

# Autoreferat

## 1 Imię i nazwisko.

Grzegorz Serafin

## 2 Posiadane dyplomy, stopnie naukowe - z podaniem nazwy miejsca i roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej.

2010 dyplom **magistra matematyki**,  
Instytut Matematyki i Informatyki  
Wydział Podstawowych Problemów Techniki  
Politechnika Wroclawska  
Tytuł pracy: *Wybrane zagadnienia z teorii potencjału na przestrzeniach hiperbolicznych*  
Promotor: dr. hab. Jacek Małecki, prof. PWr.

2014 dyplom **doktora nauk matematycznych**,  
Instytut Matematyki i Informatyki  
Wydział Podstawowych Problemów Techniki  
Politechnika Wroclawska  
Tytuł rozprawy: *Teoria potencjału hiperbolicznego ruchu Browna z dryfem*  
Promotor: dr. hab. Tomasz Żak, prof. PWr  
Promotor pomocniczy: dr. hab. Jacek Małecki, prof. PWr

## 3 Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych.

2010–2016 Politechnika Wroclawska  
Stanowisko: Asystent

od 2016 Politechnika Wroclawska  
Stanowisko: Adiunkt

2015–2019 Nanyang Technological University, Singapur  
Stanowisko: Research Fellow  
Okresy zatrudnienia:  
13.05. – 30.09.2015  
02.10.2017 – 18.02.2018  
18.02. – 25.08.2019:

## 4 Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 Ustawy.

### Osiągnięcie naukowe:

Cykl powiązanych artykułów naukowych o tytule:

***Ruch Browna i proces Bessela w obszarach wypukłych.***

Lista prac składających się na osiągnięcie naukowe:

- [H1] J. Małecki, G. Serafin, T. Żórawik  
Fourier-Bessel heat kernel estimates  
*Journal of Mathematical Analysis and Applications* 439(1), 91–102, 2016.
- [H2] G. Serafin  
Exit times densities of the Bessel process  
*Proceedings of the American Mathematical Society* 145, 3165–3178, 2017.
- [H3] J. Małecki, G. Serafin  
Dirichlet heat kernel for the Laplacian in a ball  
*Potential Analysis* 52, 545–563, 2020.
- [H4] G. Serafin  
Laplace Dirichlet heat kernels in convex domains  
*Journal of Differential Equations* 314, 700–732, 2022.

### 4.1 Wstęp

Jądra ciepła są podstawowymi obiektami zarówno w analizie matematycznej, jako rozwiązania fundamentalne parabolicznych równań różniczkowych (równań ciepła), jak i w teorii procesów stochastycznych, jako ich gęstości prawdopodobieństw przejścia. Ponadto, a może przede wszystkim, są istotnymi obiektami z punktu widzenia fizyki, ponieważ opisują wiele zjawisk, jak np. rozprzestrzenianie się cząstek czy temperatury. Badania nad zachowaniem jąder ciepła związanych z różnymi operatorami, obszarami czy różnościami mają długą historię. Istnieje olbrzymia liczba prac naukowych dotyczących tego tematu zawierających wiele ogólnych i pięknych wyników (patrz m.in. [62, 15, 22, 23, 28, 39, 67] oraz zawarte w nich referencje). Niemniej jednak okazuje się, że wciąż zostało sporo otwartych pytań nawet w najbardziej klasycznym przypadku, czyli gdy rozważamy standardowy operator Laplace’a (równoważnie - ruch Browna) w przestrzeni euklidesowej  $\mathbb{R}^n$ , co jest tematem artykułów [H3] oraz [H4].

Drugim zestawem operator-proces, którym będziemy się zajmować, jest połowa operatora Bessela  $\frac{1}{2}\mathcal{L}_\mu$  oraz związany z nim proces Bessela  $R^{(\mu)}$ , gdzie  $\mu \in \mathbb{R}$  oznacza jego indeks. Dla indeksów postaci  $\mu = n/2 - 1$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,  $\mathcal{L}_\mu$  jest częścią radialną połowy  $n$ -wymiarowego laplasjanu, a proces Bessela może być opisany jako norma  $n$ -wymiarowego ruchu Browna. Dodatkowo proces ten jest związany, poprzez relację Lampertiego, z geometrycznym ruchem Browna. Co więcej, jako jedna ze współrzędnych dyfuzji Bessela-Browna pełni ważną rolę w badaniach nad hiperbolicznym ruchem Browna [1, 14] oraz używany jest do reprezentacji

procesów stabilnych [45]. Należy też wspomnieć, że proces Bessela jest wykorzystywany do modelowania cen akcji i ma dalsze zastosowania w matematyce finansowej [25, 27, 65].

Głównym celem prac nad osiągnięciem było zbadanie zachowania gęstości prawdopodobieństw przejścia wspomnianych dyfuzji zabitych przy wychodzeniu z danego zbioru. Innymi słowy, badania dotyczyły jąder ciepła Dirichleta dla operatorów Bessela i Laplace'a. Rozważamy głównie zbiory ograniczone, których zachowanie dla dużych czasów wynika zwykle z ogólnej teorii spektralnej, co prowadzi do reprezentacji szeregowych wykorzystujących funkcje i wartości własne operatora w danym zbiorze. Niestety szeregi te bywają zupełnie nieprzydatne w przypadku małych czasów, ponieważ są mocno oscylujące i kasowania między składnikami mają kluczowe znaczenie, zwykle nie do opanowania. Pierwsze oszacowania dotyczące zachowania jąder ciepła Dirichleta dla małych czasów są związane z *property of not feeling the boundary* (własnością niewyczuwania brzegu) wprowadzoną przez M. Kaca w pracy [37], która mówi, że dla punktów  $x, y$  z obszaru  $D$  takich, że odcinek  $\overline{xy}$  zawiera się w  $D$  zachodzi

$$\frac{p_D(t, x, y)}{p(t, x, y)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1, \quad (1)$$

gdzie  $p(t, x, y)$  i  $p_D(t, x, y)$  są jądrami ciepła odpowiednio globalnym oraz Dirichleta. Później własność ta była uogólniana w wielu różnych kierunkach. Jej słabością jest jednak to, że argumenty przestrzenne  $x$  i  $y$  są ustalone lub przynajmniej oddalone od brzegu  $\partial D$  zbioru  $D$ . Z drugiej strony istnieje wiele wyników dotyczących oszacowań jąder ciepła, które uwzględniają zachowanie przy brzegu. Łączy je jednak inna słabość - dolne i górne oszacowania są dla pewnego zakresu argumentów zupełnie nieporównywalne, co nie pozwala uchwycić dokładnego zachowania jąder ciepła Dirichleta ani jego stosunku do globalnego jądra ciepła. Moje osiągnięcie, składające się z artykułów [H1]–[H4], poświęcone jest rozwiązaniu tego problemu w przypadku zbiorów  $(0, 1)$  i  $[0, 1)$  dla procesu Bessela oraz dużej rodziny zbiorów klasy  $C^{1,1}$  dla ruchu Browna. Mianowicie wyprowadzone oszacowania mają tę własność, że dolne i górne są, z dokładnością do stałej multiplikatywnej, takie same. Tego typu oszacowania będziemy nazywać ostrymi. Uzyskałem również wyniki dotyczące rozkładu czasu i miejsca pierwszego wyjścia z danego zbioru  $D$ . Szanownego czytelnika odsyłam do niedawnych artykułów [6, 7, 8, 31, 48, 49], gdzie można znaleźć ostre oszacowania w przypadku innych zbiorów i procesów. Niemniej jednak tak dokładne oszacowania jąder ciepła Dirichleta są bardzo rzadkie. W przypadku ruchu Browna były one znane tylko w tak podstawowych przypadkach, jak półprosta oraz odcinek (i ich wielowymiarowe odpowiedniki oraz iloczyny kartezjańskie), ponieważ wyrażają się za pomocą prostych, jawnych wzorów. W przypadku procesu Bessela oszacowano również jądro ciepła Dirichleta dla półprostej [8, 9], ale wymagało to znacznego wysiłku. Po przeanalizowaniu literatury można zauważyć, że większość podejść do estymacji jądra ciepła ma charakter głównie analityczny, co zwykle prowadzi do różnych stałych w wykładnikach w czynnikach gaussowskich, a to powoduje znaczną różnicę między dolnym i górnym oszacowaniem. Dla porównania moje i współautorów podejście opiera się na metodach probabilistycznych, które dają dodatkowe reprezentacje jąder ciepła. Ponadto dostarczają nam wielu intuicji i pomagają zrozumieć zachowanie badanych funkcji. Pomimo zalet metod probabilistycznych, nadal wymagają one wsparcia surowej analizy i ta mieszanka okazała się bardzo skuteczna w rozważanym temacie.

Opis wyników jest zorganizowany następująco. W rozdziale 4.2 przedstawiamy ogólne definicje i oznaczenia. Rozdział 4.3 poświęcony jest procesowi Bessela, który jest omawiany w artykułach [H1] i [H2]. Rozdział 4.4 dotyczy natomiast wyników z prac [H3] i [H4], w których badane są oszacowania jąder ciepła Dirichleta dla ruchu Browna. Artykuły [H1]

i [H3] zawierają tylko jeden główny wynik, dlatego w ich przypadku podaję nie tylko ogólne metody, ale również szkice dowodów. Wreszcie rozdział 4.5 określa mój wkład w powstanie artykułów zawartych w osiągnięciu, a w rozdziale 4.6 znajduje się podsumowanie wyników oraz ich znaczenie.

## 4.2 Definicje i oznaczenia

W tym rozdziale zbierzemy podstawowe fakty i wprowadzimy notację dotyczącą ogólnej teorii procesów stochastycznych oraz związanych z nimi półgrup. Część mniej istotnych definicji będzie wprowadzana później w razie potrzeby.

Niech  $X = \{X(t)\}_{t \geq 0}$  będzie  $n$ -wymiarową dyfuzją i oznaczmy przez  $\mathbb{P}_x$  i  $\mathbb{E}_x$  rozkład prawdopodobieństwa oraz związaną z nim wartość oczekiwaną, odpowiednio, procesu  $X$  startującego z punktu  $x \in \mathbb{R}^n$ . Gęstością prawdopodobieństw przejścia tego procesu jest funkcja  $p(t, x, y)$  spełniająca

$$\mathbb{P}_x(X(t) \in A) = \int_A p(t, x, y)m(y)dy, \quad t \geq 0, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \quad (2)$$

gdzie  $m(dy) = dy$  jest miarą Lebesgue'a w przypadku ruchu Browna oraz miarą odniesienia  $m(y)dy = 2y^{2\mu+1}dy$  w przypadku procesu Bessela. W rozdziale 4.3 będę używał oznaczenia  $p^{(\mu)}$  zamiast  $p$  aby wskazać indeks  $\mu \in \mathbb{R}$  procesu Bessela oraz odróżnić jego gęstość prawdopodobieństw przejścia od gęstości dla ruchu Browna.

