Warszawa, 3 stycznia 2023

prof. dr hab. Jacek Wesołowski
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska

Recenzja rozprawy habilitacyjnej "Ruch Browna i proces Bessela w obszarach wypukłych" oraz dorobku naukowego dr Grzegorza Serafina

WSTĘP

Dr Grzegorz Serafin jest absolwentem Wydziału Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej. W 2010 roku obronił napisaną pod kierunkiem dr. hab. Jacka Małeckiego pracę magisterską dotyczącą wybranych zagadnień teorii potencjału na przestrzeniach hiperbolicznych. W roku 2014 uzyskał stopień doktora nauk matematycznych na podstawie rozprawy doktorskiej pt. *Teoria potencjału hiperbolicznego ruchu Browna*. Promotorem rozprawy był dr hab. Tomasz Żak, a promotorem pomocniczym dr hab. Jacek Małecki (jeszcze przed uzyskaniem stopnia doktora habilitowanego). Habilitant, od początku swojej kariery naukowej do chwili obecnej, związany jest z Politechniką Wrocławską, gdzie od 2016 pracuje na stanowisku adiunkta (wcześniej, od roku 2010, pracował na stanowisku asystenta). Swoje zainteresowania naukowe rozwijał jako członek silnego zespołu probabilistyczno-analitycznego, stworzonego na Politechnice Wrocławskiej przez prof. Tomasza Byczkowskiego.

Szczegółową oceną rozprawy habilitacyjnej oraz dorobku naukowego przedstawionego w dokumentacji postępownia habilitacyjnego zajmuję się w dwóch kolejnych rozdziałach tej recenzji.

ROZPRAWA HABILITACYJNA

Uwagi wstępne. Rozprawa habilitacyjna składa się z czterech prac, dwie są współautorskie (jednym ze współautorów jest promotor pracy doktorskiej Habilitanta), opublikowane w *Journal of Mathematical Analysis and Applications* (70 pkt) oraz *Potential Analysis* (100 pkt), a dwie samodzielne, opublikowane w

J.W.

Proceedings of the American Mathematical Society (100 pkt) oraz *Journal of Differential Equations* (140 pkt). Wszystkie one dotyczą "ostrych" oszacowań dwustronnych na gęstości prawdopodobieństw przejścia procesu Bessela lub ruchu Browna zabiajanych przy wyjściu ze zbioru wypukłego, ewentualnie gęstości prawdopodobieństwa czasów wyjścia. Przy czym "ostrość" tych oszacowań polega na pokrywaniu się, z dokładnością do stałej multiplikatywnej, oszacowań górnych i dolnych, a w słabszej wersji na pokrywaniu się wykładniczego czynnika w takich oszacowaniach. Wspólnym mianownikiem omawianych badań jest też połaczenie w dowodach probabilistyki z rozumowaniami czysto analitycznymi oraz geometrycznymi (ten ostatni aspekt stanowi o sile wyników w pracy [H4]).

Przed szczegółowym omówieniem prac [H1]-[H4] pozwolę sobie jeszcze na drobny dodatek o charakterze historyczno-metodologiczno-osobistym:

Tak się składa, że byłem jednym z recenzentów rozprawy doktorskiej Habilitanta w 2014 roku. W recenzji pisałem wtedy m.in. *Praca składa sie z pięciu rozdziałów, pełnych uciążliwych rachunków i oszacowań, rachunków, które często robione są z dużym polotem, i z porównywalną determinacją. Niektóre wzory wyglądają dość przerażająco, ale trudno dyskutować z faktami matematycznymi. Należy, co najwyżej doceniać wytrwałość autora i umiejętność radzenia sobie z takimi wzorami. Warto też odnotować, że mimo niezwyczajnej uciążliwości rachunkowej, praca jest bardzo dobrze zredagowana, a każde przejście dowodowe jest wyjaśniane. Choć muszę przyznać, że były takie, które docierały do mnie powoli.* Lektura prac [H1] - [H4] (jak i pozostałych prac z dorobku Habilitanta), co mam nadzieję będzie widoczne w poniższym omówieniu, wzmacnia wyrażone powyżej pozytywne opinie (z tym, że ostatnie zdanie w uaktualnionej wersji wymaga co najmniej dodania przysłówka "bardzo" przed "powoli").

