Warszawa, 18.09.2023 r.

Dr hab. Jarosław Mederski, prof. IMPAN

Recenzja rozprawy doktorskiej
mgra Michała Kijaczki
zatytułowanej
Fractional Sobolev Spaces and Hardy inequalities

Niniejsza recenzja dotyczy rozprawy doktorskiej mgr. Michała Kijaczki zatytułowanej *Fractional Sobolev Spaces and Hardy inequalities* przygotowanej na Politechnice Wrocławskiej. Promotorem rozprawy jest dr. hab. inż. Bartłomiej Dyda.

Rozprawa została napisana w języku angielskim i składa się z siedmiu krótkich i przejrzystych rozdziałów, bibliografii oraz kopii czterech następujących publikacji:

- [*I*] Dyda, B., and Kijaczko, M. *On density of smooth functions in weighted fractional Sobolev spaces*, Nonlinear Anal. 205 (2021), Paper No. 112231, 10.
- [*II*] Dyda, B., and Kijaczko, M. *On density of compactly supported smooth functions in fractional Sobolev spaces*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 201, 4 (2022), 1855–1867.
- [*III*] Kijaczko, M. *Fractional Sobolev spaces with power weights.* Accepted in Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze. (2023).
- [*IV*] Kijaczko, M., and Lenczewska, J. *Sharp Hardy inequalities for Sobolev–Bregman forms*, Accepted in Mathematische Nachrichten (2023).

Pan Michał Kijaczko przygotował również cztery inne prace, dwie współautorskie i dwie samodzielne:

- [*V*] Dyda, B., and Kijaczko, M. *Sharp weighted fractional Hardy inequalities*, arXiv e-prints (2022).
- [*VI*] Dyda, B. and Kijaczko, M. *Sharp fractional Hardy inequalities with a remainder for* $1 < p < 2$, arXiv e-prints (2023).
- [*VII*] Kijaczko, M. *Asymptotics of weighted Gagliardo seminorms*, arXiv e-prints (2023).
- [*VIII*] Kijaczko M. *Multinomial coefficients, multiple zeta values, Euler sums and series of powers of the Hurwitz zeta function*, Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici. 2020, vol. 62, nr 2, s. 227-245.

Prace opublikowane są w dobrych i bardzo dobrych czasopismach naukowych, trzy prace są samodzielne i biorąc pod uwagę, że jest to rozprawa doktorska, to liczba opublikowanych prac zasługuje niewątpliwie na uznanie na tym etapie kariery naukowej.

Tematyka rozprawy dotyczy dynamicznie rozwijanego obszaru dotyczącego właściwości ułamkowych przestrzenie Sobolewa oraz ułamkowych nierówności Hardy'ego. Ułamkowe przestrzenie Sobolewa pojawiły się w 20 wieku w kontekście równań różniczkowych z operatorami nielokalnymi modelującymi niegładkie lub nieciągłe zjawiska istotne z punktu widzenia fizyki. Problemy nielokalne są trudne pod względem matematycznym i stanowią bardzo dynamiczny obszar badań.

Pan Michał Kijaczko w swojej rozprawie doktorskiej zbadał problem gęstości funkcji gładkich w różnych ułamkowych przestrzeniach Sobolewa oraz uzyskał ułamkową nierówność Hardy'ego dla form Sobolewa-Bregmana. Bardziej szczegółowy opis wyników przestawiam poniżej.

Opis rozprawy doktorskiej oraz głównych wyników.

Rozdział 1 zawiera krótkie wprowadzenie do zagadnienia, motywację fizyczną oraz cele rozprawy, zaś w Rozdziale 2 autor definiuje ułamkowy Laplasjan, półnormę Gagliardo, oraz ułamkowe przestrzenie Sobolewa wraz z ich klasycznymi własnościami.

W Rozdziale 3 bazującym na pracy [*I*], dla każdej funkcji lokalnie całkowalnej autor definiuje operator wygładzający, który jest zbieżny w przestrzeniach Lebesgue'a L^p, $p \geq 1$. Tutaj wykorzystywany jest rozkład Whitneya oraz nierówność Jensena. Szacując normę w ułamkowej przestrzeni Sobolewa $W^{s,p}(\Omega)$ otrzymuje się gęstość funkcji gładkich $C^\infty \cap W^{s,p}(\Omega)$, co stanowi "ułamkowy" odpowiednik klasycznego twierdzenia Meyersa-Serrina z 1963 roku. Ta technika została rozszerzona na ułamkowe przestrzeni Sobolewa z wagą i Pan Kijaczko otrzymał pierwszy główny wynik o gęstości funkcji gładkich $C^\infty \cap \widetilde{W}^{s,p}(\Omega, w)$ w $\widetilde{W}^{s,p}(\Omega, w)$. Waga w może należeć do szerokiej klasy funkcji lokalnie porównywalnych ze stałą.

