



UNIWERSYTET
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

dr hab. Anna Ochal
Katedra Teorii Optymalizacji i Sterowania
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagielloński w Krakowie
30-348 Kraków, ul. Łojasiewicza 6

tel. +48 12 664 66 68, fax +48 12 664 66 73
e-mail: anna.ochal@uj.edu.pl

Kraków, 8 lipca 2024r.

Recenzja rozprawy doktorskiej pani mgr inż. Zofii Wróblewskiej
pt. „**Odwrócone sprężyste wahadło jako matematyczny model biegu**”

1. Informacje wstępne

Rozprawa doktorska pani mgr inż. Zofii Wróblewskiej została napisana pod kierunkiem promotora dr hab. inż. Łukasza Płociniczaka, prof. UW r i promotora pomocniczego dr hab. Piotra Kowalczyka, prof. UW r. Dotyczy ona matematycznego modelu biegu z umiarkowaną prędkością z wykorzystaniem sprężystego odwróconego wahadła (ang. SLIP – spring loaded inverted pendulum). Celem rozprawy jest:

- i. matematyczna analiza modelu, opisanego układem równań różniczkowych zwyczajnych (w tym znalezienie rozwiązania przybliżonego, udowodnienie istnienia i stabilności punktu stałego „odwzorowania powrotu” (4.14) oraz bifurkacji w odwzorowaniu Poincarégo (4.91)),
- ii. eksperymentalna weryfikacja zbudowanego modelu.

Rozprawa jest matematyczna, ale niewątpliwie wymagała wiedzy interdyscyplinarnej (z równań różniczkowych zwyczajnych, układów dynamicznych, a także z fizyki, mechaniki, biomechaniki, medycyny sportu).

Rozprawa napisana jest w języku polskim, liczy łącznie 92 strony, w tym spisy treści, tabel i rysunków. Nie znalazłam jednak streszczenia w języku angielskim, co jest wymagane zgodnie z Art. 187 Prawa o szkolnictwie wyższym i nauce (pkt. 4).

Rozprawa składa się ze wstępu (rozdział 1), części opisującej fizyczny i matematyczny model (rozdział 2) oraz trzech zasadniczych rozdziałów poświęconych odpowiednio rozwiązaniom przybliżonym (rozdział 3), istnieniu i stabilności punktu stałego odwzorowania powrotu wierzchołka do wierzchołka (rozdział 4) oraz opisowi przeprowadzonego eksperymentu i analizie otrzymanych wyników (rozdział 5). Rozprawa kończy się krótkim podsumowaniem (rozdział 6) i spisem literatury, liczącym 62 pozycje, w tym jedna

publikacja Doktorantki opublikowana samodzielnie [58], cztery publikacje opublikowane z promotorami [38, 54, 59, 60] i jedna publikacja wspólna z promotorem złożona do druku [61].

2. Omówienie rozprawy doktorskiej

2.1. Organizacja pracy oraz źródła

Rozprawa doktorska zawiera rezultaty lub jest istotnie związana z następującymi artykułami Doktorantki:

- [38] – pracą wspólną z promotorami, opublikowaną w *Physica D* (100 punktów ministerialnych) w 2023r., zawierającą m.in. dowód rozwiązania zagadnienia 1 (twierdzenie 3);
- [54] – pracą wspólną z promotorem, opublikowaną w *Nonlinear Dynamics* (140 punktów ministerialnych) w 2020r., stanowiącą część rozdziału 3 (w zakresie teorii zaburzeń i przybliżenia sztywności sprężyny dla biegu symetrycznego);
- [58] – pracą samodzielną, opublikowaną w *Mathematica Applicanda* (20 punktów ministerialnych) w 2020r., w której Doktorantka uzyskała przybliżenia maksymalnego ugięcia nogi i przyrostu kąta (formuły (3.30) w rozprawie, przy założeniu małego kąta);
- [59] – pracą wspólną z promotorami, opublikowaną w *Mathematica Applicanda* (20 punktów ministerialnych) w 2023r., która stanowi część rozdziału 4;
- [60] – pracą wspólną z promotorami, opublikowaną w *IMA Journal of Applied Mathematics* (70 punktów ministerialnych) w 2023r., która stanowi część rozdziału 4.

Wyniki rozdziału 5, związanego z przeprowadzonym eksperymentem, są zawarte w pracy wspólnej z promotorem [61], złożonej do publikacji w *Sports Engineering* (100 punktów ministerialnych).

Układ rozprawy jest przemyślany i kompletny pod względem doboru niezbędnych faktów i odesłań do literatury. Rozdział 2 jest opisem modelu z punktu widzenia fizyki i matematyki, stanowi wyjaśnienie badanego w dalszej części zagadnienia początkowego wraz z jego modyfikacjami. Rozdziały 3 i 4 to wyniki prac już opublikowanych. Natomiast wyniki rozdziału 5 dopiero czekają na recenzje i publikację. Wyniki przedstawione są w sposób spójny i logiczny. Twierdzenia i lematy są formułowane w sposób poprawny, przedstawione dowody są raczej czytelne, choć czasem wymagają do czytelnika samodzielnego uzupełnienia przeliczeń.

Niedociągnięcia w tekście są drobne i nie obniżają mojej oceny rozprawy. Przykładowo, zamiast „metody strzelania” (str. ix) lepiej napisać „metody strzału”, czy niepoprawne tłumaczenie słowa angielskiego „elastic” (np. elastyczne odkształcenie (str. 2),

elastyczna sprężyna (str. 6)). Ponadto, ostatni akapit w podrozdziale 4.5 (str. 68) wymaga poprawy (czy funkcja (4.91) jest wypukła?).

