

prof. dr hab. Agnieszka Kałamajska,
Instytut Matematyki
Uniwersytet Warszawski
ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa
e-mail: A.Kalamajska@mimuw.edu.pl

Warszawa, 25 września 2023

Ocena rozprawy doktorskiej
pt. "Fractional Sobolev Spaces and Hardy inequalities"
pana mgr. Michała Kijaczko

1 Wstępne informacje

Praca pana Michała Kijaczko została napisana pod kierunkiem pana dr hab. inż. Bartłomieja Dydy.

Dotyczy ona problemu gęstości funkcji gładkich oraz funkcji gładkich o zwartym nośniku w przestrzeniach Sobolewa typu ułamkowego, które mogą być wyposażone w wagi, oraz konstrukcji nierówności typu Hardy'ego dla takich przestrzeni, z wykorzystaniem form typu Sobolewa-Bregmana.

Tematyka badań jest bardzo dobrze umotywowana i cieszy się dużym zainteresowaniem matematyków z różnych ośrodków. Pytanie o gęstość funkcji odpowiednio regularnych w danej przestrzeni to podstawowe pytanie w teorii przestrzeni Sobolewa. Nierówności typu Hardy'ego, to punkt wyjścia do otrzymywania twierdzeń o istnieniu oraz regularności rozwiązań równań różniczkowych cząstkowych. Gdy w nierównościach występują ważone przestrzenie typu Sobolewa, nierówności wykorzystywane są do badania dotyczącego tak zwanych równań zdegenerowanych. Uwzględnienie w nierównościach form typu Sobolewa-Bregmana ma zastosowanie w teorii procesów stochastycznych, do badania półgrup kontracji. Podjęcie badań nad ułamkowymi przestrzeniami Sobolewa, w tym wyposażonych w wagi, jest obiektem intensywnych badań w ostatnich latach. Przestrzenie te są definiowane z pomocą operatorów nielokalnych, których reprezentantem jest ułamkowy Laplacian i nie doczekały się jeszcze zamkniętej teorii, często nawet w prostych przypadkach.

Rozprawa wpisuje się w nurt ostatnich i niedawnych badań. Problemem gęstości zajmowali się między innymi matematycy zagraniczni: L. Brasco, A. Salot, M. Kassmann, A.M. Caetano, S. Dipierro i E. Valdinoci i ich współpracownicy, T. Kilpelainen, A. Kufner, V. Mazya, N. G. Meyers i J. Serrin, oraz matematycy ze szkoły Wrocławskiej: K. Bogdan i współpracownicy, oraz promotor rozprawy. Nierówności typu Hardy'ego w ułamkowym ujęciu pojawiają się na przykład w pracach: J. Lehrbäck, A. Kufnera, B. Opica, M. Lossa i C. Sloane, Szkoły Wrocławskiej (prace K. Bogdana oraz promotora wraz ze współpracownikami, oraz pracy z 2023 roku - K. Bogdana, T. Jakubowskiego, J. Lenczewskiej i K. Pietrusiek-Pałuby).

Narzędzia pracy nie koniecznie muszą bazować na bardzo szerokiej wiedzy teoretycznej z różnych działów analizy, są natomiast żmudne i pomysłowe od strony technicznej, oraz wymagały głębokiej wiedzy teoretycznej dotyczącej geometrii obszarów. Wyniki mają bardzo wartościową interpretację. Dostarczają bowiem bardzo pożytecznej wiedzy do dal-

A. Kalamajska

szych głębokich badań teoretycznych w kilku kierunkach: teorii równań różniczkowych cząstkowych, w tym zdegenerowanych, teorii przestrzeni funkcyjnych, czy teorii procesów stochastycznych. Są one zatem bardzo potrzebne do dalszych zastosowań. W badaniach niniejszej rozprawy potrzebna jest umiętność sprawnego przeprowadzenia oszacowań, techniki są sprytne a niektóre całkiem nowe. Wykorzystują one metody geometryczne, takie jak lematy pokryciowe, rozkłady Whitney'a, wymiary Assouada - metody nowe, operatory regularyzacji.

Efektom rozprawy jest spójne przedstawienie wyników dotyczących gęstości funkcji gładkich w przestrzeniach Sobolewa typu ułamkowego (także wyposażonych w wagi), oraz uzyskanie nowych nierówności typu Hardy'ego z formami typu Sobolewa-Bregmana zamiast wyrażen z klasycznym gradientem. Wyniki bazują na jednej pracy opublikowanej samodzielnie przez autora rozprawy, oraz na trzech pracach współautorskich, w tym dwóch uzyskanych wraz z promotorem, oraz jednej wspólnej z panią Julią Lenczewską, także jeszcze przed doktoratem. Omówiony został także dorobek poboczny, zawarty w trzech pracach, w tym jednej napisanej samodzielnie.