Omówienie prac wchodzących w skład *osiągnięcia naukowego*.

- W pracy [H1] udowodniono dwustronne ostre oszacowania na gęstość prawdopodobieństwa przejścia procesu Bessela (z parametrem $\nu > -1$) zabijanego w 1 i odbijanego w 0, $p_1^{(\nu)}(t,x,y)$; równoważnie, na gęstość procesu Bessela (z parametrem $\mu \in \mathbb{R}$) zabijanego w 0 i w 1, $p_{(0,1)}^{(\mu)}(t,x,y)$, $t > 0$, $x, y \in (0,1)$. Alternatywne sformułowanie w języku mniej probabilistycznym dotyczy jądra ciepła Fouriera-Bessela (przypadek $\nu > -1$). Dowód wykorzystuje sporo aparatu probabilistycznego: własność Markowa, a konkretniej tożsamość Chapmanna-Kołmogorowa, wzór Hunta na gęstość procesu zabijanego (w terminach gęstości procesu niezabijanego i gęstości łącznej pierwszego uderzenia w barierę), czy absolutną ciągłość rozkładów procesów Bessela z różnymi parametrami wraz ze wzorem na ich pochodną Radona-Nikodyma. Ten ostatni fakt pozwala wykorzystywać dobrze znane wzory dla modułu ruchu Browna (czyli procesu Bessela z parametrem $\mu = -1/2$). Są to narzędzia, których habilitant używał już z powodzeniem w rozprawie doktorskiej. Dowód jest rozbity na dwie części: ograniczenie dolne i ograniczenie górne. Szczegóły obu części są dalece nieoczywiste. Więcej wysiłku wymagało uzyskanie ograniczenia górnego: w jego dowodzie, oprócz wymienionych narzędzi, sprytnie dzieląc przestrzeń, wykorzystuje się w istotny sposób mocną własność Markowa jak również nową nierówność dla zmodyfikowanej funkcji Bessela pierwszego rodzaju I_ν dla $\nu \in (-1, -0.5)$. Całość dowodu kończy rozumowanie odwołujące się do dwustronnej nierówności dla jądra ciepła Fouriera-Bessela dla czasów odległych od zera (znanej np. z pracy Nowak, Roncal (2014)). Jest to dobra praca, z solidną matematyką i ładnymi wynikami.

J.W.

- Praca [H2] dotyczy oszacowań gęstości pierwszego czasu uderzenia w 1, $q_1^{(\mu)}(t,x)$, dla procesu Bessela z parametrem $\mu > -1$ przy odbijaniu w 0, oraz pierwszego czasu wyjścia z odcinka $(0,1)$ przy zabijaniu w 0, $q_{0,1}^{(\mu)}(t,x,1)$ i $q_{0,1}^{(\mu)}(t,x,0)$ dla procesu Bessela z parametrem $\mu < 0$, Szczególnie interesujący jest przypadek t bliskiego zero. Główny pomysł polega na wyrażeniu tych gęstości w terminach gęstości przejścia procesu Bessela zabijanego w 1 (dla $\mu > -1$ i odbiciu w 0) bądź przy wyjściu z odcinka $(0,1)$ (dla $\mu < 0$ i zabijaniu w 0). Wzory ogólne wyrażające gęstości $q^{(\mu)}$ za pomocą odpowiednich pochodnych gęstości przejścia podane są w Th. 3.1. Połączenie tych wzorów z dwustronnymi ostrymi oszacowaniami na gęstości prawdopodobieństwa przejścia, znalezionymi w pracy [H1], prowadzi szybko do dwustronnych ostrych oszacowań na gęstości $q^{(\mu)}$. W przypadku $\mu = \frac{n}{2} - 1$ daje to nowe oszacowania na gęstość wyjścia ruchu Browna w $\mathbb{R}^n$ z kuli jednostkowej (Cor. 3.4). Argument polegający na naśladowniu zasady odbicia dla ruchu Browna (jest to powtórzenie interesującego i skutecznego pomysłu wykorzystanego już w pracy [H1]) wraz z oszacowaniami dla funkcji Bessela I_μ, po żmudnych szacowaniach prowadzi do asymptotyki dla funkcji gęstości $q^{(\mu)}$ wyrażonej w terminach gęstości przejścia dla standardowego procesu Bessela. To jest technicznie najtrudniejsza część pracy. Z kolei wykorzystanie znanej asymptotyki tych ostatnich daje eleganckie wyrażenia graniczne na funkcje gęstości $q^{(\mu)}$ w różnych reżimach asymptotycznych.

