uhlenbecka. Główne rezultaty tych prac to wyznaczenie kodyferencji. Jest to zagadnienie dość zaawansowane, a dowody wzorów na kodyferencję są długie i trudne technicznie.

Podsumowując, główne wyniki prac wchodzących w skład rozprawy habilitacyjnej, to konstrukcja nowych procesów stochastycznych otrzymanych poprzez subordynację różnych klas procesów Lévy'ego oraz wyznaczenie ich charakterystyk takich jak np. funkcja charakterystyczna, kowariancja czy kodyferencja (w przypadku procesów z nieskończonym drugim momentem), równań różniczkowych, które spełnia gęstość rozkładu procesu oraz zbadanie własności trajektorii procesu i asymptotyki rozkładów.

Habilitant jest bardzo konsekwentny w swoich badaniach – rozpatrując poszczególne klasy procesów, stara się uzyskać pełny opis ich własności. Ma też doskonale opanowany warsztat badawczy w zakresie rozpatrywanej tematyki. Dowody twierdzeń są nietrywialne i często wymagają użycia zaawansowanych wyników innych autorów.

Przeglądając ładnie napisany i wyczerpujący autoreferat znalazłem zaledwie kilka usterek, m. in. w Definicjach 2.3 i 2.4 jest błąd w wykładnikach po prawej stronie wzorów (brakuje minusa), a jeśli chodzi o definicję α-stabilnego subordynatora, to w literaturze występuje nieco ogólniejsza definicja, w której po prawej stronie wzoru (2.0.4) jest $e^{-c\tau k^{\alpha}}$.

Inne osiągnięcia naukowe

Pozostały dorobek Habilitanta jest dość duży i dlatego przedstawię jedynie jego pobieżne omówienie. Wśród 33 prac wchodzących do pozostałego dorobku naukowego aż 19 opublikowanych jest w czasopismach fizycznych. Wiąże się to z zainteresowaniami naukowymi Habilitanta i grupy badawczej, z którą współpracuje. Są to prace w dużej mierze związane z już wcześniej opisanymi badaniami naukowymi. Zainteresowanie anomalną dyfuzją jest nawet dużo większe wśród fizyków niż matematyków teoretyków i mam wrażenie, że rośnie wykładniczo. Wśrod tych prac należy wspomnieć o analizie szeregów czasowych procesów o długiej pamięci. Wyniki teoretyczne Habilitanta są wykorzystywane do badania zaawansowanych zagadnień z matematyki finansowej, przemysłu, biologii i naukach o zdrowiu. Zainteresowania naukowe Habilitanta stale ewoluują, co jest bardzo pożądane w rozwoju naukowym. Podoba mi się jego współpraca z naukowcami z Instytutu Kardiologii w Warszawie, w wyniku której powstało aż 5 prac naukowych, co świadczy o sporym zaangażowaniu w realizowane projekty interdyscyplinarne i duże umiejętności współpracy z uczonymi z odległych specjalności.

Ocena dorobku dydaktycznego, organizacyjnego i współpracy międzynarodowej

Habilitant jest zatrudniony na Uniwersytecie Warszawskim, ale też pracował na Politechnice Wrocławskiej i odbył miesięczny staż na University of Nevada Reno w USA i dlatego spełnione jest wymaganie ustawowe, aby Habilitant wykazał się istotną aktywnością naukową realizowaną na więcej niż jednej uczelni. Był promotorem czterech prac magisterskich i dziewięciu licencjackich na Wydziale Matematyki Politechniki Wrocławskiej. Jest promotorem pomocniczym jednego planowanego przewodu doktorskiego na Wydziale Nauk Ekonomicznych Uniwersytetu Warszawskiego. Był recenzentem w jednym zagranicznym przewodzie doktorskim.

Habilitant brał udział w wielu konferencjach międzynarodowych i krajowych, na których referował swoje wyniki oraz współorganizował cztery konferencje. Był wykonawcą w czterech projektach badawczych NCN i MNiSW. Jest w komitecie redakcyjnym Mathematica Applicanda (Matematyka Stosowana). Jest także aktywnym recenzentem w wielu czasopismach międzynarodowych.

Dobrą stroną Habilitanta, jest umiejętność współpracy z innymi specjalistami oraz zaangażowanie w promocję nauki. Był współorganizatorem ogólnopolskiego konkursu Warsaw Econometric Challenge w latach 2021 i 2022. Prowadził szkolenia dla Urzędu Komisji Nadzoru Finansowego w ramach projektu Horyzont 2020.

Podsumowanie

Moja ocena zarówno dorobku naukowego Habilitanta jak i jego różnorodnej działalności dydaktycznej i organizacyjnej jest zdecydowanie pozytywna. Przedstawione osiagniecia naukowe stanowią znaczny wkład Habilitanta w rozwój dyscypliny matematyki. Podsumowując, uważam, że **dorobek naukowy doktora Janusza Gajdy oraz**

jego rozprawa habilitacyjna spełniają wymagania stawiane kandydatom do stopnia doktora habilitowanego. Stawiam wniosek o dopuszczenie doktora Gajdę do dalszych etapów przewodu habilitacyjnego.

Ryszard Rudnicki

Prof. dr hab. Ryszard Rudnicki