

## Recenzja dorobku naukowego w postępowaniu habilitacyjnym dra Janusza Gajdy

### Informacja o Habilitancie

Dr Janusz Gajda uzyskał dyplom magistra inżyniera matematyki na Wydziale Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej w roku 2009 oraz, na tej samej uczelni i tym samym wydziale, dyplom magistra ekonomii matematycznej w roku 2011. W roku 2014, na tej samej uczelni i tym samym wydziale uzyskał również stopień doktora nauk matematycznych, na podstawie rozprawy *Modelowanie procesów anomalnej dyfuzji z wykorzystaniem rozkładów temperowanych stabilnych*, której promotorem był prof. dr hab. Marcin Magdziarz.

Habilitant w latach 2013-2017 był zatrudniony na Politechnice Wrocławskiej jako asystent a następnie jako adiunkt. Od roku 2017 jest zatrudniony na stanowisku adiunkta na Wydziale Nauk Ekonomicznych Uniwersytetu Warszawskiego.

### Informacja o osiągnięciu naukowym

We wniosku habilitacyjnym dr Janusz Gajda przedstawił do oceny osiągnięcie naukowe, którym jest cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych zatytułowany *Analiza własności wybranych procesów stochastycznych opartych o rozkłady gaussowskie, stabilne, temperowane  $\alpha$ -stabilne, ich subordynacja i rozszerzenia*. Stosownie do art. 221 ust. 8 ustawy z dn. 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2022 r. poz. 574) recenzja niniejsza ma na celu ocenę czy wspomniany cykl artykułów odpowiada wymaganiom określonym w art. 219 ust. 1 pkt 2 tej ustawy.

Osiągnięcie naukowe składa się z 11 krótkich artykułów, oznaczonych [H1]-[H11], które ukazały się w latach 2015-2023, dwa zostały napisane samodzielnie, 9 prac ma współautorów, wśród których najczęstszym jest Agnieszka Wyłomańska (8 wspólnych prac w cyklu) i Arun Kumar (4 wspólne artykuły w cyklu). Cztery inne osoby są współautorami pojedynczych prac z cyklu. Wg oświadczeń współautorów, wkład Habilitanta we wszystkie wieloautorskie prace był znaczny: w pracy [H1] Habilitant przyczynił się do otrzymania wyników teoretycznych i wykonał obliczenia analityczne, w kolejnych wieloautorskich pracach, wg oświadczeń współautorów, wkład Habilitanta wynosił: [H3] – 85 %, [H4] – 70%, [H5] – 65%, [H6] – 50%, [H8] – 80%, [H9] – 70%, [H10] – 70 %, [H11] – 65 %.

Trzy z prac ukazały się w czasopiśmie *Communications in Statistics - Theory and Methods* (obecnie, tzn. wg wykazu czasopism MEiN z lipca 2023 r., 40 p. MEiN, dalsze punktacje również z tego wykazu), trzy w lepiej znanym czasopiśmie *Statistics & Probability Letters* (70 p. MEiN), dwa w *Physica A - Statistical Mechanics and its Applications* (70 p. MEiN), pozostałe trzy

w: *Methodology and Computing in Applied Probability* (70 p. MEiN), w wydaniu specjalnym *Mathematical Methods in the Applied Sciences* (100 p. MEiN) oraz w *Journal of Physics A - Mathematical and Theoretical* (100 p. MEiN).

## Zawartość prac wchodzących w skład osiągnięcia naukowego

Wszystkie prace wchodzących w skład osiągnięcia naukowego mają dosyć podobną strukturę. Prezentują pewne znane dotąd procesy stochastyczne, w których jednostajnie płynący czas jest zastępowany przez pewien subordynator, czyli niemalejący proces Lévy'ego  $(T_s)_{s \geq 0}$ , lub przez proces odwrotny do niego, zdefiniowany jako

$$S_t = \inf \{s \geq 0 : T_s > t\}, \quad t \geq 0.$$

W pracach bada się najczęściej postać funkcji charakterystycznej, momenty, dystrybuantę, gęstość lub asymptotykę ogonów rozkładów jednowymiarowych tych procesów, zależności długo-okresowe w rozkładach dwuwymiarowych (przy pomocy kowariancji lub kodyferencji), proponuje się metody estymacji parametrów tych procesów na podstawie danych próbkowych oraz metody ich symulacji.

Prace z cyklu można podzielić na cztery podgrupy.

