

prof. Grzegorz Plebanek
Instytut Matematyczny
Uniwersytetu Wrocławskiego
pl. Grunwaldzki 2, 50-384 Wrocław
e-mail: GRZEGORZ.PLEBANEK@MATH.UNI.WROC.PL

21 maja 2023 roku

Recenzja osiągnięcia naukowego dr. inż. Jerzego Leguta w postępowaniu habilitacyjnym

1. PODSTAWOWE DANE O KANDYDACIE

Dr inż. Jerzy Legut przedstawił rozprawę habilitacyjną (*osiągnięcie naukowe*), zatytułowaną "Problem sprawiedliwego podziału i twierdzenie Lapunowa". Składa się ona z cyklu 6 artykułów naukowych, opublikowanych w latach 1988–2020; cztery prace są publikacjami samodzielnymi, a 2 artykuły powstały we współpracy z Maciejem Wilczyńskim.

Poprzednie postępowanie w sprawie nadania kandydatowi stopni doktora habilitowanego rozpoczęło się w roku 2019 i zostało zakończone negatywnym wynikiem w roku następnym. W obecnie rozważanym wniosku trzy publikacje są *nowe* w tym sensie, że nie były przedmiotem oceny w postępowaniu sprzed czterech lat. Według deklaracji z autoreferatu, kandydat, kierując się opiniami ówczesnych recenzentów, do obecnego osiągnięcia dołączył dwie starsze prace (z roku 1988); ponadto obecnie rozważany cykl publikacji zawiera nową pracę z roku 2020.

Dr Legut jest od roku 1981 pracownikiem Politechniki Wrocławskiej; w ostatnich latach zatrudniony jako adiunkt na Wydziale Matematyki tej uczelni.

2. TEMATYKA ROZPRAWY I WRAŻENIA Z LEKTURY

Matematyka sprawiedliwego podziału powstawała w drugiej połowie XX wieku, począwszy od klasycznego pytania Steinhausa i pierwszych rezultatów Banacha, Knastera i Urbanika. W roku 1961 Dubins i Spanier opublikowali na ten temat ważny artykuł w *American Math. Monthly*, a w roku 1986 ukazał się równie ważna publikacja Eltona, Hilla i Kertza (oznaczana tutaj jako [EHK]) w *Trans. Amer. Math. Soc.*

Artykuły [H1] i [H2] nawiązują bezpośrednio do wyników z [EHK]; stanowią one pewną całość i zapewne fakt, że ogłoszone tu rezultaty zawarto w dwóch odrębnych publikacjach w tym samym czasie, wynika z odmiennej listy autorów. Oba artykuły ukazały się w *Proc. AMS* w roku 1988 i poświęcone były abstrakcyjnej wersji zagadnienia sprawiedliwego podziału w następującej wersji:

Dane są bezatomowe miary probabilistyczne $\mu_1, \dots, \mu_n$ na ustalonym σ -ciele zbiorów. Miary te wyznaczają wartości zbiorów z punktu widzenia n uczestników podziału. Dla danego wektora oczekiwań $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ szukamy mierzalnej partycji, której części, w pewnym sensie, maksymalizują proporcję otrzymanej części w stosunku do oczekiwanej.

Główny wynik pracy [H2] (Leguta i Wilczyńskiego) orzeka o istnieniu takiej optymalnej, z punktu widzenia wszystkich uczestników, partycji. Dowód nie jest długi, ale umiejętnie wykorzystuje pewne twierdzenie minimaksowe i pewną konsekwencję twierdzenia Lapunowa. Praca [H1] uzupełnia tę tematyki o pewne oszacowania dotyczące zagadnienia.

Prace te ulepszają część wyników Eltona, Hilla i Kertza z [EHK], podając dość krótkie dowody, zręcznie wykorzystujące istniejące już narzędzia. Praca [EHK] porusza wszakże dużo więcej aspektów sprawiedliwego podziału, na przykład zagadnienie dualne czy też próby dyskretyzacji matematycznego sformułowania zagadnienia.

W większości prac habilitanta rozpatruje się powyższy model matematyczny, a ten, ze swojej natury opisuje podział ‘dobra ciągłego, nieskończenie podzielnego’. Myśląc o praktycznych problemach warto rozważyć przestrzeń skończoną i, na przykład, miary o ‘małych’ atomach¹. Pozwoliłoby to zanurzyć się w kombinatorykę skończoną i zapewne dość trudne zagadnienie optymalizacji dyskretnej. Prawdopodobnie taki nurt został już do dziś znacząco rozwinięty...