Definicja (2) zapewnia m.in. symetrię względem argumentów przestrzennych  $p(t, x, y) = p(t, y, x)$ . Ponadto zachodzi następujący wzór Chapman-Kołmogorowa (własność półgrupowa) dla  $s, t \geq 0$  oraz  $x, y \in \mathbb{R}^n$ :

$$\int_{\mathbb{R}^n} p(s, x, z)p(t, z, y)m(z)dz = p(s+t, x, y). \quad (3)$$

Generator infinitesimalny procesu  $X$  zadany jest wzorem

$$Af = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \left( \int_{\mathbb{R}^n} p(t, x, y)f(y)m(y)dy - f(x) \right), \quad f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Gęstość prawdopodobieństw przejścia  $p(t, x, y)$  jest wtedy rozwiązaniem zagadnienia

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x, y) = Au(t, x, y), & t > 0, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x, y)m(y) = \delta_x(y). \end{cases} \quad (4)$$

Granica powyżej rozumiana jest w sensie dystrybucyjnym, a  $\delta_x$  to delta Diraca. Pierwszy wzór znany jest jako równanie ciepła i w konsekwencji funkcja  $p(t, x, y)$  nazywana jest jądrem ciepła.

Dla ustalonego zbioru  $D \subset \mathbb{R}^n$  (jeśli  $D$  jest otwarty i spójny to będziemy go nazywać obszarem) definiujemy pierwszy czas wyjścia ze zbioru  $D$  jako

$$\tau_D = \inf\{t > 0 : X(t) \notin D\}.$$

Gęstość tej zmiennej losowej oznaczamy przez  $q_D(t, x)$ . Dodatkowo definiujemy  $q_D(t, x, y)$  jako gęstość rozkładu wektora losowego czasu oraz miejsca pierwszego wyjścia procesu  $X$  ze zbioru  $D$ , czyli dla borelowskich  $A \subset \partial D$  oraz  $I \subset [0, \infty)$  mamy

$$P_x(\tau_D \in T; X(\tau_D) \in A) = \int_A \int_I q_D(t, x, y)dt \sigma_D(y)dy,$$

gdzie  $\sigma_D(y)dy$  jest miarą powierzchniową na  $\partial D$  generowaną przez miarę  $m$ . Oczywiście zachodzi  $q_D(t, x) = \int_{\partial D} q_D(t, x, y)dy$ .

Proces  $X^D$  jest zdefiniowany jako proces  $X$  zabijany przy wyjściu ze zbioru  $D$ :

$$X^D(t) = \begin{cases} X(t), & \text{for } t < \tau_D, \\ \partial, & \text{for } t \geq \tau_D, \end{cases}$$

gdzie  $\partial$  jest dodatkowym elementem przestrzeni stanów zwanym cmentarzem. Gęstość prawdopodobieństw przejścia procesu  $X^D$  będzie oznaczana przez  $p_D(t, x, y)$ . Mianowicie dla zbioru borelowskiego  $A \subset \mathbb{R}^n$  mamy

$$\mathbb{P}^x \left( X^D(t) \in A \right) = \mathbb{E}^x [t < \tau_D; X(t) \in A] = \int_A p_D(t, x, y)m(y)dy.$$

Jeśli  $D$  jest wystarczająco regularny (np. klasy  $C^{1,1}$ ), wtedy funkcja  $p_D(t, x, y)$  spełnia równanie ciepła (4) z dodatkowym warunkiem Dirichleta  $u(t, x, y) = 0$  dla  $y \in \partial A$  i jest nazywana jądrem ciepła Dirichleta. Dla odróżnienia zwykle jądro ciepła  $p(t, x, y)$  będzie często nazywane globalnym. Mocna własność Markowa implikuje reprezentację

$$\begin{aligned} p_D(t, x, y) &= p(t, x, y) - \mathbb{E}^x [\tau_D < t; p(t - \tau_D, X(\tau_D), y)] \\ &= p(t, x, y) - \int_0^t \int_{\partial D} p(t - s, z, y)q_D(s, z, y)dz ds, \end{aligned} \quad (5)$$

znaną w literaturze jako wzór Hunta [34]. Dodajmy, że funkcja  $p_D(t, x, y)$  również spełnia tożsamość Chapmana-Kołmogorowa (3) oraz symetrię  $p_D(t, x, y) = p_D(t, y, x)$  dla  $x, y \in D$ . Jedną z konsekwencji wzoru Hunta jest następująca monotoniczność względem zbiorów: dla  $A_1 \subset A_2 \subset \mathbb{R}^n$  zachodzi

$$p_{A_1}(t, x, y) \leq p_{A_2}(t, x, y), \quad x, y \in A_1, t > 0. \quad (6)$$

W całym opisie  $|x - y|$  oznacza odległość euklidesową między punktami  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Ponieważ wiele wyrażeń zależy będzie od odległości punktów od brzegu zbioru  $D$ , definiujemy dla  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$  jego odległość od  $\partial D$  jako

$$\delta_D(x) = \inf\{|x - z| : z \in \partial D\}.$$

Przez  $B(x, r)$  oznaczamy kulę o promieniu  $r > 0$  i środku w  $x \in \mathbb{R}^n$ . Jeśli wymiar rozważanej kuli jest inny niż  $n$ , wtedy wskazujemy to poprzez indeks dolny, mianowicie  $B_k(x, r)$  to  $k$ -wymiarowa kula.

Dla dwóch nieujemny funkcji  $f$  oraz  $g$  oznaczamy  $f \lesssim g$  jeśli istnieje stała  $c > 0$  taka, że  $f \leq cg$  zachodzi we wskazanym zakresie argumentów. Jeśli  $f \lesssim g$  oraz  $g \lesssim f$ , wtedy piszemy  $f \approx g$ . Oszacowania tego typu nazywać będziemy ostrymi. Gdy stała  $c$  zależy od jakichś parametrów, wtedy umieszczamy te parametry nad symbolem  $\lesssim$  lub  $\approx$ . Dodatkowo używamy oznaczeń  $a \wedge b := \min\{a, b\}$  oraz  $a \vee b := \max\{a, b\}$  dla  $a, b \in \mathbb{R}$ .

## 4.3 Proces Bessela

### 4.3.1 Podstawowe własności

Niech  $R^{(\mu)} = \{R^{(\mu)}(t)\}_{t \geq 0}$  będzie procesem Bessela z indeksem  $\mu \in \mathbb{R}$  startującym z punktu  $x > 0$ . Jest to dyfuzja na zbiorze  $[0, \infty)$  generowana przez operator

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_\mu = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\mu + 1}{2x} \frac{d}{dx}. \quad (7)$$

Innym popularnym parametrem procesu Bessela jest jego wymiar  $\rho = 2\mu + 2$ .

Jedną z trudności przy badaniu procesu Bessela jest jego zachowanie w zerze, które to zależy od wartości indeksu  $\mu$ . Dla  $\mu \geq 0$  proces nigdy nie osiąga zera. Dla  $\mu < 0$  zawsze osiąga zero, przy czym dla  $\mu \leq -1$  proces zostaje w zerze, a dla  $\mu \in (-1, 0)$  możemy rozpatrywać jeden z dwóch przypadków: zero jest zabijające lub odbijające. Ponadto gdy  $\mu \geq 0$  lub gdy  $\mu \in (-1, 1)$  i zero jest odbijające możemy wystartować proces z  $x = 0$ , ale wiązałyby się to z dodatkowymi wzorami, podczas gdy otrzymane wyniki łatwo rozszerzają się na ten przypadek dzięki ciągłości. Dlatego też, aby uprościć prezentację wyników, zakładamy  $x > 0$ .

Poprzez  $\mathbb{P}_x^{(\mu)}$  oraz  $\mathbb{E}_x^{(\mu)}$  oznaczamy rozkład oraz związaną z nim wartość oczekiwaną procesu Bessela z indeksem  $\mu \in \mathbb{R}$  startującym z  $x > 0$ . Naturalną filtrację procesu  $R^{(\mu)}(t)$  oznaczamy przez  $\mathcal{F}_t = \sigma\{R^{(\mu)}(s) : s \leq t\}$ . Rozkłady  $\mathbb{P}_x^{(\mu)}$  and  $\mathbb{P}_x^{(\nu)}$  procesów Bessela o indeksach  $\mu \in \mathbb{R}$  i  $\nu \in \mathbb{R}$ , odpowiednio, są absolutnie ciągłe względem siebie, a pochodna Radona-Nikodyma ma postać (patrz [55], p. 450 oraz [44], p. 314)

$$\frac{d\mathbb{P}_x^{(\mu)}}{d\mathbb{P}_x^{(\nu)}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \left( \frac{R^{(\nu)}(t)}{x} \right)^{\mu-\nu} \exp \left( -\frac{\mu^2 - \nu^2}{2} \int_0^t \frac{ds}{[R^{(\nu)}(s)]^2} \right). \quad (8)$$

Wzór ten zachodzi  $\mathbb{P}_x^{(\nu)}$ -p.n.p. na zbiorze  $\{\tau_{(0,\infty)} > t\}$ . Biorąc  $\nu = -\mu > 0$  oraz zakładając, że  $R^{(\mu)}$  jest zabijany w zerze, można zauważyć, że teorie potencjałów obu procesów są do siebie bardzo zbliżone.

Jak już było wspomniane, proces Bessela z indeksem  $\mu = n/2 - 1$  (który odpowiada wymiarowi  $\rho = n$ ),  $n = 1, 2, 3, \dots$ , można przedstawić jako

$$R^{(n/2)} \stackrel{d}{=} \sqrt{W_1^2 + \dots + W_n^2},$$

gdzie  $(W_1, \dots, W_n)$  jest  $n$ -wymiarowym ruchem Browna (dyfuzją generowaną przez  $\frac{1}{2}\Delta$ ) startującym z  $z \in \mathbb{R}^n$ , przy czym  $|z| = x$ . Dodatkowo, dla  $n = 1$  z warunkiem zabijania w zerze  $R^{(-1/2)}$  staje się jednowymiarowym ruchem Browna zabijanym w zerze.

