prof. dr hab. Andrzej Rozkosz
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Mikołaja Kopernika

Toruń, 12 stycznia 2023 r.

Ocena osiągnięć dra Grzegorza Serafina

w związku z postępowaniem o nadanie stopnia doktora habilitowanego w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych w dyscyplimie matematyka

1. Omówienie podstawowego osiągnięcia naukowego

Na podstawowe osiągnięcie naukowe dra G. Serafina zatytułowane **Ruch Browna i proces Bessela w obszarach wypukłych** składa się cykl 4 następujących prac:

[H1] J. Małecki, G. Serafin, T. Żórawik, Fourier–Bessel heat kernel estimates, *J. Math. Anal. Appl.* 439 (2016) 91–102.

[H2] G. Serafin, Exit times densities of the Bessel process, *Proc. Amer. Math. Soc.* 145 (2017) 3165–3178.

[H3] J. Małecki, G. Serafin, Dirichlet heat kernel for the Laplacian in a ball, *Potential Anal.* 52 (2020) 545–563.

[H4] G. Serafin, Laplace Dirichlet heat kernel in convex domains, *J. Differential Equations* 314 (2022) 700–732.

Wszystkie prace opublikowane zostały po uzyskaniu stopnia doktora. Z informacji zawartej w autreferacie wynika, że wkład G. Serafina w powstanie współautorskich prac [H1, H3] można uznać za dominujący.

Podstawowe osiągnięcie (rozprawa habilitacyjna) dotyczny ruchu Browna oraz procesu Bessela z indeksem $\mu \in \mathbb{R}$, tzn. dyfuzji $R^{(\mu)}$ o wartościach w $[0, \infty)$ startującej z $x > 0$ o generatorze $\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\mu+1}{2x}\frac{d}{dx}$.

Prace wchodzące w skład rozprawy dotyczą teorii potencjału i koncentrują się wokół następujących zagadnień:

- Oszacowania jądra ciepła Fouriera–Bessela i oszacowania dla czasów wyjścia procesu Bessela z odcinków $[0, 1)$ (proces zabity przy wyjściu z 1) lub $(0, 1)$ (proces zabity przy wyjściu z 0 lub 1).

- Oszacowania jąder ciepła Dirichleta dla operatora Laplace'a.

Jest to tematyka klasyczna, którą zajmowało się szereg znakomitych matematyków. W pewnym sensie, prace autora mogą być uznane za kontynuację badań zapoczątkowanych przez M. Kaca w 1950 r. i później rozwijanych przez wielu autorów. Jest jasne, że osiągnięcie nowych, istotnych wyników musiało być trudne i wymagało zastosowania subtelnych rozumowań. W rozprawie są takie wyniki. Poniżej krótko je omówię.

Niech $\mu > -1$ i $p^{(\mu)}(t,x,y)$ oznacza gęstość prawdopodobieństwa przejścia, względem miary referencyjnej $m^{(\mu)}(dy) = 2y^{2\mu+1}\,dy$, procesu $R^{(\mu)}$ (odbijanego w 0) i zabijanego przy wyjściu z $[0,1)$ (w tych oznaczeniach $G_t^{(\mu)}(x,y) := 2p^{(\mu)}(2t,x,y)$ to jądro Fouriera–Bessela z tytułu pracy [H1]). W [H1, Theorem 1.1] podano dwustronne oszacowania dla $p^{(\mu)}(t,x,y)$ dla małych t (dla dużych t takie oszacowania znane były wcześniej). Dla małych t znane wyniki nie były ostre w tym sensie, że w występujących w nich czynnikach gaussowskich w dolnym i górnym oszacowaniu występowały różne stałe. Istota osiągnięcia polega na tym, że we wspomnianym twierdzeniu stałe te są takie same. Jako wniosek ([H1, Corollary 1.2]) podano ostre dwustronne oszacowania dla gęstości przejścia $p^{(\mu)}_{(0,1)}(t,x,y)$ procesu $R^{(\mu)}$ zabitego przy wyjściu z odcinka $(0,1)$. Są to wyniki mocne i interesujące.