Tytułowe twierdzenie Lapunowa orzeka, że obraz bezatomowej miary wektorowej o wartościach w $\mathbb{R}^n$ jest zwarty i wypukły. Artykuł [H3] (Leguta i Wilczyńskiego) poświęcony jest znalezieniu analitycznej formuły na obraz miary $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ o wartościach w $\mathbb{R}^2$, gdzie miary składowe są absolutnie ciągłe względem miary Lebesgue’a. Następnie autorzy ilustrują swój wynik, nawiązując do zagadnienia sprawiedliwego podziału w wersji omówionej powyżej. Trudno mi ocenić wartość głównego wyniku z pracy [H3], ale zawarte w tekście przykłady pozwalają przekonać się, że ‘analityczna’ złożoność opisu zbiorów Lapunowa na płaszczyźnie jest znaczna.

Praca [H4] także dotyczy obrazu bezatomowej miary wektorowej. $\mu : \text{Bor}[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Kontynuując trwającą latami dyskusję o różnych aspektach twierdzenia Lapunowa, autor dowodzi tu następującego twierdzenia związanego z obrazem miary: aby uzyskać odcinek łączący dwa punkty w tym obrazie wystarczy brać wartości miary na skończonych sumach odcinków w $[0, 1]$ o ustalonej (podanej wzorem) ilości składników. Jest to uogólnienie kilku wcześniejszych rezultatów, zręczne, ale niezbyt głębokie.

Artykuł [H4] deklaruje w streszczeniu rozważanie miar o wartościach w $\mathbb{R}^n$, ale w istocie w dalszym ciągu skupia się na przypadku gdy rozkłady brzegowe miary są miarami probabilistycznymi. Jak to pokazuje Vilmos Totik (*A tale of two integrals*, Amer. Math. Monthly 106 (1999), 227–240), rozważane zagadnienie dla $n = 2$ jest dużo prostsze w tym drugim przypadku. Warto dodać, że związki twierdzenia Lapunowa z zagadnieniami optymalizacji są znacznie bardziej złożone, patrz na przykład artykuł Czesława Olecha, *The Lyapunov theorem: its extensions and applications*, Methods of nonconvex analysis (Varennia, 1989), 84–103, Lecture Notes in Math. 1446, Springer, Berlin, 1990.

Artykuł [H5] analizuje zagadnienie sprawiedliwego podziału odcinka $[0, 1]$; preferencje n uczestników podziału zadane są znowu przez probabilistyczne miary absolutnie ciągłe. Sprawiedliwy podział w tym przypadku oznacza, że *każdy dostaje, w swoim mniemaniu, tyle co inni*. Główny rezultat sprowadza zagadnienie, przy pewnych technicznych warunkach na gęstości wspomnianych miar, do zagadnienia optymalizacji (które to zagadnienie jest na ogół nieliniowe). Projektuje się tym samym algorytm, który przy pewnych technicznych założeniach pozwala wyliczyć sprawiedliwy podział. Metoda ilustrowana jest na

¹Czasami warto zapytać o dzielenie cukierków, a nie tortu...

przykładzie podziału na 3 części przy gęstościach miary będących zadanymi wielomianami małego stopnia. Praca ukazała się czasopiśmie poświęconym badaniom operacyjnym i rzeczywiście zdaje się wносить pewien wkład do szeroko pojmowanego *programowania matematycznego*. Pozostaje jednak po teoretycznej stronie badania zagadnienia — wydaje się, że pewna dyskusja złożoności obliczeniowej algorytmu dla gęstości ustalonego typu byłaby tu bardzo wskazana. Poza tym, mając na względzie złożoność proponowanego algorytmu, warto przyjrzeć się uproszczeniom, które szukają przybliżonych rozwiązań z zadaną dokładnością.

Praca [H6] nawiązuje do wyniku Cheže'ego (z 2017 roku), który, wykorzystując twierdzenie Borsuka-Ulama o antypodach, podał zaskakująco prosty dowód istnienia sprawiedliwego podziału $[0, 1)$ na odcinku (dla zagadnienia wspomnianego powyżej; tutaj 'sprawiedliwy' w sensie 'każdy dostaje, w swoim mniemaniu, tyle samo'). W omawianej pracy dowodzi się analogicznego twierdzenia dla podziału kwadratu na prostokąty oraz szkicuje metodę dzielenia proporcjonalnego.