Przez  $p^{(\mu)}(t, x, y)$  oznaczamy gęstość prawdopodobieństw przejścia (względem miary odniesienia  $m(dx) = m(x)dx = 2x^{2\mu+1}dx$ ) procesu  $R^{(\mu)}(t)$  z indeksem  $\mu > -1$  i odbijanym w zerze. Mamy (Section 21 w Appendix 1 w [10])

$$p^{(\mu)}(t, x, y) = \frac{1}{2t} (xy)^{-\mu} \exp \left( -\frac{x^2 + y^2}{2t} \right) I_\mu \left( \frac{xy}{t} \right), \quad x, y, t > 0, \quad (9)$$

gdzie  $I_\mu$  oznacza zmodyfikowaną funkcję Bessela pierwszego rodzaju. Korzystając z jej asymptotyki dostajemy

$$p^{(\mu)}(t, x, y) \stackrel{\mu}{\approx} \frac{e^{-(x-y)^2/2t}}{(yx+t)^{\mu+1/2} \sqrt{t}}, \quad x, y, t > 0. \quad (10)$$

Z własności absolutnej ciągłości wynika, że gęstość prawdopodobieństw przejścia gdy  $\mu < 0$  oraz zero jest zabijające wyraża się wzorem  $(y/x)^{2\mu} p^{(-\mu)}(t, x, y)$ , więc nie ma potrzeby rozważać osobno tego przypadku.

### 4.3.2 Jądro ciepła Fouriera-Bessela

Rozważmy proces Bessela z indeksem  $\mu > -1$  startującym z  $0 < x < a < \infty$  i odbijanym w zerze, który jest zabijany przy osiągnięciu poziomu  $a$  (czyli przy wyjściu ze zbioru  $[0, a)$ ). Jego gęstość prawdopodobieństw przejścia oznaczamy przez  $p_a^{(\mu)}(t, x, y)$ . Dzięki własności

skalowania  $p_a^{(\mu)}(t, x, y) = a p_1(t/a^2, x/a, y/a)$  możemy ograniczyć się do przypadku  $a = 1$ . Podobnie jak dla procesu niezabijanego, własność absolutnej ciągłości (8) pozwala łatwo rozszerzyć przedstawione w tym rozdziale wyniki na przypadek, gdy  $\mu < 0$  a zero jest zabijające.

Okazuje się, że funkcja  $2p_1^{(\mu)}(2t, x, y)$ ,  $\mu > -1$ , jest znana także jako jądro ciepła Fouriera-Bessela  $G_t^\mu(x, y)$ , które można przedstawić przy pomocy funkcji Bessela pierwszego rodzaju  $J_\mu(z)$  oraz jej kolejnych dodatnich miejsc zerowych  $\lambda_{n,\mu}$  w następujący sposób

$$G_t^\mu(x, y) = 2(xy)^{-\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda_{n,\mu}^2 t) \frac{J_\mu(\lambda_{n,\mu} x) J_\mu(\lambda_{n,\mu} y)}{|J_{\mu+1}(\lambda_{n,\mu})|^2}, \quad x, y \in (0, 1), \quad t > 0. \quad (11)$$

Niestety powyższa suma przydaje się do badania zachowania jądra ciepła jedynie dla dużych czasów. Z ogólnej teorii wiadomo, że  $G_t^\nu(x, y)$  zachowuje się wtedy tak jak pierwszy składnik. Natomiast zachowanie funkcji  $G_t^\nu(x, y)$  dla małych czasów jest bardzo trudne do uchwycenia.

Jądro ciepła Dirichleta  $G_t^\nu(x, y)$  oraz jego odpowiedniki są badane od wielu lat w wielu różnych kontekstach, jak np. operatory fundamentalne związane z rozwinięciami Fouriera-Bessela (patrz [17], [18], [19], [20], [21]) czy przestrzenie Hardy'ego [26] (więcej referencji można znaleźć w [46]). Oszacowania funkcji  $G_t^\nu(x, y)$  zostały otrzymane w pracach [46] i [47], jednak nie były one ostre, ponieważ w wykładnikach (w czynnikach gaussowskich) w oszacowaniach górnym i dolnym występowały różne stałe - więcej na ten temat będzie powiedziane w Rozdziale 4.4. W Twierdzeniu 1, które jest głównym wynikiem pracy [H1], zachowanie eksponencjalne jest opisane precyzyjnie, a więc czynniki eksponencjalne w oszacowaniach górnym i dolnym są takie same. Należy wspomnieć, że ostre oszacowania jądra ciepła Dirichleta dla procesu/operatora Bessela zostały wyprowadzone w pracach [9, 8] dla półprostej  $(a, \infty)$ . Badanie półprostej wiąże się jednak z problemami innego rodzaju. Ze względu na oddzielenie od zera, nie było w tym przypadku problemu z zachowaniem procesu w zerze, natomiast główna trudność pojawiała się przy rozważaniu dużych czasów.

**Twierdzenie 1** (Theorem 1 w [H1]).

*Dla dowolnego  $\mu > -1$  mamy*

$$p_1^{(\mu)}(t, x, y) \stackrel{\mu}{\approx} \frac{(1+t)^{\mu+2}}{(t+xy)^{\mu+1/2}} \left( 1 \wedge \frac{(1-x)(1-y)}{t} \right) \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t} - \lambda_{1,\mu}^2 t\right). \quad (12)$$

gdzie  $x, y \in (0, 1)$  oraz  $t > 0$ .

**Uwaga.** Korzystając z (10), powyższe oszacowania można równoważnie przedstawić jako

$$\frac{p_1^{(\mu)}(t, x, y)}{p^{(\mu)}(t, x, y)} \stackrel{\mu}{\approx} \left( 1 \wedge \frac{(1-x)(1-y)}{t} \right) (1+t)^{\mu+2} \exp(-\lambda_{1,\mu}^2 t), \quad (13)$$

co pokazuje zależność między jądrem ciepła Dirichleta a globalnym jądrem ciepła.

*Szkic dowodu Twierdzenia 1.*

Ponieważ oszacowania dla dużych czasów są znane [47], skupimy się na zakresie czasu  $t < t_0$  dla pewnego  $t_0 < 1/4$ , które zostanie dobrane później. Na mocy tożsamości Chapmana-Kołmogorowa implikować to będzie oszacowania dla  $t < T$ , gdzie  $T > 0$  jest dowolne. Przy tym założeniu, wzór (13) przyjmuje postać

$$p_1^{(\mu)}(x, y) \stackrel{\mu}{\approx} \left( 1 \wedge \frac{(1-x)(1-y)}{t} \right) p^{(\mu)}(t, x, y).$$

Dodatkowo, dzięki symetrii  $p_1^{(\mu)}(t, x, y) = p_1^{(\mu)}(t, y, x)$ , możemy i będziemy zakładać  $y > x$ .

Oszacowania dolne.

Założmy najpierw  $x, y \geq 1/32$ . Ponieważ oba argumenty są w tym przypadku oddzielone od zera, to dla małych czasów zachowanie  $p_1^{(\mu)}(t, x, y)$  jest spodziewane takie, jak zachowanie jądra ciepła dla ruchu Browna/laplasjanu. Aby pokazać to formalnie, skorzystamy z nierówności  $p_1^{(\mu)}(t, x, y) \geq p_{(x/4,1)}^{(\mu)}(t, x, y)$  (patrz (6)). Następnie własność absolutnej ciągłości (8) daje nam dla dowolnego zbioru borelowskiego  $A \subset (x/4, 1)$

$$\begin{aligned} \int_A p_{(x/4,1)}^{(\mu)}(t, x, y) m^{(\mu)}(dy) &= \mathbb{E}^{(\mu)} \left[ t < \tau_{(x/4,1)}; R(t) \in A \right] \\ &= \mathbb{E}^{(-1/2)} \left[ t < \tau_{(x/4,1)}; R(t) \in A; \left( \frac{R(t)}{x} \right)^{\mu+1/2} \exp \left( -\frac{\mu^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} \int_0^t \frac{ds}{[R(s)]^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Mając w pamięci założenie  $x > 1/32$ , można pokazać, że czynnik który pojawił się pod wartością oczekiwaną jest na zbiorze  $\{t < \tau_{(x/4,1)}\}$  ograniczony i oddzielony od zera, co implikuje

$$\begin{aligned} p_{(x/4,1)}^{(\mu)}(t, x, y) &\stackrel{\mu, t_0}{\approx} p_{(x/4,1)}^{(-1/2)}(t, x, y) \\ &\stackrel{\mu, t_0}{\approx} \left( 1 \wedge \frac{(1-x)(1-y)}{t} \right) p(t, x, y), \quad x, y \in (1/32, 1), t < t_0, \end{aligned} \quad (14)$$

gdzie ostatnie oszacowanie wynika z (31) oraz (10), jako że  $p_{(x/4,1)}^{(-1/2)}(t, x, y)$  to po prostu gęstość prawdopodobieństw przejścia dla ruchu Browna zabijanego przy wyjściu z odcinka  $(x/4, 1)$ .

Założmy teraz  $x, y \leq 1/4$ . W tym przypadku oba argumenty przestrzenne są oddalone od punktu zabijającego, więc dla małych czasów zachowanie  $p_1^{(\mu)}(t, x, y)$  powinno być podobne do zachowania jądra globalnego  $p^{(\mu)}(t, x, y)$ . Wzór Hunta (5) przyjmuje postać

$$p_1^{(\mu)}(t, x, y) = p^{(\mu)}(t, x, y) - \int_0^t q_{[0,1]}(s, x) p^{(\mu)}(t-s, 1, y) ds. \quad (15)$$

Wykażemy, że odjemnik jest znacząco mniejszy od odjemnej. Korzystając z (10) można pokazać, że dla dostatecznie małych  $t_0 > 0$  zachodzi

$$\begin{aligned} p^{(\mu)}(t-s, 1, y) &\lesssim \frac{e^{-9/32t}}{t^{\mu+1}} \lesssim p^{(\mu)}(t, x, y) \left( \frac{xy+t}{t} \right)^{\mu+1/2} e^{-9/32t+|x-y|^2/2t} \\ &\stackrel{\mu, t_0}{\lesssim} p^{(\mu)}(t, x, y) \frac{e^{-1/4t}}{t^{\mu+1}} \lesssim p^{(\mu)}(t, x, y) e^{-1/8t}. \end{aligned}$$

Stąd dostajemy żądane oszacowanie

$$\int_0^t q_{[0,1]}(s, x) p^{(\mu)}(t-s, 1, y) ds \stackrel{\mu, t_0}{\lesssim} p^{(\mu)}(t, x, y) e^{-1/8t} \int_0^t q_{[0,1]}(s, x) ds \leq p^{(\mu)}(t, x, y) e^{-1/8t}.$$

W ostatnim przypadku, czyli gdy  $x < 1/32$  oraz  $y > 1/4$  zastosujemy tożsamość Chapmana-Kołmogorowa (3) odpowiednio zawężając obszar całkowania

$$p_1^{(\mu)}(t, x, y) \geq \int_{1/32}^{1/4} p_1^{(\mu)}(t/8, x, z) p_1^{(\mu)}(7t/8, z, y) dm^{(\mu)}(dz).$$



Wybór momentów czasowych  $t/8$  oraz  $7t/8$  jest tutaj kluczowy i odzwierciedla intuicję, która podpowiada, że po czasie  $t/8$  proces powinien znajdować się z dużym prawdopodobieństwem w sąsiedztwie punktu  $\frac{7}{8}x + \frac{1}{8}y$ , więc punkt ten powinien znajdować się w obszarze całkowania. Następnie, ponieważ  $x, z \leq 1/4$  oraz  $y, z \geq 1/32$ , możemy skorzystać z oszacowań otrzymanych w poprzednich przypadkach i po skrupulatnych obliczeniach i szacowaniach całki otrzymujemy tezę.

