Recenzja
rozprawy habilitacyjnej i dorobku naukowego
doktora Janusza Gajdy

Dr Janusz Gajda jest absolwentem Politechniki Wrocławskiej. Dyplom magistra inżyniera matematyki uzyskał na Wydziale Podstawowych Problemów Techniki, Politechniki Wrocławskiej w roku 2009. Stopień doktora nauk matematycznych został mu nadany przez wspomniany wyżej Wydział w roku 2014. Jego rozprawa doktorska nosiła tytuł *"Modelowanie procesów anomalnej dyfuzji z wykorzystaniem rozkładów temperowanych stabilnych."* Promotorem jego rozprawy doktorskiej był prof. dr hab. Marcin Magdziarz. Habilitant uzyskał w roku 2011 także tytuł zawodowy magistra ekonomii matematycznej na Wydziale Podstawowych Problemów Techniki, Politechniki Wrocławskiej.

A. Krótkie omówienie i ocena osiągnięcia naukowego

Głównym przedmiotem badań habilitanta są własności procesów stochastycznych otrzymanych przez złożenie pewnych procesów (na ogół procesów Lévy'ego, lub pewnych procesów gaussowskich) z procesem subordynatora, lub odwrotnym do procesu subordynatora. W szczególności, przedmiotem zainteresowania jest wyznaczenie jawnych charakterystyk tak otrzymanych procesów, takich jak np. funkcja charakterystyczna i gęstość rozkładów jednowymiarowych, własności trajektorii, miary zależności oraz postaci uogólnionych równań różniczkowych spełnianych przez funkcje gęstości jednowymiarowego rozkładu.

W pracach [H1-H3] rozważane są pewne uogólnionienia procesów Mittag-Lefflera (ML). Artykuł [H1] omawia własności procesu Lévy'ego typu Mittag-Lefflera. Są to procesy Lévy'ego o transformacie Laplace'a danej wzorem

$$\mathbb{E}\exp\{-uX(t)\} = \Big(\frac{\lambda}{\lambda+u^{\alpha}}\Big)^{t}$$

gdzie $\alpha \in (0,1), \lambda > 0$. Podana jest konstrukcja uogólnionego temperowanego α-stabilnego procesu Lévy'ego typu ML (proces TMLLP) jako złożenia α-stabilnego subordynatora z niezależnym od niego procesem gamma, patrz wzór (3.1.9). Transformata Laplace'a odpowiadająca temu procesowi dana jest wzorem (3.1.10). Wyprowadzono wzory na gęstość jednowymiarowego rozkładu procesu TMLLP oraz jego miarę Lévy'ego, wzory (3.1.11) i (3.1.12). Ze wzoru na miarę Lévy'ego wynika, że trajektorie tego procesu są ściśle rosnące i mają nieskończoną ilość skoków na każdym przedziale o dodatniej długości, patrz Wniosek 3.1.

Jeśli chodzi o wzory na gęstość, to dane są one przez szeregi nieskończone o wyrazach zmieniających naprzemiennie znaki. W Twierdzeniu 3.3 podano pewne równanie funkcyjne, wzór (3.1.18), które jest spełnione przez gęstość jednowymiarowego rozkładu procesu. Nawiasem mówiąc wzór

(3.1.17) definiujący operator przesunięcia, pojawiający się w tym równaniu, jest dość skomplikowaną notacją na operator, który można dość prosto zapisać. Czy istnieje jakaś motywacja dla tak skomplikowanej notacji? Kowariancja procesu TMLLP wyznaczona została w pracy [H7].

Rozważania z pracy [H1] są kontynuowane w pracach [H2] (jest to praca samodzielna) oraz [H3], gdzie konstruuje się dalsze uogólnienia procesu Mittag-Lefflera. W pracy [H2] jako proces zewnętrzny złożenia występuje proces subordynatora, zaś w artykule [H3] uogólnia się proces Mittag-Lefflera. poprzez stosowną modyfikację miary Lévy'ego. Następnie w pracach tych bada się własności tak uzyskanych procesów. Wszystkie wyniki z prac [H1]-[H3] oparte są na obliczeniach wykonywanych przy pomocy jawnych wzorów dla charakterystyk procesów używanych w definicjach.