Gęstość funkcji o zwartym nośniku w ułamkowych przestrzeniach Sobolewa jest również naturalnym i ważnym pytaniem, m.in. ze względu na pojęcie słabego rozwiązania nielokalnych równań różniczkowych cząstkowych. Celem drugiego artykułu [*II*] oraz Rozdziału 4 jest właśnie zbadanie tego zagadnienia, które w matematycznym języku wyrażone jest pytaniem, czy $W_0^{s,p}(\Omega) = W^{s,p}(\Omega)$? Jeśli $\Omega = \mathbb{R}^N$ lub Ω jest ograniczoną dziedziną Lipschitza oraz $sp \leq 1$, to znana jest pozytywna odpowiedź na to pytanie, mianowicie funkcje gładkie o zwartym nośniku są gęste w $W^{s,p}(\Omega)$. Dla dziedzin Lipschitza, kowymiar Assouada (również dolny i górny kowymiar Assouada) wynosi 1 i nietrywialną obserwacją autora było zastąpienie warunku $sp \leq 1$ przez $sp \leq \underline{co\,dim}_A(\partial\Omega)$, gdzie $\underline{co\,dim}_A(\partial\Omega)$ oznacza dolny kowymiar Assouada. Główny wynik tej pracy [II, $Theorem$ 2] jest jednym z najciekawszych wyników rozprawy, gdyż przedstawia gęstość $W_0^{s,p}(\Omega)$ w $W^{s,p}(\Omega)$

dla obszarów niekoniecznie Lipschitzowskich. Ponadto gdy $sp > \overline{co\,dim}_A(\partial\Omega)$, twierdzenie pokazuje, że $W_0^{s,p}(\Omega) \neq W^{s,p}(\Omega)$ dla pewnych dziedzin.

W Rozdziale 5 opartym na pracy [*III*], powyższa analiza jest przeniesiona na przypadek ułamkowych przestrzeni Sobolewa z wagą. Ze względu na obecność wag, techniki znacznie komplikują się i autor dokonuje subtelnego porównania między pełnymi i skróconymi ważonymi ułamkowymi półnormami Gagliardo na dziedzinach jednostajnych ([*III*, *Theorem* 2]). Dodatkowo wykorzystywane są tutaj techniki Pratsa i Saksmana z 2017 roku z przestrzeni bez wag. Główne wyniki tej części ([*III*, *Theorem* 2, *Theorem* 3]) uogólniają wyniki z pracy [*II*] pod warunkiem jednostajności dziedziny Ω.