### Oszacowania górne.

W związku z nierównością  $p_1^{(\mu)}(t, x, y) \leq p^{(\mu)}(t, x, y)$  (patrz (6)), wystarczy rozważyć tylko przypadek  $(1-x)(1-y)/t < 1$ . Pokażemy więc, że zachodzi

$$p_1^{(\mu)}(t, x, y) \stackrel{\mu, t_0}{\lesssim} \frac{(1-x)(1-y)}{t} p^{(\mu)}(t, x, y).$$

Co więcej, na mocy założeń  $y > x$  oraz  $t < 1/4$  dostajemy  $1-y < \sqrt{t} < 1/2$  i w konsekwencji  $y > 1/2$ .

Głównym pomysłem na tę część dowodu jest rozpisanie wzoru (15) w następujący sposób

$$\begin{aligned} \int_A p_1^{(\mu)}(t, x, y) dy &= \mathbb{E}_x^{(\nu)}[t < \tau_{[0,1]}; R(t) \in A] \\ &= \left( \mathbb{E}_x^{(\nu)}[R(t) \in A] - \mathbb{E}_x^{(\nu)}[R(t) \in 2-A] \right) + \left( \mathbb{E}_x^{(\nu)}[R(t) \in 2-A] - \mathbb{E}_x^{(\nu)}[t \geq \tau_{[0,1]}; R(t) \in A] \right), \end{aligned}$$

gdzie  $A \subset (0, 1)$ . To daje nam

$$p_1^{(\mu)}(t, x, y) = k_1(t, x, y) + k_2(t, x, y),$$

gdzie

$$k_1(t, x, y) = p(t, x, y) - \left( \frac{2-y}{y} \right)^{2\mu+1} p(t, x, 2-y)$$

oraz

$$\begin{aligned} k_2(t, x, y) &= \left( \frac{2-y}{y} \right)^{2\mu+1} p(t, x, 2-y) - \int_0^t q_{[0,1]}(s, x) p^{(\mu)}(t-s, 1, y) ds \\ &= \int_0^t q_{[0,1]}(s, x) \left( \left( \frac{2-y}{y} \right)^{2\mu+1} p(t-s, 1, 2-y) - p^{(\mu)}(t-s, 1, y) \right) ds. \end{aligned}$$

Reprezentacja ta ma za zadanie naśladować zasadę odbicia dla ruchu Browna (oraz innych symetrycznych dyfuzji), ponieważ punkt  $2-y$  jest odbiciem punktu  $y$  względem zabijającego punktu 1. W klasycznej zasadzie odbicia wyrażenie  $k_2(t, x, y)$  się zeruje. W tym przypadku tak się nie dzieje, ale pokażemy, że jest istotnie mniejsze od  $k_1(t, x, y)$ . Ważną informacją jest też to, że oszacowania funkcji  $q_1(s, y)$  nie były znane w czasie powstawania tego dowodu (zostały wyprowadzone później w pracy [H2] z Twierdzenia 1), co byłoby bardzo pomocne.

Na mocy (9), monotoniczności zmodyfikowanej funkcji Bessela pierwszego rodzaju  $I_\mu(\cdot)$  oraz nierówności

$$\frac{I_\mu(y)}{I_\mu(x)} \leq e^{y-x} \left( \frac{y}{x} \right)^{\mu+1}, \quad \mu > -1, \quad y > x > 1,$$

wyprowadzonej w Lemacie 2.1 in [H1], dla  $w \in (0, 1]$  oraz  $t < t_0$  zachodzi

$$1 - y \stackrel{\mu, t_0}{\lesssim} 1 - \left( \frac{2 - y}{y} \right)^{2\mu+1} \frac{p(t, w, 2 - y)}{p(t, w, y)} \stackrel{\mu, t_0}{\lesssim} \frac{1 - y}{t},$$

co dla  $x \in (0, 1/2)$  pozwala nam na szacowania

$$\begin{aligned} k_1(t, x, y) &\stackrel{\mu, t_0}{\lesssim} \frac{(1 - x)(1 - y)}{t} p^{(\mu)}(t, x, y), \\ k_2(t, x, y) &\stackrel{\mu, t_0}{\lesssim} (1 - y) \int_0^t q_{[0,1]}(s, x) p^{(\mu)}(t - s, 1, y) ds \leq 2(1 - x)(1 - y) p^{(\mu)}(t, x, y), \end{aligned}$$

co należało pokazać. Skorzystaliśmy tutaj z nierówności  $\int_0^t q_{[0,1]}(s, x) \leq 1$ , więc w dowodzie udało się ominąć problem nieznanego zachowania funkcji  $q_{[0,1]}(s, x)$ .

W ostatnim przypadku  $x \in (1/2, 1)$  stosujemy mocną własność Markowa w następujący sposób

$$p_1^{(\mu)}(t, x, y) = p_{(x/4,1)}^{(\mu)}(t, x, y) + \int_0^t q_{(x/4,1)}^{(\mu)}(s, x, x/4) p_1^{(\mu)}(t - s, x/4, y) ds, \quad (16)$$

gdzie  $q_{(x/4,1)}^{(\mu)}(s, x, x/4)$  jest gęstością (podprobabilistycznego) rozkładu czasu trafienia w  $x/4$  przed trafieniem w 1. Pierwszy składnik reprezentuje drogi z  $x$  do  $y$ , które w całości są zawarte w przedziale  $(x/4, 1)$  i został już oszacowany w (14). Drugi składnik reprezentuje drogi, które są zawarte w przedziale  $[0, 1)$ , ale w pewnym momencie opuściły przedział  $(x/4, 1)$ . Używając nietrywialnej analizy i korzystając z już udowodnionych dolnych oszacowań  $p_1^{(\mu)}(t, x, y)$  dla  $x < 1/2$  można uzyskać

$$p_1^{(\mu)}(t - s, x/4, y) \stackrel{\mu}{\lesssim} e^{-1/64t} p_1^{(\mu)}(t - s, x/2, y).$$

Następnie korzystając z nierówności

$$q_{(x/4,1)}^{(\mu)}(s, x, x/4) \leq q_{(x/2,1)}^{(\mu)}(s, x, x/2),$$

oraz stosując ponownie mocną własność Markowa, szacujemy całkę we wzorze (16) następująco

$$\begin{aligned} &\int_0^t q_{(x/4,1)}^{(\mu)}(s, x, x/4) p_1^{(\mu)}(t - s, x/4, y) ds \\ &\stackrel{\mu}{\lesssim} e^{-1/64t} \int_0^t q_{(x/2,1)}^{(\mu)}(s, x, x/2) p_1^{(\mu)}(t - s, x/2, y) ds \\ &\leq e^{-1/64t} p_1^{(\mu)}(t, x, y). \end{aligned}$$

Razem z (14) pozwala nam to napisać

$$p_1^{(\mu)}(t, x, y) \leq c_\mu \left( \left( 1 \wedge \frac{(1 - x)(1 - y)}{t} \right) p(t, x, y) + e^{-1/64t} p_1^{(\mu)}(t, x, y) \right),$$

dla pewnej stałej  $c_\mu > 0$ . Biorąc  $t_0$  na tyle małe aby  $c_\mu e^{-1/64t} < 1/2$  dla  $t < t_0$ , kończymy dowód. □

### 4.3.3 Czas wyjścia procesu Bessela z odcinków $(0, 1)$ i $[0, 1)$

Kolejnym ważnym obiektem związanym z procesem Bessela w odcinku  $(0, 1)$  lub  $[0, 1)$  jest rozkład czasu (oraz miejsca, jeśli punkt 0 jest zabijający) pierwszego wyjścia procesu ze zbioru. W szczególności dla  $\mu = (n - 2)/2$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , jest to rozkład czasu pierwszego wyjścia ruchu Browna z kuli. Celem badań w tym wypadku było wyprowadzenie asymptotyk oraz jednostajnych oszacowań gęstości rozkładu czasu (i miejsca) pierwszego wyjścia ze zbioru. Podobne wyniki są znane w przypadku półprostej  $(1, \infty)$  [13, 32, 60], ale metody użyte w podanych pracach nie przenoszą się w naszym przypadku. Analogicznie sytuacja wyglądała dla jąder ciepła.

W przypadku gdy zero jest odbijające, jedynym punktem wyjścia jest 1. Gdy zero jest zabijające, wtedy są dwa punkty wyjścia: 0 oraz 1, dlatego też te przypadki nie są do siebie aż tak podobne, jak to było dla jąder ciepła Dirichleta. Jest to też powód, dla którego rozważamy wyjście ze zbiorów  $(0, 1)$  i  $[0, 1)$  osobno - w zależności od warunku w zerze są to dwa różne obiekty. Wprowadźmy następujące oznaczenia. Dla  $\mu > -1$  i przy warunku odbijania w zerze definiujemy

$$q_1^{(\mu)}(t, x) = \mathbb{P}_x^{(\mu)} \left( \tau_{(0,1)} \in dt \right), \quad x \in (0, 1), t > 0.$$

Jeśli natomiast  $\mu < 0$  a zero jest zabijające, oznaczamy

$$q_{(0,1)}^{(\mu)}(t, x, y) = \mathbb{P}_x^{(\mu)} \left( \tau_{(0,1)} \in dt; R^{(\mu)} \left( \tau_{(0,1)} \right) = y \right),$$

gdzie  $x \in (0, 1)$ ,  $y \in \{0, 1\}$  oraz  $t > 0$ . Dzięki własności absolutnej ciągłości (8) dla  $\mu > 0$  zachodzi

$$q_{(0,1)}^{(\mu)}(t, x, 1) = x^{-2\mu} q_1^{(-\mu)}(t, x), \quad x \in (0, 1), t > 0. \quad (17)$$

Warto też wspomnieć, że w 1980 J.T. podał w pracy [38] następujący wzór szeregowy

$$q_1^{(\mu)}(x, t) = x^{-\mu} \sum_{n=1}^{\infty} j_{\mu,n} \frac{J_{\mu}(j_{\mu,n}x)}{J_{\mu+1}(j_{\mu,n})} e^{-j_{\mu,n}^2 t/2}, \quad (18)$$

który, podobnie jak wzór (11) nie przydaje się bezpośrednio przy rozważaniu małych czasów.