Prace [H4-H6] dotyczą subordynowanych procesów ułamkowych i ich uogólnień. W tym przypadku proces zewnętrzny jest procesem o wartościach rzeczywistych, na ogół jest to uogólnienie ułamkowego ruchu Browna (fBm), tzw ułamkowy ruch Browna n-tego rzędu, patrz Def. 2.1 w pracy [H4]. Habilitant, wraz ze współautorami pracy [H4], wprowadza proces postaci $B_H^n(G(t))$, gdzie $B_H^n(t)$ jest wspomnianym ułamkowym ruchem Browna n-tego rzędu, zaś $G(t)$ jest procesem gamma, patrz Definicja 2.5. Wspomniane powyżej prace [H4-H6] poświęcone są badaniu własności takich procesów. Wyznacza się m.in. funkcję kowariancji, gęstość jednowymiarowego rozkładu, funkcję charakterystyczną. Podobnie jak w przypadku artykułów [H1-H3] większość wyników opiera się na użyciu jawnych wzorów dla charakterystyk procesów, lub prostych zastosowaniach znanych oszacowań, patrz np oszacowania prawdopodobieństwa małych kul, Twierdzenie 3.25, pochodzące z pracy Samorodnitsky'ego (1998) cytowanej w [H5].

Prace [H7- H9] dotyczą konstrukcji procesów stochastycznych poprzez subordynację procesów typu Ornsteina-Uhlenbecka względem dwustronnego procesu temperowanego α-stabilnego. Są to procesy zdefiniowane przez równanie stochastyczne z addytywnym szumem pochodzącym od temperowanego procesu α-stabilnego, patrz Sekcja 3.3 autoreferatu. Procesy te opisane są wzorem (3.3.1). Przy użyciu funkcji specjalnych, w samodzielnej pracy [H7], opisanych jest w sposób jawny szereg charakterystyk takich procesów, jak np funkcja charakterystyczna jednowymiarowego rozkładu, pierwszy i drugi moment oraz kowariancja rozkładu dwupunktowego. Sformułowane jest równanie, które spełniają gęstości jednowymiarowych rozkładów. Następnie habilitant wyznacza podobne charakterystyki dla procesów otrzymanych przez subordynacje procesu typu Ornsteina-Uhlenbecka przez inne procesy, np proces typu gamma ([H8]), proces z czasem zmienionym przez proces odwrotny do subordynatora ([H9]). Dalsze uogólnienie tej procedury ma miejsce w pracach

[H10-H11], gdzie rozpatruje się subordynację α-stabilnym subordynatorem i odwrotnym subordynatorem procesu typu Ornsteina-Uhlenbecka względem pewnego nieskończenie podzielnego procesu, patrz wzór (3.3.29).

Podsumowanie. Podsumowując tą część mojej recenzji, habilitant koncentruje się w swoim autoreferacie na pewnej specyficznej konstrukcji procesu stochastycznego poprzez subordynację danego procesu stochastycznego o znanych charakterystykach (np procesu Mittag-Lefflera, ułamkowego ruchu Browna, lub ich uogólnieniach) względem pewnego subordynatora (procesu Lévyego o rosnących trajektoriach), lub odwrotnego do takiego procesu. Otrzymane w ten sposób procesy są badane pod kątem wyznaczenia ich w miarę prostych charakterystyk, takich jak np rozkłady jednowymiarowe, lub ewentualnie kowariancje. Jawne wzory są na ogół podane w terminach funkcji specjalnych. Otwartym i ciekawym problemem wydaje się zagadnienie użyteczności wzorów uzyskanych przez dr Gajdę w faktycznych obliczeniach numerycznych. Habilitant nie komentuje tego typu problemu w autoreferacie.