- W pracy [H3] podane są ostre dwustronne oszacowania na jądro ciepła w kuli jednostkowej, tzn. na gęstość prawdopodobieństwa przejścia dla ruchu Browna zabijanego przy wyjściu z kuli jednostkowej i dla małych czasów. Te dwustronne oszacowania polegają na odpowiedniej modyfikacji multiplikatywnej standardowego jądra ciepła za pomocą jednakowej funkcji po obu stronach nierówności (z dokłądnością do stałej multiplkatywnej). To znacząco ulepsza znane dotychczas oszacowania Daviesa-Zhanga, w których dolne i górne oszacowanie różniły się stałę w eksponencie: $\exp(-c|x-y|^2/t)$ vs. $\exp(-c'|x-y|^2/t)$. Te nowe oszacowania pozwalają na doprecyzowanie słynnej sentencji Marka Kaca o cząsteczkach Brownowskich nie zdających sobie sprawy z katastrofy, która czeka na nie na brzegu kuli. To dporecyzowanie polega na stwierdzeniu, że przeczucie katastrofy, choć nie ujawnia się w czynniku wykładniczym, pojawia się w postaci funkcji wymiernej zależnej od puntku startu, punktu początkowego, ich odległości oraz czasu, w którym cząsteczka Brownowska przebywa drogę między nimi. Dowód rozbity na dowód ograniecznia górnego i dolnego, oprócz standardowych narzędzi probabilistycznych, takich jak wzór Hunta, czy mocna własność Markowa, wykorzystuje też (w dowodzie ograniczenia dolnego) nierówność w stylu tożsamości Chapmanna-Kołmogorowa, w której całkuje się jedynie po odpowiedniej kuli w miejsce całej przestrzeni (Lem. 1). Dowody obu ograniczeń są subtelne i wymagają pomysłowści i doświadczenia, oraz dobrych intuicji geometrycznych, np. w dowodzie ograniczenia dolnego oddzielnie rozważane są sytuacje gdy $x \in B(15y/(16|y|), 1/16)$ (szczególnie skomplikowany przypadek), $x \in B(y/3|y|, 2/3)$ i pozostałe; a w dowodzie ograniczenia górnego intuicje geometryczne dochodzą do głosu w wydzielonym skomplikowanym przypadku: $\angle(x,y) < \pi/4$.

- Praca [H4] poświęcona jest oszacowaniom (górnym, dolnym, oraz obustronnym) gęstości prawdopodobieństwa przejścia ruchu Browna w $\mathbb{R}^n$ zabijanego przy wyjściu ze zbioru wypukłego D o gładkim brzegu (klasy $C^{1,1}$), przy czym autor skupia się na trudniejszym przypadku małych czasów. Otrzymane wyniki są daleko idącymi uogólnieniami dwustronnych ostrych oszacowań dla kuli pochodzących z pracy [H3]. Otrzymane oszacowania obustronne są "ostre" w tym sensie, że czynnik wykładniczy jest tej samej postaci, natomiast różnią się czynnikiem "wymiernym", który w przypadku kuli (ale nie tylko) jest identyczny z dokładnością do stałej multiplikatywnej. Narzędzia probabilistyczne są

