

Wrocław, 8.09.2023r.

prof. dr hab. Adam Nowak
Instytut Matematyczny
Polskiej Akademii Nauk

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Wojciecha Słomiana

pod tytułem

Aspects of discrete harmonic analysis
(*Aspekty dyskretnej analizy harmonicznej*)

Informacje wstępne

Rozprawa doktorska mgra Wojciecha Słomiana liczy około 120 stron i jest napisana zasadniczo w języku angielskim. Częścią dysertacji jest streszczenie opisujące wyniki rozprawy, ich motywacje i tło literaturowe, które zostało zredagowane w polskiej wersji językowej.

Rozprawa podzielona jest na 4 rozdziały, z których pierwszy ma charakter wstępny, przedstawiony jest w nim zarys historyczny i sformułowane są główne wyniki pracy. Drugi rozdział zawiera opis podstawowych narzędzi i własności stosowanych w dalszych częściach rozprawy. Kolejne dwa rozdziały zawierają nowe rezultaty/dowody otrzymane przez doktoranta i są oparte na następujących pracach matematycznych (numeracja zgodna z rozprawą).

- [D1] M. Mirek, W. Słomian, T.Z. Szarek, *Some remarks on oscillation inequalities*, Ergodic Theory Dynam. Systems 43 (2023), 3383–3412.
- [D2] W. Słomian, *Oscillation estimates for truncated singular Radon operators*, J. Fourier Anal. Appl. 29 (2023), Paper No. 4, 22 pp.
- [D3] W. Słomian, *Bootstrap methods in bounding discrete Radon operators*, J. Funct. Anal. 283 (2022), Paper No. 109650, 30 pp.

Jak widać, prace [D1-D3] zostały opublikowane w bardzo dobrych zagranicznych periodykach matematycznych.

Praca [D1] jest współautorska, ale wynik stanowiący główny wkład [D1] do dysertacji jest indywidualnym osiągnięciem doktoranta (zgodnie z jego deklaracją w rozprawie). W stosunku do artykułów [D1-D3] treść rozprawy jest istotnie poszerzona o rozmaite szczegóły, dodatkowe opisy oraz wyjaśnienia, i jako taka stanowi odrębną prezentację.

Zarys tematyki

Rozprawa wpisuje się w nurt zwany dyskretną analizą harmoniczną. Jest to bardzo ciekawy i relatywnie nowy obszar badań na styku analizy harmonicznej, teorii ergodycznej i analitycznej teorii liczb, który znalazł się w kręgu zainteresowań wielu znakomitych matematyków.

Głównymi obiektami badanymi w dysertacji są

- ◇ dyskretne operatory średniujące typu Radona $M_t^{\mathcal{P}}$,
- ◇ dyskretne przycięte całki singularne typu Radona $H_t^{\mathcal{P}}$

oraz ich ciągle odpowiedniki \mathcal{M}_t^P i \mathcal{H}_t^P . Są to uogólnienia klasycznych obiektów: dyskretnych operatorów średniujących, (przyciętych) dyskretnych całek singularnych oraz ich ciągłych odpowiedników. Z grubsza rzecz biorąc, uogólnienie polega na zastąpieniu w pewnym miejscu w definicjach klasycznych obiektów przekształcenia identycznościowego dużo ogólniejszym przekształceniem wielomianowym. Ponadto w rozprawie rozważa się średniowanie (w przypadku M_t^P i \mathcal{M}_t^P) i przycinanie (dla H_t^P i \mathcal{H}_t^P) względem pewnej rodziny ciał wypukłych, która stanowi uogólnienie rodziny kul euklidesowych występujących w klasycznych odpowiednikach.

Klasyczne operatory średniujące i całki singularne są centralnymi obiektami współczesnej analizy harmonicznej, których badanie ma długą i bogatą historię. Operatory średniujące są ściśle związane z funkcją maksymalną Hardy’ego-Littlewooda, której studiowanie sięga lat 30tych ubiegłego wieku i pionierskich prac Hardy’ego i Littlewooda oraz Wienera. Natomiast teoria całek singularnych ma swoją genezę zasadniczo w przełomowej pracy Calderóna i Zygmunda z lat 50tych ubiegłego wieku, choć korzenie sięgają prac M. Riesz z lat 20tych XX wieku. Obecnie literatura dotycząca tych obiektów jest ogromna.

Uogólnienia typu Radona pojawiły się stosunkowo niedawno, m.in. w związku z zastosowaniami w kontekście parabolicznych równań różniczkowych oraz głębokimi powiązaniem z teorią ergodyczną. Fundamentalne metody i wyniki na tym polu są w dużej mierze zasługą niedawno zmarłych luminarzy analizy harmonicznej E.M. Steina i J. Bourgaina i ich znamienitych współpracowników, m.in. M. Christa, A. Ionescu, A. Magyara, A. Nagela i S. Waingera. W ostatnich latach do badań w tym nurcie z sukcesem dołączyło młodsze pokolenie, m.in. P. Zorin-Kranich i polscy matematycy M. Mirek (promotor główny recenzowanej rozprawy) i B. Trojan, osiągając wyniki na absolutnie światowym poziomie.

Należy podkreślić, że badania związane z operatorami typu Radona, a zwłaszcza ich dyskretnymi wariantami, są skomplikowane i technicznie trudne, w szczególności wymagają zaawansowanych metod i wyrafinowanych narzędzi łączących różne obszary matematyki. Wiele z takich technik i narzędzi zostało mozolnie wypracowanych w ostatnich dekadach przez wymienionych powyżej autorów, a pośrednio o głębi tych rezultatów świadczy ranga czasopism, w których ukazywały się ich prace, m.in. *Annals of Mathematics*, *Acta Mathematica*, *Journal of the American Mathematical Society* i *Inventiones Mathematicae*.