Wynik rozprawy uważam za wartościowy i ciekawy wkład w rozwój teorii przestrzeni Sobolewa.

2 Omówienie rozprawy doktorskiej

2.1 Organizacja pracy oraz źródła

Rozprawa liczy około 30 stron, w tym literatury liczącej 62 pozycje, oraz dołączonych czterech artykułów opublikowanych (I,II,III,IV), na których bazuje rozprawa. Całość to konsekwentna i spójna analiza. Prezentacja wyników dokonuje się w kilku etapach, które z ogólnym zarysie przebiegają następująco:

- (a) Wstępne informacje o rozprawie (Rozdział 1);
- (b) Omówienie podstawowych obiektów używanych w rozprawie: przestrzeni typu Sobolewa i ułamkowego Laplacianu (Rozdział 2);
- (c) Sukcesywne omówienie wyników rozprawy w odniesieniu do prac I-IV (Rozdziały 3,4,5,6);
- (c) Informacja o dorobku dołączonym (Rozdział 7).

Wyniki włączone do dorobku rozprawy bazują na:

- jednej pracy samodzielnej [III] *Fractional Sobolev spaces with power weights*, praca przyjęta w Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze;
- dwóch pracach wspólnych wraz z promotorem
 - [I] *On density of smooth functions in weighted fractional Sobolev spaces*, Nonlinear Anal.205(2021), Paper No. 112231.
 - [II] *On density of compactly supported smooth functions in fractional Sobolev spaces*, Ann. Mat. Pura Appl. (4)201(2022), no.4, 1855–1867.

- jednej pracy wspólnej z panią mgr. J. Lenczewską

[IV] *Sharp Hardy inequalities for Sobolev-Bregman forms*, *Mathematische Nachrichten* (2023).

Dorobek poboczny składa się z trzech prac nie opublikowanych w momencie złożenia rozprawy: dwóch wspólnych z promotorem, oraz jednej samodzielnej.

Z drobnych uwag krytycznych dotyczących organizacji rozprawy miałabym następujące: można było rozszerzyć nieco prezentację, uzupełniając argumenty z prac już wydrukowanych, oraz dołożyć trochę przykładów/kontrprzykładów, ilustrujących wyniki z publikacji; zabrakło rozdziału dotyczącego możliwych perspektyw rozwoju teorii - które zwykle są elementami rozpraw, choć zostały zamieszczone informacje o niektórych problemach otwartych.

Pragnę jednak podkreślić, że wyniki są spójne tematycznie, są one przedstawione w sposób przejrzysty, analiza jest wnikliwa i bardzo ciekawa, publikacje są starannie zredigowane.

Pomimo drobnych uwag, organizację pracy uważam za dobrze przemyślaną, wybór źródeł uważam za prawidłowy, a sama rozprawa napisana jest starannie.

2.2 Główne wyniki, narzędzia pracy

Rozprawa w sposób spójny i konsekwentny odnosi się do problemu gęstości funkcji gładkich w ułamkowych przestrzeniach Sobolewa, do konstrukcji odpowiednich nierówności typu Hardy'ego, oraz omawia dorobek poboczny doktoranta.

Oba cele badawcze: zagadnienia gęstościowe oraz nierówności typu Hardy'ego są bardzo klasyczne i potrzebne, i ogólnie są obiektem badań w wielu ośrodkach.

Rozdział 1 omawia wstępne wyniki pracy, wskazując na motywacje do rozpatrywania przestrzeni Sobolewa typu ułamkowego, ich związek z ułamkowym Laplacianem, procesami stochastycznymi, oraz motywacje do badania gęstości funkcji gładkich w takich przestrzeniach. Omawiane są wstępnie wyniki prac I-III powiązanych z zaganiem gęstości. Następnie omówione zostały wyniki pracy IV, oraz motywacje do badania nierówności typu Hardy'ego z formą Sobolewa- Bremana. Pojawia się także informacja o pracach V, VI, VII, które stanowią dorobek poboczny.