3. OCENA ROZPRAWY I CAŁOŚCI DOROBKU NAUKOWEGO KANDYDATA

Oceniając całość rozprawy, nietrudno wyrazić mi następujące zastrzeżenia:

1. Tematyka rozprawy habilitacyjnej jest niesłyszanie wąska, ogranicza się w zasadzie do badania obrazu bezatomowej miary o wartościach w $\mathbb{R}^n$.
2. Metody dowodowe nie są specjalnie wyrafinowane; na ogół rozpatruje się miary składowe będące zadane przez gęstości względem miary Lebesgue'a i analiza dotyczy wzajemnych relacji pomiędzy tymi funkcjami.
3. Pracom [H1–H6] można zarzucić brak matematycznej głębi: każdy artykuł pisany był raczej z myślą o przedstawieniu jednego lub dwóch wyników nawiązujących do literatury przedmiotu niż dokonania przełomu, zaprezentowania nowego spojrzenia czy metody.
4. Percepcja dokonań habilitanta jest dość skromna: według bazy MATHSCINET 19 publikacji ma 19 cytowań, najczęściej cytowana jest 'stara' praca [H1] (8 razy).

Z drugiej strony, według klasyfikacji MATHSCINET głównym obszarem matematycznych poczynąń dr. Leguta są badania operacyjne i programowanie matematyczne. Dlatego powyższa krytyczna ocena matematyka-teoretyka wymaga uzupełnienia. To jest dla mnie większym wyzwaniem — moje poczynania matematyczne od wielu lat koncentrują się na abstrakcyjnych (teoriomiarowych, teoriomnogościowych i topologicznych) metodach w teorii przestrzeni Banacha. Moja znajomość programowania matematycznego ogranicza się do klasyki programowania liniowego i wybranych zagadnień optymalizacji dyskretnej; nie śledzę bieżącej literatury w tej dziedzinie. Jest jednak jasne, że problem, często chwytnie opisywany w potoczny sposób jako sprawiedliwy podział ciastka, to bardzo ciekawe zagadnienie matematyczne, istotne dla wielu praktycznych problemów (dzielić można ziemię uprawną, ale i dostęp do informacji czy też częstotliwości radio-we).

Moja próba oceny dokonań habilitanta z punktu widzenia teorii i praktyki programowania matematycznego doprowadziła do znacznie pozytywniejszych konstatacji:

- (A) Artykuły [H5] i [H6], choć dość teoretyczne w swojej naturze, wnoszą istotny, z punktu widzenia badań operacyjnych, wkład do zagadnienia sprawiedliwego podziału.
- (B) Artykuły [H1] i [H2] są niezłe z punktu widzenia metod dowodowych: argumenty są dość krótkie i zwięzłe.
- (C) Czytelnik całości [H1 – H6] może odnieść dobre wrażenie, że autor, pomimo zajmowania się dość konkretnym zagadnieniem przez tyle lat, unika nadmiernego samopowtarzania; każda z prac stara się powiedzieć coś nowego.
- (D) Na korzyść habilitanta przemawia fakt, że po tak znacznej przerwie w pracy naukowej, potrafił nawiązać do aktualnych nurtów i kontynuować badanie swojego ulubionego zagadnienia, publikując w rozpoznawalnych czasopismach specjalistycznych.
- (E) Większość wcześniejszych prac kandydata jest cytowana w monografii Bramsa i Taylora (*Fair division. From cake-cutting to dispute resolution*, Cambridge University Press 1996).

W związku z (C) muszę zaznaczyć, że nie badałem dokładniej pozostałego dorobku kandydata pod tym kątem, ale nawet pobieżna analiza wykazuje, że i te publikacje nie oddalają się zbyt od zagadnienia rozważanego w habilitacji. Niektóre artykuły rozważają dość naturalne, z czysto teoretycznego punktu widzenia, uogólnienia zagadnienia sprawiedliwego podziału na nieskończenie wielu uczestników. Do części prac, na przykład tych związanych z teorią gier, nie mam w tej chwili dostępu.

W związku z długoletnią przerwą w działalności badawczej, uczestnictwo dr. Leguta w życiu naukowym przedstawia się dość skromnie. Warto jednak podkreślić, że zarówno w okresie tuż po doktoracie, jak i w ostatnich latach habilitant współpracował naukowo z matematykami z innych krajów i ta współpraca zaowocowała wspólnymi publikacjami.

4. KONKLUZJA OPINII

Jak to próbuję wyjaśnić powyżej, dość trudno wyrobić sobie jednoznaczną opinię o omawianej rozprawie habilitacyjnej. Rozważając odnotowane za i przeciw skłaniam się jednak do opinii, że dr. Jerzy Legut przedstawił rozprawę wnoszącą istotny wkład do uprawianej dyscypliny matematycznej, a jego osiągnięcie naukowe spełnia oczekiwania środowiska matematycznego w tym zakresie. Popieram wniosek kandydata o nadanie mu stopnia doktora habilitowanego nauk matematycznych.