Pierwszy ważny wynik w pracy [H2] przedstawia reprezentację gęstości pierwszego czasu i miejsca wyjścia przy pomocy jądra ciepła Dirichleta.

**Twierdzenie 2** (Theorem 3.1 w [H2]).

Dla  $\mu > -1$  mamy

$$q_1^{(\mu)}(t, x) = - \frac{\partial_-}{\partial y} p_1^{(\mu)}(t, x, y) \Big|_{y=1}, \quad (19)$$

gdzie  $\partial_-/\partial y$  oznacza lewostronną pochodną. Ponadto dla  $\mu < 0$

$$q_{0,1}^{(\mu)}(t, x, 1) = - \frac{\partial_-}{\partial y} p_{0,1}^{(\mu)}(t, x, y) \Big|_{y=1}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} q_{0,1}^{(\mu)}(t, x, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} y^{2\mu+1} \frac{\partial}{\partial y} p_{0,1}^{(\mu)}(t, x, y) \\ &= -2\mu x^{-2\mu} p_{0,1}^{(-\mu)}(t, x, 0). \end{aligned} \quad (21)$$

Dowód Twierdzenia 2 zaczyna się od uzasadnienia równości

$$\begin{aligned} q_1^{(\mu)}(t, x) &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 p_1^{(\mu)}(t, x, y) m(y) dy \\ &= -\int_0^1 \left(\frac{1}{2} \mathcal{L}_\mu p_1^{(\mu)}\right)(t, x, y) m(y) dy \\ &= -\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \left( m(y) \frac{\partial}{\partial y} f(y) \right) dy, \end{aligned}$$

przy czym zostały wykorzystane własności funkcji Bessela pierwszego rodzaju  $J_\nu$ . To pozwala wywnioskować wzór (19). Pozostałe wzory zostały wyprowadzone podobnie, tylko wymagały dodatkowych rachunków i manipulacji.

Z Twierdzeń 1 oraz 2 można już dość łatwo otrzymać oszacowania gęstości czasu i miejsca pierwszego wyjścia procesu Bessela ze zbiorów  $(0, 1)$  i  $[0, 1)$ . W ogólności oszacowania danej funkcji nie implikują oszacowań jej pochodnej, ale w tym przypadku jest to możliwe, ponieważ pochodną liczymy w punktach, w których funkcja się zeruje. Przykładowo mamy

$$q_1^{(\mu)}(t, x, 1) = -\frac{\partial_-}{\partial y} p_1^{(\mu)}(t, x, y) \Big|_{y=1} = \lim_{y \rightarrow 1^+} \frac{p_1^{(\mu)}(t, x, y)}{1-y}, \quad (22)$$

gdzie wykorzystaliśmy  $p_1^{(\mu)}(t, x, 1) = 0$ .

**Twierdzenie 3** (Theorem 3.3 w [H2]).

*Dla  $\mu > -1$  mamy*

$$q_1^{(\mu)}(t, x) \approx \frac{(1-x)(1+t)^{\mu+2}}{(x+t)^{\mu+1/2} t^{3/2}} \exp\left(-\frac{(1-x)^2}{2t} - \frac{1}{2} \lambda_{\mu,1}^2 t\right),$$

*gdzie  $x \in [0, 1), t > 0$ . Dla  $\mu < 0$  zachodzi*

$$\begin{aligned} q_{0,1}^{(\mu)}(x, t, 1) &\approx \frac{x^{-2\mu}(1-x)}{(x+t)^{-\mu+1/2}} \frac{(1+t)^{-\mu+2}}{t^{3/2}} \exp\left(-\frac{(1-x)^2}{2t} - \frac{1}{2} \lambda_{-\mu,1}^2 t\right), \\ q_{0,1}^{(\mu)}(x, t, 0) &\approx \frac{x^{-2\mu}(1-x)}{1-x+t} \frac{(1+t)^{-\mu+2}}{t^{-\mu+1}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t} - \frac{1}{2} \lambda_{-\mu,1}^2 t\right), \end{aligned}$$

*gdzie  $x \in (0, 1), t > 0$ .*

Niech  $B(t)$  będzie  $n$ -wymiarowym ruchem Browna startującym z  $x \in \mathbb{R}^n$ . Przez  $q^n(t, x)$  oznaczamy gęstość czasu pierwszego wyjścia procesu  $B$  z jednostkowej kuli  $B(0, 1)$  o środku w zerze. Ponieważ  $|B(t)|$  jest procesem Bessela z indeksem  $n/2 - 1$  (i warunkiem odbijania w zerze dla  $n = 1$ ), zachodzi  $q^n(t, x) = q_1^{(n/2-1)}(t, |x|)$  i w konsekwencji dostajemy

**Wniosek 4.** *Dla  $x \in B(0, 1)$  mamy*

$$q^n(t, x) \approx \frac{(1-|x|)(1+t)^{n/2+1}}{(|x|+t)^{(n-1)/2} t^{3/2}} \exp\left(-\frac{(1-|x|)^2}{2t} - \frac{1}{2} \lambda_{n/2-1,1}^2 t\right).$$

Inną konsekwencją Twierdzenia 2 są poniższe wzory szeregowo na  $q_{0,1}^{(\mu)}(t, x, y)$ . Korzystając z (11) oraz własności funkcji  $J_\nu$ , otrzymujemy

**Wniosek 5** (Corollary 3.2 w [H2]).

Dla  $\mu < 0$  oraz  $x \in (0, 1)$  mamy

$$q_{0,1}^{(\mu)}(t, x, 1) = x^{-\mu} \sum_{n=1}^{\infty} j_{-\mu,n} \frac{J_{-\mu}(j_{-\mu,n}x)}{J_{-\mu+1}(j_{-\mu,n})} e^{-\lambda_{-\mu,n}^2 t/2},$$

$$q_{0,1}^{(\mu)}(t, x, 0) = \frac{2x^{-\mu}}{\Gamma(-\mu)} \sum_{n=1}^{\infty} (j_{-\mu,n})^{-\mu} \frac{J_{-\mu}(j_{-\mu,n}x)}{|J_{-\mu+1}(j_{-\mu,n})|^2} e^{-\lambda_{-\mu,n}^2 t/2}.$$

Na koniec tego rozdziału prezentujemy asymptotykę gęstości czasu i miejsca pierwszego wyjścia uwzględniające sytuacje, gdy wyrażenia  $x/t$  bądź  $(1-x)/t$  (w zależności od punktu zabijania) zbiegają do zera lub nieskończoności. Stosujemy w niej następujące oznaczenie:

Dla dwóch funkcji  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  piszemy  $f(x) = O_{\mu}(g(x))$ , gdy  $|f(x)| \stackrel{\mu}{\lesssim} g(x)$  dla  $x$  w zadanym zakresie.

**Twierdzenie 6** (Theorem 4.2 w [H2]).

Istnieje stała  $t_0 > 0$ , takie że dla  $t < t_0$  zachodzą następujące asymptotyki:

dla  $\mu > -1$  mamy

$$q_1^{(\mu)}(t, x) = \frac{1-x}{\sqrt{2\pi t^3}} \frac{e^{-(1-x)^2/2t}}{x^{\mu+1/2}} \left( 1 + O_{\mu} \left( \frac{t}{x} \right) \right), \quad x \in [0, 1), \quad (23)$$

$$q_1^{(\mu)}(t, x) = \frac{1-x}{t^{\mu+1}} \frac{e^{-(1-x)^2/2t}}{2^{\mu} \Gamma(\mu+1)} \left( 1 + O_{\mu} \left( \left( \frac{x}{t} \right)^2 + t \right) \right), \quad x < 1/2. \quad (24)$$

Jeśli  $\mu < 0$ , wtedy

$$q_{0,1}^{(\mu)}(t, x, 0) = \frac{2x^{-2\mu} e^{-x^2/2t}}{(2t)^{-\mu+1} \Gamma(-\mu)} \left( 1 + O_{\mu} \left( e^{-2(1-x)/t} \right) \right), \quad x \in [0, 1), \quad (25)$$

$$q_{0,1}^{(\mu)}(t, x, 0) = \frac{8(1-x)x^{-2\mu}}{(2t)^{-\mu+2} \Gamma(-\mu)} e^{-x^2/2t} \left( 1 + O_{\mu} \left( \frac{1-x}{t} + t \right) \right), \quad x \in (0, 1). \quad (26)$$

**Uwaga.** Asymptotyki funkcji  $q_{0,1}^{(\mu)}(t, x, 1)$  można łatwo wywnioskować z Twierdzenia 6 oraz zależności (17).

Dowód Twierdzenia 6 zajmuje cały rozdział 4 w artykule [H2]. Najpierw wyprowadzone są asymptotyki w języku jąder ciepła  $p^{(\mu)}(t, x, y)$  oraz gęstości czasu pierwszego wyjścia dla ruchu Browna  $q_{x/4,1}^{(-1/2)}(t, x, y)$ . Zostało to osiągnięte przy użyciu takich narzędzi jak mocna własność Markowa, nierówności dla funkcji  $I_{\nu}(x)$ , absolutna ciągłość (8) oraz dokonując obliczeń związanych z szeroko pojętymi intuicjami. Na koniec wykorzystana jest jawna postać funkcji  $q_{x/4,1}^{(-1/2)}(t, x, y)$ , która jest analogiczna do wzoru (30).