W rozdziale 2 wprowadzone zostały podstawowe potrzebne pojęcia, w tym przestrzenie Sobolewa typu ułamkowego, ułamkowy Laplacian, oraz ich powiązania. Rozdział ten jest opisany w sposób bardzo ciekawy.

Rozdział 3 poświęcony jest opisowi pracy I. Inspiracją do tej pracy jest twierdzenie Meyersa-Serrina z 1964 roku o gęstości funkcji gładkich w klasycznych przestrzeniach Sobolewa, definiowanych na dowolnym obszarze. Późniejsza praca T. Kilpeläinen z 1994 roku pokazuje tę samą własność dla przestrzeni Sobolewa rzędu całkowitego, wyposażonych w wagi Muckenhoupta. Autorzy przedstawiają warianty twierdzeń o gęstości dla przestrzeni Sobolewa ułamkowego rzędu wyposażonych w wagi, dla pewnej klasy wag. Metody bazują na konstrukcji operatora regularyzacji przy użyciu rozkładów Whitney'a, oraz na

delikatnych oszacowaniach. Pragnę dodać, że operator regularyzacji zmienia wartości wyłącznie wewnątrz obszaru, zachowany jest zatem “ślad funkcji”, oraz że konstrukcja przypomina konstrukcję z pracy P. Hajlasza [Note on Meyers-Serrin’s theorem. Exposition. Math.11(1993)] na temat klasycznych przestrzeni Sobolewa, lecz jest bardziej rozbudowana. Zagadnieniem gęstości dla ułamkowych przestrzeni ważonych zajmowali się matematycy S. DiPierro i C. Validinocci (praca [2] z referencji) i w rozprawie znajduje się analiza porównawcza. Badania nad przestrzeniami Sobolewa ułamkowego rzędu wyposażonych w wagi są bardzo dobrze umotywowane.

Chętnie w tej części opisu zobaczyłabym:

- informację o zupełności ważonych ułamkowych przestrzeni Sobolewa, której ogólnie nie znalazłam w rozprawie. Ponadto poradziłabym aby zajrzeć do pracy A. Kufnera i B. Opica [How to define reasonably weighted Sobolev spaces, Comment. Math. Univ. Carolin.25(1984)], gdzie znajdziemy informacje o zupełności ważonych przestrzeni Sobolewa całkowitego rzędu;
- definicję funkcji η_k z założeń wielu twierdzeń w pracy I (być może jest to moje przeoczenie).

Za bardzo ciekawy wynik uważam wynik o gęstości, Twierdzenie 15 w artykule, który odnosi się do przestrzeni ważonej z wagą $K(|x - y|)$ w definicji normy “gradientu”.

Rozdział 4 to opis pracy II. Jest to konsekwentne poszerzenie rezultatu pracy I, lecz tym razem badanie dotyczy gęstości funkcji gładkich o zwartym nośniku w przestrzeniach Sobolewa typu ułamkowego, w ujęciu bez wag. Jest to pytanie bardzo naturalne. Jedną z motywacji do badań tego typu jest monografia P. Grisvarda z 1985 roku, gdzie znajdziemy takie twierdzenie o gęstości dla ułamkowych przestrzeni Sobolewa na obszarach Lipschitzowskich. W pracy II osłabione zostały założenia o regularności obszaru. Główne wyniki tego artykułu to:

- twierdzenie o gęstości funkcji gładkich o zwartym nośniku w przestrzeniach Sobolewa typu ułamkowego (Twierdzenie 14 w opisie);
- twierdzenie o analitycznej charakteryzacji uzupełnienia przestrzeni funkcji gładkich o zwartym nośniku w przestrzeniach Sobolewa typu ułamkowego (Twierdzenie 15 w opisie);
- wyprowadzenie nierówności typu Hardy’ego dla ograniczonych obszarów tak zwanych γ -tłustych (γ -plump) (Twierdzenie 16 w opisie).

Wszystkie wyniki odwołują się do dolnego i górnego kowymiaru Assouada brzegu obszaru, co jest nowym i nietrywialnym pomysłem badawczym i z tego powodu budzi respekt.

Rozdział 5 to opis artykułu III - pracy samodzielnej. Jest to poszerzenie wyników z pracy II do przestrzeni ułamkowych Sobolewa wyposażonych w takie wagi, które są potęgami odległości punktu od brzegu obszaru (Twierdzenie 21 i 22 na temat gęstości funkcji gładkich o zwarty nośniku, oraz Twierdzenie 23 o nierówności Hardy’ego). Tak jak w pracy II, wykorzystane są w analizie i założeniach kowymiary Assouada brzegu obszaru. Ponadto analizuje się szczególnie “obszary jednolite” (uniform domains), których dotyczą Twierdzenia 22 i 23 w opisie.

