Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Tomasza Werona

Rozprawa doktorska mgr. Tomasza Werona poświęcona jest matematycznym modelom dynamiki opinii. Doktorant konstruuje a następnie analizuje pewne modyfikacje klasycznego modelu Sznajdów oraz modelu q-wyborcy (q-voter). Ta część rozprawy (opublikowane prace 1-3) nie ma bezpośredniego związku z odnawialnymi źródłami energii. Problemy rozprzestrzeniania się (diffusion) innowacji, a konkretnie fotowoltaiki, omawiane są w pracy 4 dostępnej na arXiv. Rozważane tam konstrukcje oparte są na modelu q-wyborcy co uzasadnia włączenie poprzednich prac do rozprawy i stanowi o jej spójności.

Rozprawa jest interdyscyplinarna: badana jest ewolucja i stany stacjonarne układów dynamicznych modelujących rzeczywiste procesy społeczne, ilościowe wyniki otrzymane są przy pomocy symulacji komputerowych oraz analitycznych przybliżeń znanych w fizyce statystycznej, następnie przeprowadzana jest dyskusja ważności wyników w kontekście zastosowań, formułowane są wnioski i odpowiedzi na pytania zadawane w naukach społecznych.

Matematyczna metodologia rozprawy jest następująca. Konstruowany jest układ oddziałujących osobników znajdujących się w wierzchołkach grafu (węzłach sieci społecznej). Dynamika zadana jest poprzez odpowiedni łańcuch Markowa (model agentowy ABM), przeprowadzane są symulacje Monte-Carlo. W łańcuchach ze stanami pochłaniającymi estymowane są prawdopodobieństwa dojścia (fixation probability, w rozprawie autor używa pojęcia exit probability) oraz średni czas dojścia do danego stanu pochłaniającego, w łańcuchach ergodycznych analizowany jest stan stacjonarny. Doktorant następnie używa standardowych przybliżeń pola średniego (mean-field - MFA) i przybliżenia par (pair approximation - PA) i wykazuje w wielu przypadkach dobrą zgodność przybliżeń z symulacjami stochastycznymi łańcuchów Markowa. W mojej ocenie wyniki doktoranta są bardzo ciekawe z punktu widzenia interpretacji i zastosowań, nie rozwijają jednak w znaczący sposób metod matematycznych analizy modeli przestrzennych. W sekcji 1.3 rozprawy Contribution to the discipline of Mathematics nie znajdziemy przedstawienia nowych metod matematycznych, twórczego rozwinięcia metod przybliżania procesów stochastycznych na grafach dynamiką deterministyczną.

Przejdę teraz do szczegółowego omówienia każdej z prac.