## 4.4 Ruch Browna

### 4.4.1 Kontekst i znane wyniki

Ruch Browna definiujemy jako proces generowany przez połowę laplasjanu  $\frac{1}{2}\Delta$ . Globalne jądro ciepła w  $n$  wymiarach wyraża się wzorem  $p(t, x, y) = (2\pi)^{-n/2} e^{-|x-y|^2/2t}$ . Odnośnie jąder ciepła Dirichleta, zacznijmy od przywołania oszacowań udowodnionych przez E. B. Davisa [23] (górne oszacowanie) oraz Q. S. Zhanga [66] (dolne oszacowanie). Dla dowolnego

ograniczonego obszaru klasy  $C^{1,1}$  istnieją stałe  $c_1, c_2, c_3, c_4, T > 0$ , takie że

$$c_1 \left( \frac{(1-|x|)(1-|y|)}{t} \wedge 1 \right) \frac{e^{-c_2|x-y|^2/t}}{t^{n/2}} \leq p_D(t, x, y) \leq c_3 \left( \frac{(1-|x|)(1-|y|)}{t} \wedge 1 \right) \frac{e^{-c_4|x-y|^2/t}}{t^{n/2}} \quad (27)$$

dla wszystkich  $x, y \in D$  oraz  $t < T$ . Niestety stałe  $c_2$  i  $c_4$  są różne od siebie i różne od ułamka  $1/2$ , który to pojawia się we wzorze na globalne jądro ciepła. Dlatego też dolne i górne oszacowania są nieporównywalne względem siebie oraz względem globalnego jądra ciepła, gdy wyrażenie  $|x-y|^2/t$  jest duże. W literaturze istnieje kilka wyników z poprawną stałą w eksponentcie, ale zupełnie nie radzą sobie z opisem zachowania przy brzegu (patrz np. [61, 62, 63]). Jednym z przykładów jest główny wynik pracy [62], który dla zbiorów wypukłych przyjmuje formę (uproszczoną przy użyciu Twierdzenia 7)

$$p_D(t, x, y) \geq c \left( 1 \wedge \frac{(\delta_D(x) \wedge \delta_D(y))^2}{t} \right) \frac{e^{-\lambda_1 t / (\delta_D(x) \wedge \delta_D(y))^2}}{\left( 1 + \frac{1}{t} (\delta_D(x) \wedge \delta_D(y))^2 \right)^{(n+2)/2}} p(t, x, y),$$

dla pewnej stałej  $c > 0$ , gdzie  $\lambda_1$  jest pierwszą wartością własną operatora  $-\Delta$  w jednostkowej kuli. Niemniej jednak artykuł ten dotyczy asymptotyk przy ustalonych argumentach przestrzennych i zachowanie przy brzegu zbioru nie gra istotnej roli. Jeszcze do niedawna dokładne dwustronne oszacowania jąder ciepła Dirichleta dla (połowy) laplasjanu były znane jedynie dla półprostej oraz odcinka (oraz ich produktów kartezjańskich), co wynika z faktu, że jądra te wyrażone są jawnymi wzorami wygodnymi w zastosowaniach. Jednak w przypadku nawet tak klasycznego zbioru jak kula okazało się, że uzyskanie analogicznych oszacowań wymaga dużo bardziej zaawansowanego podejścia, co zostanie przedstawione w kolejnym rozdziale.

Jako ilościową wersję własności niewyczuwania brzegu (*property of not feeling the boundary*, patrz (1)) Michiel van den Berg pokazał w pracy [61] następujące oszacowania

$$p(t, x, y) \geq p_D(t, x, y) \geq p(t, x, y) \left( 1 - e^{-\rho^2/t} \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{(k-1)!} \left( \frac{\rho^2}{t} \right)^{k-1} \right), \quad (28)$$

gdzie  $\rho$  to dystans między odcinkiem  $\overline{xy}$  a brzegiem  $\partial D$  obszaru  $D$ , mianowicie

$$\rho = \inf_{\substack{w \in \overline{xy} \\ z \in \partial D}} |w - z|.$$

Dla  $\rho > c\sqrt{t}$  powyższe nierówności są jednoznaczne z ostrymi obustronnymi oszacowaniami  $p_D(t, x, y)$ . Jest to jednak najprostszy przypadek i przydaje się jedynie, gdy brzeg nie odgrywa większej roli, co jest zresztą zawarte w nazwie własności.

Zachowanie funkcji  $p_D$ , gdzie  $D$  jest ograniczonym obszarem, dla dużych czasów jest opisane przez ogólną teorię [23, 24]. Mianowicie jest ona porównywalna z

$$\delta_D(x)\delta_D(y)e^{-\lambda_1 t},$$

gdzie  $x, y \in D$ ,  $t \geq T$ , oraz  $\lambda_1$  oznacza pierwszą wartość własną operatora  $-\Delta$  w zbiorze  $D$ . Wynik ten jest konsekwencją reprezentacji spektralnej gęstości  $p_D$  w języku wartości i wektorów własnych Laplasjanu w  $D$  (patrz np. [33]). Reprezentacja ta nie przynosi jednak wymiernych korzyści dla małych  $t$ , kiedy to wzajemne kasowania składników mają istotne znaczenie - sytuacja ta wystąpiła już w przypadku jądra ciepła Dirichleta zbioru  $(0, 1)$  dla procesu Bessela.

Jak już było wspomniane, istnieje kilka przykładów zbiorów, których jądra ciepła Dirichleta wyrażone są elementarnymi funkcjami, co wystarcza do wyprowadzenia ostrych oszacowań. Najprostszym przykładem jest półprosta (jako podzbiór  $\mathbb{R}$ ). Dla uproszczenia, rozważmy półprostą  $(0, \infty)$ . Dzięki słynnej zasadzie odbicia, dla  $x, y, t > 0$  mamy

$$p_{(0, \infty)}(t, x, y) = p(t, x, y) - p(t, x, -y) = p(t, x, y) \left(1 - e^{-2xy/t}\right) \approx \left(1 \wedge \frac{xy}{t}\right) p(t, x, y).$$

Ponieważ współrzędne ruchu Browna są niezależne oraz z uwagi na jego niezmienniczość względem obrotów i przesunięć, powyższe szacowanie przenosi się na dowolną półprzestrzeń  $H \subset \mathbb{R}^n$ :

$$p_H(t, x, y) = p(t, x, y) \left(1 - e^{-2\delta_H(x)\delta_H(y)/t}\right) \approx \left(1 \wedge \frac{\delta_H(x)\delta_H(y)}{t}\right) p(t, x, y). \quad (29)$$

Drugim przykładem jest odcinek  $(a, b)$ ,  $-\infty < a < b < \infty$ :

$$p_{(a, b)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \exp\left(-\frac{(x-y+2(b-a))^2}{2t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+y+2k(b-a))^2}{2t}\right) \right]. \quad (30)$$

Kosztuje to nieco wysiłku, ale można pokazać, że dla  $0 < t < 1$  oraz  $x, y \in (a, b)$  zachodzi

$$p_{(a, b)} \approx \frac{1}{b-a} p(t, x, y) \left(1 \wedge \frac{(x-a)(y-a)}{t}\right) \left(1 \wedge \frac{(b-x)(b-y)}{t}\right). \quad (31)$$

#### 4.4.2 Jądro ciepła Dirichleta kuli

Zauważmy, że nieeksponencjalny czynnik w (31) jest istotnie inny niż ten w (27). Biorąc  $a = -1$ ,  $b = 1$  oraz  $x < -1/2$ ,  $y > 1/2$  czynniki te są porównywalne odpowiednio z  $(1+x)(1-y)/t^2$  oraz  $(1+x)(1-y)/t$ . Różnicę widać więc już dla tak prostego zbioru jak odcinek. Pojawia się pytanie, jak to będzie wyglądało dla bardziej skomplikowanych zbiorów.

Odcinek w przestrzeni jednowymiarowej  $\mathbb{R}$  może być rozumiany jako jednowymiarowa kula. Stąd pierwszym naturalnym uogólnieniem wzoru (31) są oszacowania jądra ciepła Dirichleta wielowymiarowej kuli. Problem ten okazuje się znacznie bardziej złożony ze względu na bardziej różnorodne zależności między argumentami przestrzennymi  $x, y$  a brzegiem kuli. Pomimo tego w kolejnym twierdzeniu, które jest głównym wynikiem pracy [H3], wyprowadzone są odpowiednie oszacowania dla kuli  $B = B(0, 1)$  w dowolnym wymiarze.

**Twierdzenie 7** (Theorem 1 w [H3]).

*Dla dowolnego  $n \geq 1$  oraz  $T > 0$  mamy*

$$p_B(t, x, y) \stackrel{d, T}{\approx} h(t, x, y)p(t, x, y), \quad (32)$$

*gdzie  $|x|, |y| < 1$ ,  $t < T$ , oraz*

$$h(t, x, y) = \left(1 \wedge \frac{(1-|x|)(1-|y|)}{t}\right) + \left(1 \wedge \frac{(1-|x|)|x-y|^2}{t}\right) \left(1 \wedge \frac{(1-|y|)|x-y|^2}{t}\right). \quad (33)$$

Kilka komentarzy zanim przejdziemy do dowodu:

1. Pierwszy składnik w definicji czynnika  $h$  jest taki sam jak czynnik we wzorze (27). Kluczowe jednak okazuje się jeszcze dodatnie drugiego składnika.
2. Nie jest to oczywiste, ale w jednym wymiarze oszacowania (32) są równoważne (31). Aby się przekonać, można zauważyć, że dla  $x$  i  $y$  bliskich sobie, pierwszy składnik (33) jest dominujący (ponieważ  $[(1 - |x|) \vee (1 - |y|)] \gtrsim |x - y|$ ), natomiast gdy  $x$  i  $y$  są daleko od siebie, dominuje drugi składnik.
3. Twierdzenie 7 może być częściowo traktowane jako uogólnienie Twierdzenia 1 dla  $\mu = (n - 2)/2$ , ponieważ dla tych indeksów proces Bessela jest normą ruchu Browna i wtedy  $p_1^{((n-2)/2)}(t, x, y) = \int_{|z|=x} p_B(t, x, z) d\sigma(z)$ , gdzie  $\sigma$  to miara sferyczna na  $\partial B$ . Szacując tę całkę można więc otrzymać oszacowania  $p_1^{((n-2)/2)}(t, x, y)$ .
4. Oszacowania w Twierdzeniu 7 są rozszerzone w pracy [57] poprzez jednostajne asymptotyki włącznie z prędkością zbieżności w sytuacji gdy  $\delta_B(\frac{x+y}{2})/\sqrt{t}$  zbiega do zera lub nieskończoności.
5. Gęstość  $q_D(t, x, z)$  rozkładu łącznego czasu i miejsca pierwszego wyjścia ruchu Browna z kuli jest zadana przez pochodną normalną funkcji  $p_D(t, x, y)$  w kierunku wewnętrznym (patrz [33]). W konsekwencji Twierdzenie 7 prowadzi do ostrych dwustronnych oszacowań funkcji  $q_D(t, x, z)$ . Rozszerza to oszacowania gęstości czasu pierwszego wyjścia (bez zależności od miejsca wyjścia) opisanych we Wniosku 4.