- W pracach [H1]-[H3] analizowane są tzw. procesy typu Mittag-Lefflera, otrzymane z procesu Mittag-Lefflera  $(M_{\alpha,\beta,\lambda}(t))_{t \geq 0}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\beta, \lambda > 0$ , który jest niemalejącym procesem Lévy'ego o transformacie Laplace'a postaci

$$\mathbb{E} \exp(-u M_{\alpha,\beta,\lambda}(t)) = \left( \frac{\lambda}{\lambda + u^\alpha} \right)^{\beta t}, \quad u, t \geq 0.$$

- W pracy [H1] Autorzy korzystają ze znanego wcześniej faktu, że proces  $M_{\alpha,\beta,\lambda}$  można otrzymać z prostszego procesu – niemalejącego procesu  $\alpha$ -stabilnego  $S_\alpha$  ( $\alpha \in (0, 1)$ ) złożonego z procesem gamma  $G_{\lambda,\beta}$ ,  $M_{\alpha,\beta,\lambda}(t) = S_\alpha(G_{\lambda,\beta}(t))$ . Następnie Autorzy definiują i badają nową rodzinę procesów – temperowanych,  $\alpha$ -stabilnych procesów Mittag-Lefflera, które definiują tak jak proces Mittag-Lefflera, z tą różnicą, że proces  $S_\alpha$  jest zastąpiony przez temperowany proces  $\alpha$ -stabilny, wprowadzony do literatury przez Jana Rosińskiego.
- W pracy [H2], w analogii do pracy [H1], Autor definiuje rodzinę uogólnionych procesów Mittag-Lefflera  $M_\psi$ , gdzie  $\psi$  jest wykładnikiem charakterystycznym dowolnego ściśle rosnącego subordynatora  $S_\psi$ , otrzymanych jako  $M_\psi(t) = S_\psi(G_{\lambda,\beta}(t))$  i bada jej własności.
- W pracy [H3] bada się tzw. procesy Prabhakara, które otrzymuje się z procesów Mittag-Lefflera przez zastąpienie ich miary Lévy'ego, która ma gęstość daną za pomocą funkcji Mittag-Lefflera, miarą z bardziej ogólną gęstością, daną za pomocą tzw. funkcji Prabhakara. Procesy Prabhakara są parametryzowane trzema parametrami, które dla szczególnych wartości tych parametrów dają specjalne podrodziny procesów.
- W pracach [H4] i [H5] bada się odpowiednio ułamkowy ruch Browna rzędu  $n$  (który jest uogólnieniem ułamkowego ruchu Browna), subordynowany przez proces gamma, i ułamkowy proces  $\alpha$ -stabilny, subordynowany przez proces gamma. Główny wynik [H4] to jawna postać funkcji kowariancji ułamkowego ruchu Browna rzędu  $n$  subordynowanego przez proces gamma, z której wynika również własność długozasięgowej korelacji dla tego procesu. W [H5] bada się m.in. zależności w rozkładach dwuwymiarowych ułamkowego



procesu  $\alpha$ -stabilnego, subordynowanego przez proces gamma, za pomocą kodyferencji (zamiast korelacji, która tu nie istnieje). Wzory otrzymane na funkcje charakterystyczne rozkładów jednowymiarowych takich procesów są skomplikowane, pojawia się w nich uogólniony wzór dwumianowy lub H-funkcja Foxa, bardzo ciekawie natomiast wyglądają symulacje trajektorii tych procesów.

- W pracy [H6] bada się głównie symetryczny proces  $\alpha$ -stabilny subordynowany przez temperowany proces  $\beta$ -stabilny. Następnie bada się też subordynator  $\alpha$ -stabilny ( $\alpha \in (0, 1)$ ) subordynowany przez temperowany proces  $\beta$ -stabilny. W obydwu przypadkach Autorzy podają ułamkowe równania Fokkera-Plancka-Kołmogorowa spełniane przez gęstości rozkładów jednowymiarowych tych procesów.
- Procesami badanymi w pracach [H7]-[H11] są uogólnienia procesu Ornsteina-Uhlenbecka, w których:
  - szum wienerowski jest zastąpiony dwustronnym temperowanym szumem  $\alpha$ -stabilnym (praca [H7]),
  - szum jest wienerowski lub  $\alpha$ -stabilny, a jednostajnie płynący czas jest zastąpiony procesem gamma (praca [H8]),
  - szum jest wienerowski a jednostajnie płynący czas jest zastąpiony procesem odwrotnym do nieskończenie podzielnego subordynatora (praca [H9]),
  - szum jest  $\alpha$ -stabilny a jednostajnie płynący czas jest zastąpiony procesem odwrotnym do  $\beta$ -stabilnego subordynatora (praca [H10]) lub ogólniej – procesem odwrotnym do nieskończenie podzielnego subordynatora [H11]).

## Ocena osiągnięcia naukowego

Chociaż z krótkiego przedstawienia zawartości prac wchodzących w skład osiągnięcia naukowego wydaje się wynikać, że zbadano podstawowe i łatwe do otrzymania własności kilku nowych procesów stochastycznych, to jednak, przynajmniej część otrzymanych wyników jest interesująca, wymaga pomysłowości aby je uzyskać i jest ważna w kontekście możliwego ich wykorzystania w modelowaniu matematycznym.