Artykuł 1, On reaching the consensus by disagreeing

W klasycznym jedno-wymiarowym modelu Sznajdów doktorant wprowadza prawdopodobieństwo **p** przyjęcia przez osobnika opinii przeciwnej do opinii sąsiada, jeżeli dwóch sąsiadów (bliższy i dalszy) mają przeciwne opinie; p = 1 odpowiada oryginalnemu modelowi, p = 0 oznacza nic nie robienie. Dla dowolnego p odpowiadający mu łańcuch Markowa (doktorant niestety nie używa tego pojęcia) ma 3 pochłaniające stany: wszyscy osobnicy przyjmują opinię 1 (konsensus dodatni), wszyscy przyjmują opinie 0 (konsensus ujemny) oraz osobnicy przyjmują opinie 1 i 0 naprzemiennie (disagreement). W przypadku p=0,1 jedyną losowością jest wybór osobnika do ewentualnej zmiany strategii, dla 0<p<1 mamy losową regułę. Główny wynik pracy to pokazanie, że wyrażenia na prawdopodobieństwo znalezienia się w stanie pochłaniającym z konsensusem dodatnim (3.1 - 3.2 w rozprawie i (2) w artykule) przenoszą się na przypadek dodatniego $p < p^*$, gdzie p^* jest wartością krytyczną zależną od stanu początkowego i rozmiaru populacji N. Doktorant nie napisał w jaki sposób doszedł to takich wzorów, czy mamy rozumieć, że dopasowano wzór do krzywej? Na stronie 3 artykułu czytamy „It was previously claimed that … for p < 1 only consensus is possible ….” Nie wiem na jakiej podstawie tak twierdzono, przecież dla każdego $p > 0$, takie same ruchy są dozwolone, tylko z różnymi prawdopodobieństwami więc nie może to być prawdą dla skończonego N. Wydaje się, że doktorant powiela w pewnym zakresie takie stwierdzenie, kiedy pisze, że dla N=100, dla losowych warunków początkowych ($c_0 = 0.5$) i dla $p < p^*=0.8$, konsensus jest osiągany z prawdopodobieństwem 1. Powinno być „z prawdopodobieństwem tym bliższym 1 im większe jest N i mniejsze p”. Mamy tutaj przykład braku precyzyjnych matematycznych stwierdzeń co jest niestety powracającym problemem w pozostałych artykułach będących częścią rozprawy. Autorzy artykułu powinni zaprezentować łańcuch Markowa i sformułować odpowiednie hipotezy związane z dwoma przejściami granicznymi: $N \to \infty$, $p \to 0$. Doktorant ma tutaj na swoją obronę krótką dyskusję, że $p^* \to 1$ gdy $N \to \infty$. Dalej jednak pisze, że dla $p = p^*$ pojawia się stan niezgodny (disagreement). On zawsze istnieje dla skończonego N i jest stabilny. Natomiast bardzo ciekawe jest pytanie co się dzieje w punkcie p^*, jaki jest mechanizm doprowadzający do przejścia fazowego (które jak słusznie piszą autorzy znika w granicy nieskończonego N a więc nie mamy tutaj klasycznego przejścia fazowego w sensie matematycznej fizyki statystycznej). Nie wiem dlaczego po całej dyskusji autorzy piszą na końcu strony 3, że średni czas dojścia do stanu pochłaniającego zależy od wielkości systemu w odróżnieniu of prawdopodobieństwa dojścia. Mamy tutaj też trochę cyfrówek: na górze str. 3-ciej p^* powinno dążyć do 1 a nad wzorem (2) powinno być $p < p^*$.

Artykuł 2, Opinion evolution in divided community

W pracy tej doktorant analizuje model q-wyborcy z osobnikami rozmieszczonymi na grafie, który składa się z dwóch klik (grafów zupełnych z N wierzchołkami), między którymi istnieje $L \cdot N^2$ krawędzi , gdzie $L < 1$. Warto tutaj wspomnieć, że rozważane modele są modyfikacjami modeli dyskutowanych w opublikowanych kilka lat wcześniej artykułach, których doktorant był współautorem. Nowością tutaj jest wprowadzenie losowości do standardowego modelu q-wyborcy (nazywanej przez autorów independence), to znaczy w każdym kroku wybrany osobnik zmienia swoją opinię z góry zadanym prawdopodobieństwem. Konsekwencją wprowadzenia takiej losowości dostajemy ergodyczny łańcuch Markowa (w szczególności nieprzywiedlny, to znaczy taki, w którym z każdego stanu można przejść do każdego stanu w skończonej liczbie kroków) z jedynym stacjonarnym rozkładem prawdopodobieństwa. Warto było o tym napisać, ma to swoje interpretacyjne konsekwencje.