**Wniosek 8** (Corollary 2 w [H3]).

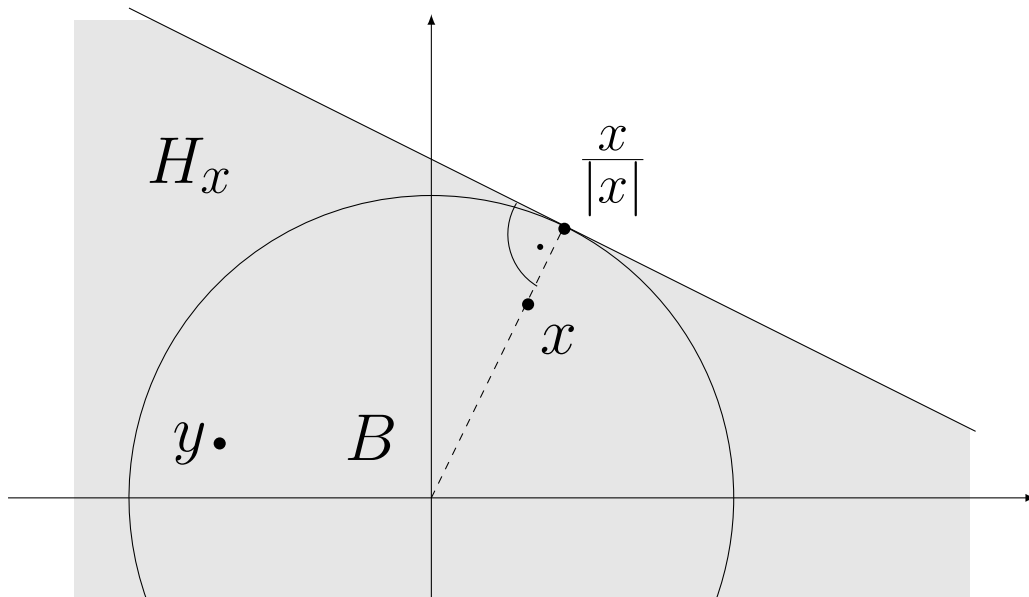
Dla dowolnego  $T > 0$  zachodzi

$$q_B(t, x, z) \stackrel{d, T}{\approx} \left( \frac{1 - |x|}{t} + \frac{|x - z|^2}{t} \left( 1 \wedge \frac{(1 - |x|)|x - z|^2}{t} \right) \right) p(t, x, z), \quad (34)$$

gdzie  $|x| < 1$ ,  $|z| = 1$  oraz  $t < T$ .

*Szkic dowodu Twierdzenia 7.*

Zacznijmy od wprowadzenia dodatkowej notacji. Dla  $x \in \bar{B} - \{0\}$  przez  $H_x$  oznaczamy półprzestrzeń zawierającą  $B$  i której brzeg jest styczny do  $B$  w punkcie  $\frac{x}{|x|}$ .





Oszacowania górne.

Korzystając z (3), (6) i (29) oraz równości  $\delta_{H_x}(x) = 1 - |x|$  dostajemy

$$\begin{aligned}
p_B(t, x, y) &= \int_{B(0,1)} p_B(t/2, x, z) p_B(t/2, z, y) dz \\
&\leq \int_{B(0,1)} p_{H_x}(t/2, x, z) p_{H_y}(t/2, z, y) dz \\
&\lesssim \int_{B(0,1)} \left(1 \wedge \frac{1-|x|}{t}\right) p(t/2, x, z) \left(1 \wedge \frac{1-|y|}{t}\right) p(t/2, z, y) dz \\
&\lesssim \left(1 \wedge \frac{1-|x|}{t}\right) \left(1 \wedge \frac{1-|y|}{t}\right) \int_{\mathbb{R}^n} p(t/2, x, z) p(t/2, z, y) dz \\
&= \left(1 \wedge \frac{1-|x|}{t}\right) \left(1 \wedge \frac{1-|y|}{t}\right) p(t, x, y),
\end{aligned}$$

co jest równoważne z (32), gdy  $1 - |x| \geq \varepsilon$  lub  $|x - y| \geq \varepsilon$  dla ustalonego  $\varepsilon > 0$ . Gdy  $1 - |x|, |x - y| < \varepsilon$  oraz zakładając dodatkowo  $x \in B(y/2|y|, 1/2)$ , wtedy zachodzi  $\delta_{H_y}(x) < 2(1 - |x|)$  i stąd

$$\begin{aligned}
p_B(t, x, y) &\leq p_{H_y}(t, x, y) \leq \left(1 \wedge \frac{\delta_{H_y}(x)\delta_{H_y}(y)}{t}\right) p(t, x, y) \\
&\leq 2 \left(1 \wedge \frac{(1-|x|)(1-|y|)}{t}\right) p(t, x, y) \leq 2h(t, x, y)p(t, x, y).
\end{aligned}$$

Pozostaje więc do rozpatrzenia najtrudniejszy przypadek, kiedy to  $1 - |x|, |x - y| < \varepsilon$  oraz  $x \in B - B(y/|y|, 1/2)$ .

Zacznijmy od nierówności, która wynika bezpośrednio z monotoniczności (6)

$$p_B(t, x, y) \leq p_{H_x \cap H_y}(t, x, y).$$

Niestety w literaturze nie ma wystarczających oszacowań gęstości  $p_{H_x \cap H_y}(t, x, y)$ , pomimo tego, że są one jednoznaczne z oszacowaniami dwuwymiarowego stożka (wnętrza kąta). Oznaczmy przez  $\alpha_{x,y}$  kąt pomiędzy wektorami  $x$  i  $y$ . Stosując bardzo ostrożnie mocną własność Markowa można otrzymać dla  $\alpha_{x,y} < \pi/2$

$$p_{H_x \cap H_y}(t, x, y) \leq p_{H_y}(t, x, y) - p_{H_y}(t, \bar{x}, y), \quad (35)$$

gdzie

$$\bar{x} = \frac{2 - |x|}{|x|} x$$

jest odbiciem punktu  $x$  względem brzegu  $\partial B$  kuli  $B$ . Jest to pewnego rodzaju wariacja zasady odbicia. Jednym z ważnych elementów jest tutaj to, że założenie  $x \in B - B(y/|y|, 1/2)$  gwarantuje  $\bar{x} \in H_y$ . Następnie kontynuujemy obliczenia otrzymując

$$p_{H_y}(t, x, y) - p_{H_y}(t, \bar{x}, y) = (a(t, x, y) + b(t, x, y))p(t, x, y),$$

gdzie

$$\begin{aligned}
a(t, x, y) &= \left(1 - \exp\left[-\frac{(1-|x|)(1-|y|\cos\alpha_{x,y})}{t}\right]\right) \left(1 - \exp\left[-\frac{(1-|y|)(1-|x|\cos\alpha_{x,y})}{t}\right]\right), \\
b(t, x, y) &= \exp\left[-\frac{(1-\cos\alpha_{x,y})((1-|x|)+(1-|y|))}{t}\right] \left(1 - \exp\left[-\frac{2\cos\alpha_{x,y}(1-|x|)(1-|y|)}{t}\right]\right).
\end{aligned}$$

Szacując pierwszą eksponentę w definicji  $b(t, x, y)$  przez 1 oraz stosując nierówność  $1 - e^{-u} \approx 1 \wedge u$ ,  $u > 0$ , dostajemy  $b(t, x, y) \lesssim 1 \wedge ((1 - |x|)(1 - |y|)/t)$ , co generuje pierwszy składnik w (33). Następnie, posługując się argumentami geometrycznymi, szacujemy

$$1 - |x| \cos \alpha_{x,y} = (1 - |x|) + |x| \frac{\sin^2 \alpha_{x,y}}{1 + \cos \alpha_{x,y}} \approx |x - y|^2.$$

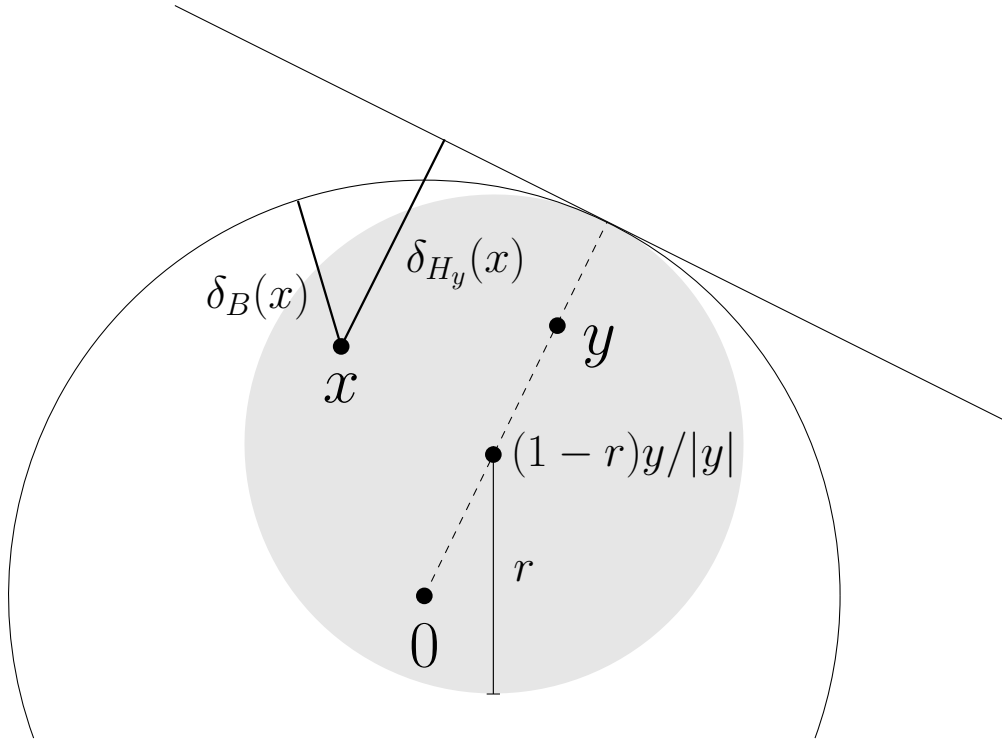
W konsekwencji

$$a(t, x, y) \leq \left(1 \wedge \frac{(1 - |x|)|x - y|^2}{t}\right) \left(1 \wedge \frac{(1 - |y|)|x - y|^2}{t}\right),$$

co należało pokazać.

### Oszacowania dolne.

Przy założeniu  $x \in B((1 - r)y/|y|, r)$ , dla ustalonego  $r \in (0, 1/2)$ , można się spodziewać, że  $p_B(t, x, y) \approx p_{H_y}(t, x, y)$  (oszacowanie górne jest oczywiste ze względu na (6)). Wynika to z faktu, że odległość  $x$  od  $\partial B$  oraz  $\partial H_y$  jest porównywalna, czyli  $\delta_{H_y}(x) \stackrel{r}{\approx} \delta_B(x)$ .