B. Ocena pozostałego dorobku naukowego.

Tematyka prac dr J. Gajdy, które nie weszły w skład jego habilitacji, jest dość szeroka. Oprócz prac czysto matematycznych zajmujących się badaniem niektórych własności uogólnień znanych procesów stochastycznych (artykuły [P18-P22]) habilitant zajmował się także szeroko pojmowanymi zastosowaniami matematyki. Wymienić tu można jego prace [P1-P7] zajmujące się problemami statystycznymi motywowanymi przez zastosowania w fizyce. Wyniki opublikowane w tych pracach dotyczą statystyk stosowanych do wykrywania korelacji w szeregach czasowych, klasyfikacji typów trajektorii cząsteczek występujących w pewnych procesach fizycznych, estymacji niektórych statystyk dla takich trajektorii. Ponadto habilitant publikował także artykuły zajmujące się zastosowaniami matematyki w przemyśle, finansach, medycynie i naukach o zdrowiu, prace [P8-P17]. Aktywność naukowa dr Gajdy w dziedzinie zastosowań matematyki wydaje się silnym punktem w jego działalności naukowej i stanowi ważny element podkreślający wartość dorobku habilitanta.

Jeśli chodzi o dotychczasowe zatrudnienie, to habilitant pracował na Wydziale Matematyki Politechniki Wrocławskiej w latach 2013-17. Od roku 2017, do chwili obecnej habilitant jest zatrudniony na Wydziale Nauk Ekonomicznych, Uniwersytetu Warszawskiego, W latach 2017-18 habilitant pracował także w Instytucie Kardiologii im. Prymasa Tysiąclecia Stefana Kardynała Wyszyńskiego, gdzie rozwinął współpracę naukową z przedstawicielami nauk medycznych.

Dr Gajda odbył 1 krótkoterminowy (miesięczny) staż naukowy na University of Nevada Reno w USA. Ponadto realizował dwudniowy wyjazd na Uniwersytecie La Sapienza University w Rzymie.

Habilitant był laureatem Nagród Rektora Politechniki Wrocławskiej za osiągnięcia naukowe, w latach 2012 i 2014 oraz Nagrody Dziekana Wydziału Podstawowych Problemów Techniki, Politechniki Wrocławskiej za osiągnięcia naukowe w roku 2011.

B. 2 Dane bibliometryczne

Dorobek naukowy dr Gajdy stanowią 44 artykuły. Spośród nich 22 zostało opublikowanych po doktoracie. Dane te pochodzą z autoreferatu. Baza danych MathSciNet, obejmująca dziedziny związane z naukami matematycznymi, wskazuje, iż dr Gajda opublikował 30 artykułów. Jeśli chodzi o cytowania to za wspomnianą wyżej bazą MathSciNet wyniki prac, których współautorem był dr Gajda, cytowane były 96 razy. Czasopisma, w których publikował habilitant w swojej większości mają zasięg międzynarodowy. Na ogół nie są to jednak czasopisma o najwyższym prestiżu. Wśród lepszych czasopism wymienić można m. in.: *Mathematical Methods in the Applied Sciences* (2 artykuły), *Journal of Statistical Physics* (2 artykuły), *Fractional Calculus and Applied Analysis* (1 artykuł) *Journal of Physics A* (3 artykuły), *Sensors* (1 artykuł), *Physical Review E* (4 artykuły).

C. Konkluzja.

Uważam, iż zarówno przedstawione mi do oceny osiągnięcie naukowe jak i pozostały dorobek naukowy habilitanta wystarczają do spełnienia ustawowych wymogów do nadania stopnia doktora habilitowanego. Popieram więc wniosek o nadanie doktorowi Januszowi Gajdzie stopnia doktora habilitowanego.

Lublin, 8 listopada, 2023 r.

Tomasz Komorowski

T. Komorowski