J. G. J.

standardowe: tożsamość Chapmanna-Kołomogorowa, wzór Hunta (i jego konskewencje, np. monotoniczność), mocna własność Markowa; ale ich połączenie z metodami analitycznymi oraz niezwykłe wyczucie geometrii wraz z powiązaniem tych trzech aspektów zagadnienia w skomplikowanych technicznie dowodach są imponujące. W konsekwencji, odpowiadając na dość naturalne pytania, otrzymuje się nowe i eleganckie wyniki dla tak klasycznego obiektu jak ruch Browna. To musi budzić co najmniej zaciekawienie. Jestem przekonany, że znaczna część wyników (a i metod dowodowych) wejdzie do kanonu badań własności jądra Dirichleta na zbiorach wypukłych. Mnie najbardziej podobało się Th. 5.4, w którym podany jest geometryczny opis "maksymalnej" klasy zbiorów wypukłych D, dla których dwustronne oszacowanie jądra Dirichleta jest ostre (z dokładnością do skalowania).

Podsumowanie. Rozprawa habilitacyjna dr Grzegorza Serafina poświęcona jest zagadnieniom ostrych oszacowań dwustronnych dla gęstości prawdopodobieństw przejścia (i zagadnieniom pokrewnym) dla procesu Bessela i ruchu Browna. Otrzymane wyniki znacząco poszerzają naszą wiedzę w tej dziedzinie i stanowią duże wzmocnienie znanych wcześniej oszacowa. Habilitant znakomicie rozwinął techniki dowodowe w tej dziedzinie łącząc umiejętnie aspekty probabilistyczne, analityczne i geometryczne badanych problemów. W omawianych pracach widoczna jest przewaga takiego podejścia nad rozważaniami czysto analitycznymi. Zarówno otrzymane wyniki (ich aspekt poznawczy), jak i dowody twierdzeń zasługują na uwagę i uznanie. Największe wrażenie wywarła na mnie praca [H4], w której na pierwszy plan wybijają się intuicje geometryczne Habilitanta i ich trudne technicznie, twórcze powiązanie z metodologią probabilistyczną. Już sama ta praca mogłaby służyć za całkiem solidną rozprawę habilitacyjną.

DOROBEK NAUKOWY

Naukowy dorobek publikacyjny habilitanta to (poza pracami z rozprawy habilitacyjnej): sześć prac mieszczących się w tematyce probabilistycznej teorii potencjału, w tym część blisko związanych z doktoratem, a ostatnia z rozprawą habilitacyjną; trzy prace czysto analityczne na temat równań różniczkowych; cztery prace (wspólne z N. Privault) na temat zaawansowanych zastosowań metody aproksymacyjnej Steina; dwie prace kombinatoryczne na temat liczb Bella; jedna na temat procesów punktowych. Co naturalne, większość tych prac dotyczy podstawowej specjalności Habilitanta i koncentruje się na oszacowaniach dla obiektów ważnych w probabilistycznej teorii potencjału. Zwraca też uwagę otwartość Habilitanta na nowe dziedziny, w tym umiejętność zauważenia, że metody które wypracował w toku badań nad probabilistyczną teorią potencjału, mogą zostać wykorzystane (po odpowiednich modyfikacjach), nie tylko w teorii równań różniczkowych, co jest poniekąd naturalne, ale np. w teorii procesów punktowych, czy w nowoczesnych rozwinięciach klasycznej metody Steina. Prace w tej ostatniej dziedzinie uważam za bardzo ciekawe: wyróżnia się wynik dotyczący szybkości zbieżności do rozkładu normalnego unormowanej liczby kopii ustalonego podgrafu w grafach Erdösa-Rényi'ego, który rozwiązuje trzydziestoletni problem otwarty. Na uwagę zasługują też eleganckie wzory kongruencyjne dla wielomianów Bella. Poniżej przedstawiam skrótowy opis prac z dorobku naukowego (poza pracami z osiągnięcia habilitacyjnego).