Wprowadzenie wag wymagało bardziej wnikliwej analizy i metody nie są automatyczną przeróbką metod z poprzedniej pracy. Na przykład teraz w oszacowaniach wykorzystuje się sumowanie po “cieniach kostek” w rozkładzie Whitney’a, co jest bardzo precyzyjną

techniką sumowania. Ciekawym wynikiem pobocznym jest także Twierdzenie 19 w opisie o porównywaniu półnorm Gagliardo.

Mam uwagę krytyczną, o której już wspomniałam. Tu bardzo potrzebny jest argument zupełności ułamkowej ważonej przestrzeni Sobolewa, co widzimy w Stwierdzeniu 25 w artykule (Proposition 25).

Artykuł jest bardzo perspektywiczny: sądzę że można poszerzyć wyniki (np na temat gęstości funkcji Lipschitzowskich o zwartym nośniku) także w kontekście metrycznym i do obszarów nieograniczonych.

Rozdział 6 ustosunkowuje się do artykułu IV. W pracy udowodniono ułamkowy wariant nierówności Hardy'ego na podzbiorach \mathbf{R}^n , gdzie wyrażenie z ułamkowym gradientem w oszacowaniu zostało zastąpione przez wyrażenie z formą Bregmana. Niektóre nierówności uzyskano z optymalnymi stałymi, co świadczy o głębi analizy.

Takie nierówności są potrzebne w teorii procesów stochastycznych do badań nad kontraktywnością półgrup generowanych przez Laplacian ułamkowy. Problem oraz metody bazują na trzech pracach: K. Bogdana oraz promotora, M. Loss'a i C. Sloane'a, oraz na niedawno opublikowanej pracy K. Bogdana, T. Jakubowskiego, J. Lenczewskiej, oraz K. Pieruskiej-Pałuby. Praca zatem wpisuje się w nurt badań z ostatnich lat.

Pragnę dodać, że skuteczna współpraca pomiędzy młodymi matematykami świadczy o samodzielności badawczej obojga.

Rozdział 7 to informacja o dorobku dodatkowym, uzyskanym w okresie studiów doktorskich przez pana magistra Michała Kijaczko. Dorobek bazuje na trzech artykułach nie opublikowanych w momencie złożenia rozprawy:

- pracy V (wspólnej z promotorem) o ważonych ułamkowych nierównościach Hardy'ego-Mazji-Sobolewa z wagami będącymi potęgami odległości od brzegu, otrzymanych także z najlepszymi stałymi, oraz z dodatkowym członem (tzw. "reminder term");
- pracy VI (wspólnej z promotorem) uogólniającej nierówności typu Hardy'ego z klasycznym gradientem do takich, które zawierają dodatkowy człon ("reminder term") i będących uogólnieniem wyników prac R. Franka i R. Seifingera do przypadków $1 < p < 2$;
- pracy VII (samodzielnej) badającej asymptotykę półnorm Gagliardo dla ważonych ułamkowych przestrzeni Sobolewa, w zależności od parametru s - odpowiedzialnego za "ułamek".

Wszystkie wyniki omówione w tym rozdziale uważam za wartościowe, bardzo dobrze umotywowane, ciekawe i głębokie.

Podsumowując, stosowane narzędzia pracy wymagały bardzo dużej pomysłowości i sprawności rachunkowej, znajomości powiązanej literatury, w tym metod dotyczących geometrii obszarów, ponadto cierpliwości i pracowitości. Przedstawiona analiza jest obszerna i głęboka, wiele wyników to dowody pełne, zakończone warunkiem koniecznym i dostatecznym, oraz najlepszymi stałymi w nierównościach. Ze względu na ciekawe i głębokie wyniki otrzymane samodzielnie, oraz bogaty dorobek, wnioskuję o wyróżnienie rozprawy.

3 Konkluzja

Biorąc pod uwagę dokonane osiągnięcie, po przedstawieniu zarówno pozytywnych jak i negatywnych aspektów oceny, z pełnym przekonaniem stwierdzam, że przedstawiona rozprawa doktorska w pełni spełnia wymagania zwyczajowe i ustawowe stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie pana mgr. Michała Kijaczko do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Dodatkowo wnoszę o wyróżnienie rozprawy.

Z wyrazami szacunku,



Agnieszka Kałamajska