Autor dosyć sprawnie operuje funkcjami specjalnymi (funkcja Mittag-Lefflera, funkcje Bessla, szeregi hipergeometryczne, funkcja specjalna Kummera), w tym mniej znanymi (funkcja Prabhakara, H-funkcja Foxa), mniej znanymi rozkładami (np. rozkład Beta-prime), transformatą Laplace'a, transformatą Fouriera, odwracaniem tych transformat, w tym całkowaniem po konturze na płaszczyźnie zespolonej, twierdzeniami tauberowskimi, rachunkiem stochastycznym, warunkowaniem. Jest mu znany aparat ułamkowych, również uogólnionych, równań różniczkowych. Dobrze orientuje się w literaturze związanej z tematyką osiągnięcia i potrafi intensywnie korzystać z wyników dostępnych w tej literaturze.

Za najbardziej wartościową matematycznie pracę z cyklu uważam pracę [H9] napisaną wspólnie z Agnieszką Wyłomańską (70% wkładu, w tym główne twierdzenia, pochodzą od Autora, wg oświadczenia Współautorki). Wyniki pracy można stosować do przypadków gdy czas jest zastąpiony procesem odwrotnym do dowolnego nieskończenie podzielnego subordynatora. Wydaje się również, o czym Autor niestety nie wspomina w autoreferacie, że praca, podobnie jak [H10] i [H11], może mieć zastosowania praktyczne w analizie zjawisk złożonych, subdyfuzyjnych, tam gdzie obserwuje się momenty 'zastoju' (ang. 'trapping events'). Praca [H11], uogólniająca [H10], powstała właśnie w celu modelowania zachowania maszyn używanych w wydobywaniu rud miedzi, i otrzymane tam wyniki teoretyczne dotyczące kodyferencji wykorzystano do stworzenia modelu zachowania wspomnianych maszyn, odpowiadającego zebranym danym empirycznym.

Niestety nie wszystkie prace prezentują równie wysoki poziom, a w niektórych (np. w [H5]), jak sam Autor przyznaje w autoreferacie, są błędy. Mam drobne uwagi do prac [H3]-[H5], [H7] i [H10]-[H11].

- W pracy [H3] fakt, że proces Prabhakara ma wahanie skończone dowodzony jako [H3, Proposition 2.3] wynika już z pierwszej formuły w dowodzie [H3, Proposition 2.1], zresztą, jako niemalejący proces (miara Lévy'ego skupiona na dodatniej półprostej) nie może mieć wahanía nieskończonego na żadnym skończonym odcinku.
- W pracy [H4], aby udowodnić własność długozasiegowej korelacji operuje się dosyć skomplikowanymi formułami na korelację. Naturalne wydaje się tu zastosowanie warunkowania względem subordynującego procesu gamma i asymptotycznych formuł [H4, (2.6)] rozszerzonych (kosztem np. stałych) na całą półprostą  $t \geq s$ . W pracy wskazana byłaby uwaga dlaczego autorzy wybrali jednak użycie skomplikowanych formuł; czy np. zaproponowane w poprzednim zdaniu podejście nie działa.
- W pracy [H5] niejasne jest sformułowanie [H5, Proposition 4.1]. W sformułowaniu [H5, Proposition 4.1] nie podano względem jakiej rodziny procesów ułamkowy ruch  $\alpha$ -stabilny subordynowany przez proces gamma jest samopodobny z indeksem  $H$ . ([H5, Definition 4.1] wymaga podania względem jakiej rodziny procesów dany proces jest samopodobny.)
- Stosowanie w pracy [H7] szeregów hipergeometrycznych bardzo niewiele wnosi, a otrzymane wzory wyglądają dosyć odstraszaająco.
- W pracach [H10] i [H11] wielomian  $b$  z formuł [H10, (1)] i [H11, (1)] powinien być zdefiniowany chyba jako  $b(z) = b_0 + b_1z + \dots + b_qz^q$ .

Mimo tych uwag, **oceniam, że wskazane do oceny osiągnięcie naukowe spełnia wymagania określone w art. 219 ust. 1 pkt 2 ustawy z dn. 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2022 r. poz. 574)**. Warto jednocześnie nadmienić, że wymieniony w dalszej części autoreferatu dorobek Habilitanta jest pokaźny. Wszystko to dowodzi, że Habilitant ma odpowiednie przygotowanie i potencjał do podjęcia samodzielnej pracy badawczej. Do tej pory Habilitant pracował nad wieloma problemami badawczymi. Być może warto, aby w przyszłości skupił się na mniejszej liczbie bardziej wymagających problemów.