1. probabilistyczna teoria potencjału: hiperboliczny ruch Browna w półprzestrzeni ([2], *Demonstratio Mathematica*, 2012) oraz w obszarze cylindrycznym z podstawą Lipschitzowską ([3], *Colloquium Mathematicum*, 2014) oraz hiperboliczny ruch Browna z dryfem ([10], *Probability and Mathemaical*

J.W.

Statistics, 2020); funkcja Greena i jądro Poissona dla hiperbolicznego ruchu Browna w obszarze ograniczonym o gładkim brzegu ([15], *Potential Analysis*, 2021); proces Bessela nabudowany na ruchu Browna z pionowym dryfem w odcinku ([4], *Probability and Mathematical Statistics*, 2015); twierdzenie o "przeczuwaniu brzegu" przez ruch Browna zabijany przy wyjściu z kuli, praca ta moim zdaniem powinna być włączona w skład osiągnięcia habilitacyjnego, jako że jest istotnym uzpełnieniem pracy [H3] polegającym na podaniu oszacowania na różnicę między gęstością prawdopodobieństwa przejścia dla procesu zabitego, a odpowiednio skalowaną standardową gęstością prawdopodobieństwa przejścia ([20], *Asymptotic Analysis*, 2022);

2. równania różniczkowe: dwustronne ostre oszacowania oraz asymptotyka rozwiązań fraktalnych równań Burgersa ([5], *Nonlinear Anaysis*, 2016 oraz [7], *Journal of Differential Equations*, 2016); asymptotyka rozwiązań równania quasi-geostroficznego ([14], *Nonlinearity*, 2020)

3. metoda Steina: przybliżone oszacowania dla funkcjonałów zmiennych losowych jednostajnych z zastosowaniami do wielokrotnych całek stochastycznych i U-statystyk ([9], *Electronic Journal of Probability*, 2018); oszacowania dla aproksymacji gaussowskich dyskretnych wersji losowych całek oraz ważonych U-statystyk nabudowanych na zmiennych Bernoulli'ego z zastosowaniem do szybkości zbieżności w analizie losowych grafów Erdösa-Rényi'ego w metryce Kołmogorowa ([12], *Bernoulli*, 2020) oraz w metryce Wassersteina ([16], *Stochastics and Stochastics Reports*, 2022); aproksymacje typu Berry-Esseena dla funkcjonałów od niezależnych zmiennych losowych z zastosowaniem do oszacowań na odległość Kołmogorowa dla U-statystyk ze słabym warunkiem dekomponowalności oraz do oszacowań czwartego momentu dla statystyk liniowych i kwadratowych ([19], *Electronic Journal of Probability*, 2022);

4. kombinatoryka: kongruencje między r-tymi wielomianami Bella, a wielomianami generowanymi przez przestawienia ([13], *Research in Number Theory*, 2020); wsteczna kongruencja Toucharda wiążąca r-te liczby Bella z liczbami podziałów bez singletonów, a w ogólnej wersji praca dotyczy uogólnienia kongruencji Suna-Zagiera ([18], *Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin*, 2021);

5. procesy punktowe: wzór momentowy typu Mecke'go-Palma dla całek wielokrotnych względem miary Poissona i jej intensywności z zastosowaniem do procesów Lévy'ego. ([1], *Stochastic Analysis and Related Topics*, 2017).