W Twierdzeniu 3.1 w rozprawie autorzy przechodzą N do nieskończoności, sprawa staje się subtelna, łańcuch Markowa staje się procesem Markowa na nieprzeliczalnej przestrzeni stanów. Trudno tutaj więc mówić o twierdzeniu i dowodzie, to jest heurystyka z elementem pola średniego. Tak czy owak równania (3.6) są intuicyjnie jasne. Na początku jest jak zwykle model oddziałujących osobników, łańcuch Markowa i symulacje stochastyczne Monte-Carlo a potem następuje porównanie z przybliżeniem pola średniego, które wychodzi dobrze. Jak wspomniałem wyżej, mamy do czynienia z łańcuchem Markowa z jednym rozkładem stacjonarnym, możemy więc rozważać gdzie prawdopodobieństwo jest skoncentrowane i jak rozkład zmienia się jakościowo wraz ze zmianą parametrów. Doktorant obserwuje i opisuje bardzo ciekawe przejścia fazowe, istnienie krytycznych wartości L* i p*. Czy w granicy N nieskończonego mamy do czynienia z rzeczywistym przejściem fazowym związanym na przykład ze współistnieniem faz wydaje się być bardzo ciekawym otwartym problemem.

Artykuł 3, Composition of the influence group in the q-voter model and its impact on the dynamics of opinions

W artykule porównywana jest zależność częstości danych opinii (koncentracji w terminologii autorów od czynnika losowego (independence) w modelu q-wyborcy na regularnych sieciach losowych z możliwością powtórnego wyboru sąsiada (repetition) i z q różnymi sąsiadami (no repetition). Zaobserwowano istnienie przejścia fazowego – krytycznego prawdopodobieństwa p*, powyżej którego układ jest nieuporządkowany (częstości przeciwstawnych opinii są sobie równe). Dwa główne wyniki pracy to: 1. W modelu bez powtórzeń p* jest mniejsze niż w modelu z powtórzeniami, 2. Różnice pomiędzy dwoma modelami są tym większe im q jest bliższe stopniowi wierzchołków. Oba wyniki wydają się być intuicyjnie zrozumiałe.

Z matematycznego punktu widzenia model autorów jest ergodycznym łańcuchem Markowa. Autorzy wykonali symulacje stochastyczne Monte-Carlo, w wyniku których otrzymali przybliżenie stacjonarnego rozkładu prawdopodobieństwa. Na stronie 4. artykułu piszą, że wykonują symulacje do momentu uzyskania stabilnego stanu. Oczywiście nie chodzi o stan stabilny ale stacjonarny i tylko w przybliżeniu - tylko w granicy nieskończonego czasu dostajemy zgodnie z twierdzeniem ergodycznym stan stacjonarny procesu stochastycznego. Powinno się zawsze sprecyzować kiedy decydujemy się zakończyć symulacje i jej wyniki dobrze przybliżają stan stacjonarny.

Tak jak i w pozostałych artykułach wchodzących w skład rozprawy, autorzy konstruują różne klasyczne przybliżenia, średniego pola i par, pokazują jak dobre są odpowiadające im wyniki analityczne. Przybliżenia te są reprezentowane przez odpowiednie równania (albo układy) różniczkowe zwyczajne. W artykule (i w rozprawie) nie ma niestety jakościowej analizy równań – basenów przyciągania, bifurkacji. Zastanawiam się na przykład w jaki sposób z równania (6) można uzyskać stan stacjonarny jako funkcję p na Fig. 5. i co za tym idzie p*. Nie wiemy też w jaki sposób wyprowadzono równanie (11), jest też tam literówka niepoprawiona w rozprawie – brak *. Wzór (19) jest zagadką, część oznaczeń nie jest precyzyjnie zdefiniowana.

Dodatkowo autorzy przeprowadzili symulacje dla różnych wielkości populacji i zasugerowali wystąpienie rzeczywistego przejścia fazowego w granicy termodynamicznej. To bardzo ciekawa obserwacja.