W pracy [H2] badane są gęstości rozkładów czasów wyjścia procesu Bessela z odcinka $[0,1)$ lub $(0,1)$. Oznaczmy przez $\tau_{[0,1)}$ pierwszy moment wyjścia procesu $R^{(\mu)}$ z odcinka $[0,1)$, a przez $\tau_{(0,1)}$ z odcinka $(0,1)$. W prace badane są dwa obiekty: gęstość $\tau_{[0,1)}$ przy założeniu, że proces $R^{(\mu)}$ startuje z $x \in (0,1)$, tzn. gęstość

$$q_1^{(\mu)}(t,x) := P_x(\tau_{[0,1)} \in dt), \quad t > 0, x \in (0,1),$$

oraz gęstość rozkładu czasu i miejsca w przypadku odcinka $(0,1)$, tzn. gęstość

$$q_{0,1}^{(\mu)}(t,x,y) := P_x(\tau_{(0,1)} \in dt; R^{(\mu)}(\tau_{(0,1)}) = y), \quad t > 0, x \in (0,1)$$

gdzie $y = 0$ lub $y = 1$. W [H2] uzyskano m. in. dwustronne ostre oszacowania dla $q_1^{(\mu)}(t,x)$ gdy $\mu > -1$ (Theorem 3.3) oraz dwustronne ostre oszacowania dla $q_{0,1}^{(\mu)}(t,x,y)$ gdy $\mu < 0$. Oszczcowania te są konsekwencją istotnego twierdzenia [H2, Theorem 3.1], które podaje pewne reprezentacje $q_1^{(\mu)}(t,x)$ oraz $q_{0,1}^{(\mu)}(t,x,y)$, $y \in \{0,1\}$, w terminach gęstości $p_1^{(\mu)}(t,x,y)$ oraz $p^{(\mu)}_{(0,1)}(t,x,y)$. Inne warte wspomnienia i mocne wyniki dotyczą zachowania asymptotycznego, dla małych t gęstości $q_1^{(\mu)}$ oraz $q_{0,1}^{(\mu)}$ (np. [H2,Theorem 4.2]).

Prace [H3, H4] dotyczą oszacowań prawdopodobieństw przejścia $p_D(t,x,y)$ dla n wymiarowego standardowego ruchu Browna W zabitego przy wyjściu z pewnej dziedziny $D \subset \mathbb{R}^d$. Tutaj ostre dwustronne oszacownia znane były jedynie w bardzo szczególnych przypadkach, np. $n = 1$ i $D = (0,\infty)$ lub $D = (a,b)$. Dla $n > 1$ znane oszacowania nie były ostre. Uzyskanie ostrych oszacowń jest trudne nawet dla kuli $B := B(0,1)$. Temu przypadkowi poświęcona jest praca [H3]. Uzyskano w niej (Theorem 1) dwustronne ostre szacowanie postaci: dla dowonego $T > 0$,

$$p_B(t,x,y) \approx h(t,x,y)p(t,x,y), \quad |x|,|y| < 1, t < T, \qquad (*)$$

gdzie p jest funkcją przejścia W i h jest postaci

$$h(t,x,y) = \Big(1\wedge\frac{(1-|x|)(1-|y|)}{t}\Big)+\Big(1\wedge\frac{(1-|x|)|x-y|^2}{t}\Big)\Big(1\wedge\frac{(1-|y|)|x-y|^2}{t}\Big).$$

Stałe w szacowaniu $(*)$ zależą od T i wymiaru n. Użyte wcześniej określenie „ostre" odnosi się między innymi do faktu, że p w $(*)$ oznacza rozwiązanie fundamentalne dla połowy operatora Laplace'a $(1/2)\Delta$; w znanych wcześniej oszacowaniach w dolnym i górnym występowało rozwiązanie dla $c\Delta$ z różnymi stałymi c. Innymi słowy, stałe w czynnikach ekponencjalnych w $(*)$ (ukryte w p) były różne. Szacowanie $(*)$ w przypadku $n = 1$ jest równoważne znanemu oszacowaniu dla odcinka $(-1, 1)$. Jako wniosek, w [H3, Corollary 2] podano dwustronne ostre oszacowania dla gęstości $q_B(t, x, y)$ czasu pierwszego wyjścia z B.

Obszerna praca [H4] poświęcona jest oszacowniom p_D dla ogólniejszych niż B dziedzin wypukłych klasy $C^{1,1}$. W [H4] uzyskano szereg oszacowań (górne, dolne, obustronne; część dla specjalnych podklas D) dla p_D. Omówienie ich tutaj jest niemożliwe i niecelowe. Warto jednak wspomnieć, że oszacowania zależą od geometrii zbioru D i mają postać podobną do $(*)$, przy czym funkcja h jest bardziej skomplikowana (nieściśle mówiąc, zamiast odległości x i y od brzegu B pojawiają się funkcje od odległości (x, y) do brzegu rozpatrywanych zbiorów). Wyniki z pracy [H4] są subtelne i uważam je za bardzo mocne.