Wyniki rozprawy

Celem rozprawy jest badanie oszacowań ℓ^p lub L^p dla kilku rodzajów półnorm operatorów M_t^P , H_t^P , \mathcal{M}_t^P i \mathcal{H}_t^P . Motywacją są tu m.in. zastosowania takich szacowań w teorii ergodycznej oraz związku ze zbieżnością punktową prawie wszędzie przy $t \rightarrow 0^+$. Cel dysertacji świetnie lokuje się na froncie aktualnych badań w dyskretniej analizie harmonicznej, jak również ma solidne umocowanie w literaturze przedmiotu.

Głównymi wynikami rozprawy są *jednostajne* oszacowania ℓ^p lub L^p półnormy oscylacyjnej operatorów M_t^P , H_t^P , \mathcal{M}_t^P i \mathcal{H}_t^P (Twierdzenia 1.45 i 1.48) oraz nowe podejście do jednostajnych szacowań ℓ^p dla półnorm oscylacyjnej i wariacyjnej oraz quasi-półnormy skokowej dla dyskretnych średnich Radona M_t^P (Twierdzenie 1.51).

Wyniki zawarte w Twierdzeniach 1.45 i 1.48 są oryginalne. Tutaj metody dowodowe odwołują się m.in. do bardzo świeżych osiągnięć w przedmiotowej dziedzinie i prac Mirka, Steina, Trojana i Zorin-Kranicha. Istotnymi narzędziami dowodowymi są m.in. metoda luków Hardy’ego-Littlewooda, teoria mnożników Ionescu-Waingera, martyngały diadyczne oparte na kostkach Christa i nierówność Rademachera-Menshova.

Wyniki zawarte w Twierdzeniu 1.51 nie są oryginalne, ale nowy jest ich dowód i to właśnie stanowi nowatorski wkład rozprawy. Kluczowa idea polega na zastosowaniu metod

bootstrapowych, co prowadzi do krótszych, bardziej elementarnych i bardziej autonomicznych dowodów rezultatów otrzymanych uprzednio przez Mirka, Steina, Szarka, Trojana, Zorin-Kranicha i autora rozprawy. Takie podejście było motywowane niedawną pracą Mirka, Steina i Zorin-Kranicha, gdzie techniki bootstrapowe zostały użyte do uzyskania nierówności skokowych w przypadku ciągłych operatorów typu Radona. Istotnym narzędziem dowodu Twierdzenia 1.51 jest dyskretna teoria Littlewooda-Paley'a sformułowana kilka lat temu przez Mirka.

Należy podkreślić, że obiekty badane w rozprawie mają złożoną strukturę, a rozumowania dowodowe mają zawiły techniczny charakter i ich przeprowadzenie było wysoce niebanalne. Ponadto przedstawione argumentacje wymagają zaawansowanego aparatu matematycznego i odwołują się do bardzo świeżych osiągnięć w dziedzinie. Całość stanowi niewątpliwie głęboką, wartościową matematykę.

Ocena

Dysertacja mgra Wojciecha Słomiana ma zdecydowanie charakter pracy badawczej, jej wkład jest oryginalny i wartościowy z punktu widzenia rozwoju dyskretnej analizy harmonicznej. Wyniki są dobrze umotywowane, w szczególności silnie umocowane w istniejącej literaturze, tworzą spójną całość oraz wpisują się w tematykę badań podejmowanych wcześniej i aktualnie w prestiżowych ośrodkach naukowych. Rezultaty rozprawy zostały już opublikowane w renomowanych zagranicznych czasopismach matematycznych.

Nie ulega wątpliwości, iż doktorant posiada szeroką wiedzę z zakresu tematyki rozprawy, jak również znakomite rozeznanie literaturowe. Opanował warsztat subtelnych narzędzi analitycznych i z powodzeniem go stosuje. Potrafi operować trudnymi technikami czy delikatnymi argumentami. Posiadał głębokie zrozumienie problematyki podejmowanej w dysertacji i sporą samodzielność badawczą (nowe wyniki prezentowane przez doktoranta są jego indywidualnym osiągnięciem).

Pod względem redakcyjnym i strukturalnym dysertacja prezentuje się dobrze. Rezultaty formułowane są przejrzysto a dowody prowadzone z należytą starannością, w sposób przyjazny dla czytelnika. Ogólnie redakcja dysertacji stoi na wysokim poziomie, co znamionuje wysoką kulturę matematyczną doktoranta. Dziwią jednak recenzenta liczne misprinty i usterki językowe. Zaburza to nieco estetykę odbioru rozprawy, ale w żadnej mierze nie rzutuje na stronę merytoryczną; z perspektywy matematycznej tekst jest w pełni zrozumiały.

Podsumowanie

Recenzowana rozprawa doktorska wnosi istotny nowatorski wkład do rozwoju dyskretnej analizy harmonicznej. Badane zagadnienia wymagają zaawansowanej wiedzy, wysoce złożonej analizy i pokonania poważnych trudności. Dysertacja reprezentuje zdecydowanie ponadprzeciętny poziom i z naddatkiem spełnia wszelkie wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim w dyscyplinie Matematyka. Wnoszę o uznanie dysertacji mgra Wojciecha Słomiana za wyróżniającą.



Prof. dr hab. Adam Nowak
Instytut Matematyczny
Polskiej Akademii Nauk