Prace te opublikowane są w większości w dobrych lub bardzo dobrych czasopismach. Według bazy AMS mają 61 cytowań (35 bez autocytowań), natomiast indeks Hirscha wynosi 5 (4 bez autocytowań). Wskaźniki te są na przyzwoitym poziomie. Podobne wartości podają bazy WoS oraz Scopus. Najczęściej (11/7) cytowana jest praca [H1]. Wśród współautorów dominują uznani matematycy z probabilistycznej grupy naukowej z Politechniki Wrocławskiej, m.in. Krzysztof Bogdan, Tomasz Jakubowski, Jacek Małecki, Michał Ryznar, Tomasz Żak. Współautorem jednaj z prac jest Jan Rosiński z University of Tennesee w Knoxville, USA. Prace poświęcone metodzie Steina są napisane wspólnie z Nicolausem Privault z Nanyang Technological University w Singapurze, wybitnym specjalistą w tej dziedzinie. Współpraca z Nicolausem Privault jest trwałym elementem badań naukowych Habilitanta o czym świadczą liczne (w tym trzy długoterminowe) pobyty Habilitanta w Nanyang Technological University w ostatnich ośmiu latach.

T.W.

W 2022 roku Habilitant ozyskał grant NCN w ramach programu SONATA. Rok wcześniej został wybrany do Academia Iuvenum, organizacji w Politechnice Wrocławskiej skupiającej młodych naukowców i mającej na celu rozwijanie interdyscyplinarności wśród młodych naukowców. Warto zwrócić uwagę na fakt, że Habilitant ma już pewien dorobek w zakresie kształcenie kadry i organizacji nauki: był promotorem pomocniczym w przewodzie doktorskim dr. Kamlia Bogusa; współtworzył na Politechnice Wrocławskiej seminarium poświęcone grafom losowym i strukurom dyskretnym; był członkiem komitetów organizacyjnych lub naukowych trzech międzynarodowych konferencji *Probability and Analysis*, które odbywały się w Będlewie. Na uwagę zasługuje też znaczne zaangażowanie Habilitanta w popularyzację nauki: udział w organizacji krajowych kwalifikacji do *International Championship of Mathematical and Logical Games*, utworzenie studenckiego Matematycznego Klubu Naukowego, czynny udział w imprezach popularyzujących naukę takich jak "Tydzień Matemtayczny", czy "Noc innowacji".

KONKLUZJA

Dr Grzegorz Serafin przedstawił rozprawę habilitacyjną składającą się z czterech publikacji zawierających nowe i ważne wyniki dotyczące własności procesów Bessela zabijanych przy wyjściu z odcinka oraz procesu Wienera zabijanego przy wyjściu z kuli, czy ogólniej, ze zbioru wypukłego o gładkim brzegu. Mowa o ostrych dwustronnych oszacowaniach jąder ciepła Fouriera-Bessela oraz Dirichleta-Laplace'a, jak też o oszacowaniach gęstości czasów wyjścia. Wyniki dla ruchu Browna pozwalają na doprecyzowania słynnej reguły Marka Kaca, mówiącej o tym, że cząsteczki Brownowskie zabijane na brzegu, nie przeczuwają katastrofy, która je tam czeka. Z badań Habilitanta wynika, że owszem przeczuwają, ale słabiej niż wykładniczo (i to na ile słabiej jest dokładnie wyjaśnione). Na wyróżnienie zasługuje praca [H4], tak ze względu na ogólny charakter otrzymanych wyników, jak i, a może nawet przede wszystkim, ze względu na ekwilibrystyczne wręcz połączenie metod probabilistycznych, analitycznych i geometrycznych w dowodach twierdzeń zawartych w tej pracy. Również wyniki w pozostałym dorobku naukowym zasługują na uwagę, szczególnie te dotyczące aproksymacji metodą Steina. Habilitant solidnie prezentuje się też w zakresie współpracy naukowej, dydaktyki oraz organizacji badań naukowych.

Stwierdzam, że przedstawiona rozprawa habilitacyjna oraz pozostały dorobek naukowy, stanowią bardzo dobrą podstawę wniosku o nadanie dr. Grzegorzowi Serafinowi stopnia doktora habilitowanego w dziedzinie matematyki i z pełnym przekonaniem popieram ten wniosek.