Z powyższego omówienia jasno wynika, że tematyka rozprawy jest bardzo spójna. Uzyskane wyniki są istotne i bardzo eleganckie. Celowo przytoczyłem dokładniej szacowanie $(*)$ aby to zobaczyć (pozostałe wyniki są także bardzo eleganckie) i jednocześnie podkreślić, że autor zdołał udowodnić istotnie coś nowego nawet dla ruchu Browna i kuli!

Warto wspomnieć o dowodach. Już sama stosowana terminologia (jądro ciepła Fouriera–Bessela $\leftrightarrow$ funkcja przejścia procesu Bessela, jądro Dirichleta dla operatora Laplace'a $\leftrightarrow$ funkcja przejścia zabitego ruchu Browna) mówi, że tematyka badań należy jednocześnie do (powiedzmy) analitycznej teorii potencjału i probabilistycznej teorii potencjału. Końcowe wyniki mają sformułowania czysto analityczne, ale wydaje się, że autor zdołal uzyskać swoje wyniki dzięki umiejętności połączenia metod obu teorii. Jest to widoczne na przykład po porównaniu cytowanych w autoreferacie prac [46, 47] dotyczących jądra Fouriera–Bessela, w których stosowane są metody czysto analityczne i metod z prac [H1, H2]. Również prace [H3, H4] pokazują (jest to też dobrze widoczne po lekturze świetnie napisanego autoreferatu), że autor ma bardzo dobre intuicje probabilistyczne i zna metody probabilistyczne, a z drugiej strony zna metody czysto analityczne. Posiada też bardzo duże umiejętności, które z braku lepszego określenia nazwę technicznymi.

2. Omówienie pozostałej aktywności naukowej, w tym współpracy międzynarodowej, dorobku dydaktycznego, osiągnięć organizacyjnych i osiągnięć dotyczących popularyzacji nauki

Dr G. Serafin jest autorem lub współautorem 20 prac naukowych (w tym rozdział w monograffi naukowej); 17 z nich zostało przyjętych do druku po doktoracie. Jest to dorobek dość duży, ale co ważniejsze i warte podkreślenia, o różnorodnej tematyce. Jest m. in. autorem (lub współautorem) prac o równaniu Burgersa z ułamkowym laplasjanem, prac które można zaliczyć do teorii liczb, prac na temat U-statystyk, metody approksymacji Steina i jej zastosowań do grafów losowych. Cały dorobek naukowy dra G. Serafina cytowany był 61 razy, w tym 36 bez autocytowań (wg WoS); 61 razy przez 43 autorów (wg MathSciNet, dane z 12 stycznia 2023). Uważam te wyniki za przyzwoite.

Dr G. Serafin prowadzi (od 2015 r.) intensywną współpracę naukową z prof. N. Privault z Singapuru. Należy podkreśić, że w wyniku tej współpracy uzyskał już istotne wyniki z dziedziny odległej od jego wcześniejszych i nadal rozwijanych zinteresowań (takich jak w doktoracie lub habilitacji).

Z autoreferatu wynika, że dr G. Serafin ma bardzo duże doświadczenie dydaktyczne oraz spore osiągnięcia dotyczące popularyzacji matematyki i pracy ze zdolnymi studentami i uczniami. Osobiście najbardziej cenię działania, które mają charakter trwały (np. prowadzenie kółek matematycznych w Akademickim LO, czy wspomniany autorski kurs w ramach Studium Talent).

Na uwagę zasługuje działalność organizacyjna oraz aktywność w pozyskiwaniu grantów. Tutaj wymienię udział w utworzeniu studenckiego Koła Naukowego Matematyków oraz seminarium Grafy losowe i struktury dyskretne (pokłosie współpracy z prof. N. Privault). O aktywności w pozyskiwaniu grantów świadczy uzyskanie grantu SONATA z NCN, dotacji celowej z MNiSW, grantu na pobyt w Singapurze.

3. Konkluzja

Uważam, że dr G. Serafin jest dojrzałym i samodzielnym matematykiem o szerokich zinteresowaniach i znaczącym dorobku. W szczególności, wyniki uzyskane w pracach składających się na podstawowe osiągnięcie naukowe stanowią istotny wkład do teorii potencjału procesów Bessela i ruchu Browna. Wyniki te oraz jego pozostałe osiągnięcia sprawiają, że dr G. Serafin w pełni spełnia zwyczajowe i ustawowe wymogi stawiane osobom ubiegającym się o nadanie stopnia doktora habilitowanego. Dlatego popieram wniosek o nadanie mu stopnia doktora habilitowanego w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych w dyscyplinie matematyka.

A. Rozkosz