Artykuł 4, Multilayer diffusion model of photovoltaic installations

Jest to praca jednoautorska złożona do arXiv. Wstęp jest w dużej części tożsamy z rozdziałem rozprawy (1.1 Background) o czym zresztą informuje nas autor. Poświęcony jest motywacjami związanymi z globalnym ociepleniem, zanieczyszczeniem środowiska, odnawialnymi źródłami energii a w szczególności z rozprzestrzenianiem się instalacji fotowoltaicznych. Są to bardzo ważne problemy i rzeczywiście inspiracje do prowadzenia badań z matematyki stosowanej w oparciu o dane i w odpowiedzi na konkretne pytania ze sfery gospodarczo-społecznej. W przypadku artykułu, wnioski są jednak raczej natury ogólnej aczkolwiek bardzo ciekawe i mające potencjał do bardziej pogłębionego modelowania.

Doktorant przedstawia model dynamiki opinii i instalacji fotowoltaiki w gospodarstwach domowych – model q-wyborcy na dwu-warstwowej sieci (multilayer metwork), graf obserwacji fotowoltaiki na dachach sąsiadów (Z^2 z ośmioma sąsiadami) oraz graf przepływu informacji (graf Wattsa-Strogatza). Jeżeli na obu warstwach sieci, q sąsiadów na pierwszej warstwie ma zainstalowaną fotowoltaikę oraz q sąsiadów wybranych oddzielnie na drugiej sieci ma o niej pozytywną opinię, to nasz osobnik przyjmuje taką opinię i następnie z pewnym niezerowym prawdopodobieństwem zainstaluje fotowoltaikę. W przypadku negatywnej opinii nasz osobnik może urządzenie zdemontować. Jest to tak zwany model AND, rozważany jest również model OR. Istotnym elementem modeli jest możliwość zmiany opinii z dodatnim prawdopodobieństwem bez względu na strukturę otoczenia (independence). Ten dodatkowy element losowy powoduje, że z matematycznego punktu widzenia model jest ergodycznym łańcuchem Markowa a więc posiada jedyny stacjonarny rozkład prawdopodobieństwa na stanach układu. Do tej uwagi powrócę w dalszej części recenzji. Natomiast teraz mam pytanie czy stan osobnika nie powinien być powiązany ze stanem jego domu, to znaczy czy zmienne A i S nie powinny być zależne - jeżeli ktoś ma fotowoltaike to pewnie ma pozytywną o niej opinię.

Mam kilka pytań dotyczących innowacyjności modelu doktoranta. W Introduction wspomina on o pracy Bassa [14]. Niestety w rozprawie nie ma dyskusji porównującej wyniki tych dwóch modeli. Model Bassa jest deterministyczny ale jak dalej zobaczymy, model pola średniego (MFA) rozpatrywany w rozprawie jest oczywiście też deterministyczny i na dodatek nie odwołuje się w żaden sposób do konkretnej sieci. Doktorant wspomina także (też bez żadnego omówienia) model q-wyborcy z prac [35, 41]. Oba grafy w dwu-sieci są tam takie same w odróżnieniu od pracy 4 ale jak się okazuje, równania pola średniego i tak nie różnicują grafów.

Przejdę teraz do uwag i pytań technicznych czyli matematycznych.

1. Wyjściowym modelem jest łańcuch Markowa. W Twierdzeniu 1, doktorant nie mówi nam nic o granicy $N \rightarrow \infty$, w której to dostajemy proces Markowa na nieprzeliczalnej przestrzeni stanów. Wprowadza on raczej pewien ansatz pola średniego, gdzie równania (3-4) pisze się w sposób naturalny, trudno więc tutaj mówić o dowodzie. Taki dowód musiałby używać twierdzeń granicznych z rachunku prawdopodobieństwa.
2. W Twierdzeniu 2, doktorant wyprowadza równania na stany stacjonarne (punkty krytyczne układu równań różniczkowych (3-4)). Udowadnia, że istnieje co najmniej jeden stan stacjonarny. Nie znamy jednak parametrów modelu, dla których istnieją 3 stany stacjonarne, które widać na Fig. 6. Na rysunku tym widzimy, że istnieje krytyczna wartość losowego parametru p* (independence), powyżej której z 3 stanów zostaje tylko 1. Na temat tej bifurkacji oraz basenów przyciągania dla p <p* p nie ma żadnej dyskusji. Na lewym panelu Fig. 6 autor prezentuje czasy dojścia do stanu stacjonarnego (w modelu deterministycznym) ale nie wiemy którego i z jakich warunków początkowych.
3. Z powodu losowych zaburzeń, rozpatrywane układy są ergodycznymi łańcuchami Markowa, z jedynym stacjonarnym rozkładem prawdopodobieństwa. W związku z tym niezrozumiałe są następujące stwierdzenia w artykule:

   a) W streszczeniu czytamy, że dla pewnych parametrów, innowacje zachodzą niezależnie od warunków początkowych.

   b) Na stronie 17 czytamy, że w modelu MFA dostajemy wszystkie stany stacjonarne, natomiast w symulacjach stochastycznych dostajemy tylko te stany stacjonarne, które są dostępne z danych warunków początkowych. Jest dokładnie odwrotnie – ewolucja dynamiki różniczkowe zależy od warunków początkowych, od basenu przyciągania, z którego zaczynamy. Natomiast stan stacjonarny łańcucha Markowa jest jeden, możemy badać gdzie jest rozkład prawdopodobieństwa skoncentrowany, może jest skoncentrowany wokół dwóch stanów i wtedy fundamentalnym pytaniem jest czy stany te przetrwają w granicy termodynamicznej $N \rightarrow \infty$. Być może niektóre stany są trudno osiągalne, trzeba na nie długo czekać, w zależności od warunków początkowych.

c) Fig. 6 sugeruje nieciągłe przejście fazowe w p* w modelu stochastycznym. Warto to sprawdzić. Czy trajektorie procesu oscylują pomiędzy dwoma stanami w p* tak jak w ferromagnetycznym modelu Isinga?

d) W Dodatku rozpatrywane są inne warunki początkowe. Autor pracy pisze, że w modelu AND nie prowadzi to do innych wyników, natomiast w modelu OR różnice są istotne. Rozumiem, że chodzi tu o ewolucję a nie o stany stacjonarne.

Powyższe pytania związane z ergodycznością łańcucha wymagają wyjaśnień.

Praca 4 zawiera wiele bardzo interesujących wyników otrzymanych w symulacjach stochastycznych. Zaskakujący jest fakt, że przybliżenie pola średniego zgadza się w wynikami symulacji stochastycznych choć nie zawiera żadnych odniesień do konkretnych grafów ani ich charakterystyk takich jak liczba sąsiadów w Z^2 czy β w grafie Wattsa-Strogatza. Pojawia się pytanie czy dla innych gafów będzie to samo. Podważa to też w pewnym sensie narrację doktoranta, że model przestrzenny ma znaczenie w rozprzestrzenianiu się fotowoltaiki. To wymaga komentarza ale też i symulacji na innych grafach.

Praca została wysłana do arXiv ale pewnie też do czasopisma i oczekuje na recenzje albo może już one nadeszły. Na przykład wzór (2) z licznymi cyfrówkami został już poprawiony na arXiv. Tak więc artykuł ten może jest w trakcie nanoszenia innych poprawek ale na pewno będzie miał niezależną recenzję.

Pomimo wielu krytycznych uwag, uważam, że rozprawa mgr.Tomasza Werona jest bardzo wartościowa, prezentuje ważne wyniki, w sensie formalnym, ustawowym, zawiera „oryginalne rozwiązanie problemu naukowego". W związku z tym moja końcowa ocena jest pozytywna. Dopuszczam mgr. Tomasza Werona do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Podpisano przez/ Signed by:
JACEK
MIĘKISZ
Data/ Date: 24.03.2025 09:28
mSzafir

Jacek Miękisz
Uniwersytet Warszawski
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki
Banacha 2, 02-097 Warszawa