Rozdział 6 koncentruje się na optymalnych ułamkowych nierównościach typu Hardy'ego dla funkcji $C_c^1(\mathbb{R}^d)$, które często przenoszą się na odpowiednie przestrzenie Sobolewa. Ułamkowe nierówności Hardy'ego na przestrzeni $\mathbb{R}^d$ i ich optymalne stałe były intensywnie badane przez wielu matematyków m.in. Herbsta, Yafaeva, Becknera, Heiniga, Kufnera oraz Perssona w ubiegłym wieku. Stała w ułamkowej nierówności Hardy'ego została policzona przez Herbsta dla nierówności z ułamkowym Laplasjanem $(-\Delta)^{s/2}u$ w normie L^p, którego norma pokrywa się z półnormą Gagliardo dla $p = 2$ (z dokładnością do stałej). Nierówności typu Hardy'ego z półnormą Gagliardo dla $p \neq 2$ były badane przez wielu kolejnych czołowych badaczy np. Bourgaina, Brezisa, Mironescu, Maz'yę oraz Shaposhnikovą w latach 2001-2002 lecz optymalność stałej w tych nierównościach została wykazana przez Franka i Seiringera w 2008 roku. W przypadku dziedzin $\Omega \neq \mathbb{R}^d$ istotny wkład wniósł Dyda w pracy z 2004 roku, gdzie cztery klasy dziedzin zostały wskazane dla których nierówność typu Hardy'ego z półnormą Gagliardo jest prawdziwa. W późniejszych latach optymalna stała dla tych nierówności na półprzestrzeniach została policzona przez Bogdana i Dydę w przypadku $p = 2$, zaś Frank i Seiringer obliczyli tę stałą dla $p \neq 2$. Pan Kijaczko zbadał analogiczną nierówność typu Hardy'ego dla formy Sobolewa–Bregmana, która zastąpiła półnormę Gagliardo. Ten obszar badań umotywowany był kolejnymi ważnymi pracami Bogdana, Dydy, Lossa, Sloane'a, Jakubowskiego, Lenczewskiej oraz Pietruskiej-Pałuby. Pan Kijaczko udowodnił optymalna nierówność typu Hardy'ego na półprzestrzeni dla formy Sobolewa–Bregmana dla $p > 1$ ([*IV*, *Theorem* 1]). Optymalna stała została obliczona i weryfikacja jej optymalności w nierównościach jest najtrudniejszą częścią tej pracy. Kolejny wynik ([*IV*, *Theorem* 2]) dotyczy optymalnej nierówności dla otwartych i wypukłych podzbiorów $\mathbb{R}^d$. Na szczególną uwagę zasługuje ogólna i abstrakcyjna wersja ułamkowej nierówności typu Hardy'ego dla formy Sobolewa-Bregmana z ogólnym jądrem. Praca [*IV*] jest bardzo ciekawa, dotyczy intensywnie badanego obszaru i wymagała wypracowania nowych technik i oszacowań dla formy Sobolewa-Bergmana.

Pozostałe prace Pana Kijaczki opisane są krótko w Rozdziale 7 i stanowią interesującą kontynuację zagadnień i problemów wyżej wymienionych, np. autor bada ułamkowe nierówności Hardy'ego-Sobolewa-Maz'yi oraz asymptotyczne własności półnormy Gagliardo z wagami w granicy $s \to 1^-$, tzn. gdy zmierzamy od nielokalnego problemu do lokalnego. W szczególności, praca $[VII]$ dotyczy optymalnych ułamkowych nierówności Hardy'ego z resztą w duchu prac Franka i Seiringera. Wyniki zostały rozszerzone dla nierówności z wykładnikiem $1 < p < 2$.

Konkluzja. Całą rozprawę oceniam bardzo wysoko. Moim zdaniem rozprawa doktorska jest bogata w metody matematyczne, problemy badane w rozprawie dotyczą intensywnie rozwijanego obszaru nielokalnych przestrzeni Sobolewa i nierówności typu Hardy'ego. Tematyka jest przedmiotem zainteresowania wielu wybitnych badaczy światowej sławy i niezwykle trudno jest znaleźć ciekawy problem w takim intensywnie badanym obszarze. Pan Michał Kijaczko odpowiedział na szereg naturalnych pytań z tej dziedziny i uzyskanie ciekawych i nietrywialnych wyników w tym obszarze wymaga wysokich umiejętności technicznych, wyobraźni geometrycznej i biegłej znajomości najnowszej literatury. Wszystkie prace autora oceniam bardzo wysoko, a najbardziej transparentne wyniki znajdziemy w pracach $[II]$ i $[IV]$. Moim zdaniem jest to interesujący, przemyślany kawałek matematyki, który można przedstawić osobom nie będącymi ekspertami w tej dziedzinie. Na szczególną uwagę zasługuje również samodzielna praca Pana Kijaczki $[III]$, w której wypracował nowe techniki dowodowe dla przestrzeni Sobolewa z wagą i w sposób pomysłowy rozszerzył wyniki z pracy $[II]$. Rozprawę czyta się bardzo dobrze i podobają mi się krótkie rozdziały wprowadzające w tematykę każdej z czterech prac. Pozostałe wyniki zawarte w nieopublikowanych pracach $[V]-[VII]$ mogłyby stanowić materiał na kolejną bardzo dobrą rozprawę doktorską.

Uważam, że rozprawa istotnie przekracza wymagania ustawowe stawianym rozprawom doktorskim. Wnoszę o dopuszczenie mgr. Michała Kijaczki do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Ponadto biorąc pod uwagę wysoką ocenę pracy, rekomenduję wyróżnienie przedstawionej rozprawy.

Jarosław Mederski

Jarosław Mederski