Natomiast nie znalazłam (ani w rozprawie, ani w artykułach) informacji, które rezultaty, poza tymi z pracy [58], są samodzielnym dziełem Doktorantki. Jedynie w artykule [38] mogłam przeczytać: „**Zofia Wróblewska**: Project administration, Writing – review & editing, Visualization, Investigation, Validation”.

2.2. Główne wyniki i narzędzia pracy

Niejednokrotnie przekonujemy się, że złożoność układów biologicznych uniemożliwia pełne zrozumienie mechaniki poruszania się. Dlatego korzystamy z pewnych uproszczeń i dodatkowych założeń, by podjąć próby modelowania ruchu, co z kolei może pomóc w zrozumieniu techniki biegu, by był on bardziej optymalny np. pod kątem poprawy wyników sportowych.

Doktorantka wykorzystwała model SLIP, znany w literaturze od 1989r., szeroko stosowany w opisie i badaniu mechaniki biegu. Chociaż model SLIP jest stosunkowo prosty, nie posiada jednak rozwiązania analitycznego. Dlatego w rozprawie wyznaczono przybliżone rozwiązania analityczne, aby następnie zbadać stabilność trajektorii i zależność parametrów od stabilnych rozwiązań modelu. Ponadto, zastosowane metody, w tym teoria zaburzeń i szeregi Poincarégo – Lindstedta dla różnych wartości sztywności sprężyny, umożliwiają oszacowanie błędów i wyznaczenie rzędu przybliżeń ważnych parametrów, takich jak: czas kontaktu z podłożem, maksymalne ugięcie sprężyny i przyrost kąta. Przybliżenia tych parametrów zostały wykorzystane do walidacji działania modelu w warunkach rzeczywistych.

Kolejnym wynikiem badawczym było zredukowanie dynamiki układu do jednego wymiaru, obserwując ruch „wierzchołka”, czyli punktu, w którym środek masy biegacza osiągnie najwyższy punkt fazy lotu. Zakładając, że zachodzi zasada zachowania energii i momentu pędu, przy pewnych dodatkowych uproszczeniach, skonstruowano odwzorowanie między kolejnymi wysokościami wierzchołków paraboli lotu środka masy (nazwane w rozprawie „odwzorowaniem powrotu od wierzchołka do wierzchołka”), a następnie znaleziono wystarczające warunki, gwarantujące istnienie punktu stałego tego odwzorowania, zarówno w przypadku rozwiązań symetrycznych (twierdzenie 4), jak i asymetrycznych (twierdzenie 5). Na koniec, zbadano stabilność punktu stałego (twierdzenie 6) i udowodniono występowanie transkrytycznej bifurkacji w uzyskanym rozwiązaniu (twierdzenie 7).

Otrzymane wyniki teoretyczne zostały wykorzystane w zrozumieniu i interpretacji danych pochodzących z rzeczywistych biegów z umiarkowanymi prędkościami. Wykonany eksperyment pomógł zweryfikować zgodność zaproponowanego modelu z rzeczywistymi danymi. W szczególności, wywnioskowano, że biegacz dąży do osiągnięcia stabilności przy minimalnym wydatku energetycznym, a zastosowanie modelu umożliwiło wyznaczenie energii potrzebnej do osiągnięcia stabilnego biegu.

2.3. Kontynuacja badań

W podrozdziale 5.5 Doktorantka zauważyła, że sposób w jaki asymetria kątowna powiązana jest z warunkiem minimalnej energii, wymaga dalszych badań analitycznych. Konieczne są dalsze badania, aby dostosować model do rzeczywistego biegu, np. poprzez dopuszczenie większej asymetrii (obecny model wymaga, aby kąty brzegowe były dostatecznie małe, a punkty stałe wystąpią jedynie, gdy kąty odbicia, w przeciwieństwie do kątów ataku, są duże i przekraczają zakres stosowalności modelu), czy wprowadzenie parametru sztywności zmiennego podczas fazy podporu (w obecnym modelu wartość sztywności nogi jest ustaloną stałą podczas trwania całej fazy podporu). Ważnym krokiem może też być skorelowanie energetyki biegu z wartością kąta natarcia bez uwzględniania parametru sztywności.

3. Konkluzja

Rozprawa doktorska pani mgr inż. Zofii Wróblewskiej zawiera nowe, interesujące wyniki naukowe w dziedzinie Nauk Ścisłych i Przyrodniczych w dyscyplinie Matematyka, a podjęta tematyka wymagała wiedzy interdyscyplinarnej.

Uważam, że rozprawa ta spełnia wymagania zdefiniowane przez Ustawę o stopniach naukowych i tytule naukowym z dnia 20 lipca 2018r. (z późniejszymi zmianami), w szczególności wymagania sformułowane w Art. 187:

- Rozprawa zawiera oryginalne rozwiązanie problemu naukowego.
- Kandydat posiada niezbędną ogólną wiedzę teoretyczną w dyscyplinie Matematyka.
- Kandydat posiada umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej.

Wnioskuje o dopuszczenie ocenianej rozprawy do dalszych etapów postępowania o nadanie pani mgr inż. Zofii Wróblewskiej stopnia doktora w dyscyplinie Matematyka.

Anna Ochal

dr hab. Anna Ochal