Nie jest to jednak łatwe do pokazania. Dzięki mocnej własności Markowa mamy

$$p_B(t, x, y) = p_{H_y}(t, x, y) - R(t, x, y),$$

gdzie

$$R(t, x, y) = \int_0^t \int_{\partial B} q_B(s, x, z) p_{H_y}(t - s, z, y) d\sigma(z) ds.$$

Pokażemy, że  $R(t, x, y)$  jest istotnie mniejsze od  $p_B(t, x, y)$ , dzięki czemu będziemy mogli wykorzystać wyprowadzone już oszacowania górne  $p_B(t, x, y)$ , które implikują oszacowania górne we Wniosku 7. Mianowicie mamy

$$R(t, x, y) = \int_0^t \int_{\partial B} \left( \frac{1 - |x|}{t} + \frac{|x - z|^2}{t} \left( 1 \wedge \frac{(1 - |x|)|x - z|^2}{t} \right) \right) p(s, x, z) \\ \times \left( 1 \wedge \frac{\delta_{H_y}(x)\delta_{H_y}(y)}{t - s} \right) p(t - s, z, y) d\sigma(z) ds.$$

Oszacowanie tej całki jest pracochłonne i zostało wykonane w dowodzie Proposition 3 w [H3]. Głównym krokiem było pokazanie, że dla  $x \in B(\frac{15}{16}\frac{y}{|y|}, \frac{1}{16})$  zachodzi

$$R(t, x, y) \lesssim^r p_{H_y}(t, x, y) \left( e^{-|x-y|^2/16t} + \frac{t}{\delta_B^2(x)} \right).$$

Daje to nam porównywalność  $p_B(t, x, y)$  z  $p_{H_y}(t, x, y)$  pod dodatkowym warunkiem, że wyrażenia  $|x - y|/\sqrt{t}$  and  $\delta_B(x)/\sqrt{t}$  są dostatecznie duże. Poprzez odpowiednią iterację oraz przy wykorzystaniu wyniku (27) pozwala to uzyskać (Proposition 4 w [H3])

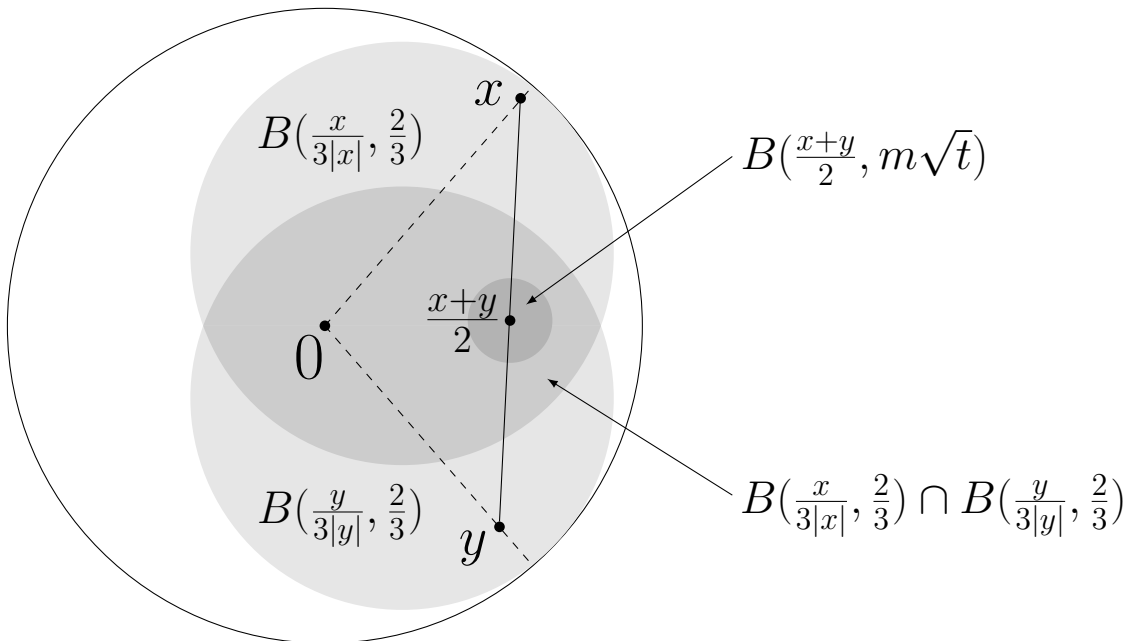
$$p_B(t, x, y) \gtrsim \left( 1 \wedge \frac{(1 - |x|)(1 - |y|)}{t} \right) p(t, x, y), \quad (36)$$

dla dowolnego  $x \in B(\frac{y}{3|y|}, \frac{2}{3})$ ,  $\delta_B(x) \geq m\sqrt{t}$  oraz  $t < t_0$ , dla pewnych  $m, t_0 > 0$ . Ostatnim krokiem jest odpowiednie skorzystanie z tożsamości Chapmana-Kołmogorowa. Mianowicie dla  $|x - y|/\sqrt{t} > 4\sqrt{m}$  mamy

$$B(\frac{x+y}{2}, m\sqrt{t}) \subset B(\frac{x}{3|x|}, \frac{2}{3}) \cap B(\frac{y}{3|y|}, \frac{2}{3})$$

oraz

$$\delta_B(z) = 1 - |z| \gtrsim \sqrt{t} + |x - y|^2, \quad z \in B(\frac{x+y}{2}, m\sqrt{t}).$$



Stąd

$$\begin{aligned}
p_B(t, x, y) &\geq \int_{B((x+y)/2, m\sqrt{t})} p_B(t/2, x, z) p_B(t/2, z, y) dz \\
&\geq \int_{B((x+y)/2, m\sqrt{t})} \left(1 \wedge \frac{\delta_B(x)\delta_B(z)}{t}\right) \left(1 \wedge \frac{\delta_B(y)\delta_B(z)}{t}\right) p(t/2, x, z) p(t/2, z, y) dz \\
&\stackrel{m, t_0}{\gtrsim} \left(1 \wedge \frac{\delta_B(x)(t + |x - y|^2)}{t}\right) \left(1 \wedge \frac{\delta_B(y)(t + |x - y|^2)}{t}\right) \\
&\quad \times \int_{B((x+y)/2, m\sqrt{t})} p(t/2, x, z) p(t/2, z, y) dz \\
&\gtrsim h(t, x, y) p(t, x, y),
\end{aligned}$$

gdzie porównywalność ostatniej całki z  $p(t, x, y)$  jest osobno udowodniona w Lemma 1 w [H3]. Dla  $|x - y|/\sqrt{t} \leq 4\sqrt{m}$  można przesunąć obszar całkowania w powyższych całkach o  $m\sqrt{t}$  do wnętrza kuli  $B$ . To kończy dowód.  $\square$

#### 4.4.3 Jądro ciepła Dirichleta zbiorów wypukłych klasy $C^{1,1}$

W momencie gdy znamy już oszacowania z Twierdzenia 7, kolejnym naturalnym krokiem są analogiczne badania dla zbiorów klasy  $C^{1,1}$ , których wyniki są zawarte w pracy [H4]. Zbiory klasy  $C^{1,1}$  posiadają własność wewnętrznej i zewnętrznej kuli, co oznacza, że dla dowolnego punktu  $z$  z brzegu  $\partial D$  zbioru  $D$  istnieją dwie kule styczne do  $D$  w punkcie  $z$  takie, że jedna jest zawarta w  $D$ , a druga w jego dopełnieniu. Ponadto jeśli  $D$  jest ograniczony, to istnieje promień  $r > 0$  taki, że dla każdego  $z \in \partial D$  kule w warunku mają promień przynajmniej  $r$ . Klasę zbiorów z taką własnością będziemy oznaczać przez  $C_r^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ .

Drugim założeniem, które będziemy nakładać na zbiory, jest ich wypukłość. Dzięki temu zachowanie eksponencjalne jąder ciepła będzie takie samo jak globalnego jądra ciepła  $p(t, x, y)$ . S. R. S. Varadhan pokazał (Corollary 4.7 w [64]), że dla dowolnego obszaru  $D$  zachodzi

$$\lim_{t \rightarrow 0} t \ln(p_D(t, x, y)) = \frac{1}{2} d_D^2(x, y),$$

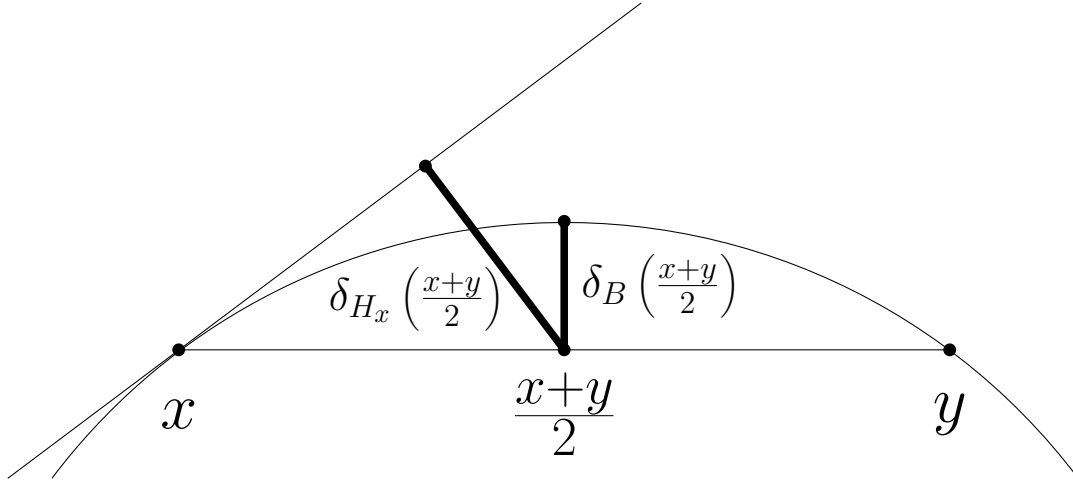
gdzie  $d_D(x, y)$  to infimum długości wszystkich łuków zawartych w  $D$  i łączących punkty  $x$  i  $y$ . Gdy  $D$  jest wklęsły, wtedy istnieją  $x, y \in D$  takie, że  $d_D(x, y) > |x - y|$  i w konsekwencji  $e^{-d_D^2(x, y)/4t} \ll e^{-|x - y|^2/2t}$  dla  $t$  odpowiednio małych. Można oczywiście próbować otrzymać oszacowania z wyrażeniem  $-d_D^2(x, y)/2t$  w wykładniku, ale jest to problem nieporównywalnie bardziej zaawansowany i stanowi materiał raczej na przyszłe badania, ponieważ spodziewany jest dodatkowy czynnik eksponencjalny postaci  $e^{c(x, y)t^{-1/3}}$  związany z hipotezą Buslaeva [12, 35].

Jednym z pytań, które się nasuwa przy analizowaniu Twierdzenia 7 jest to, czy wyrażenie  $|x - y|^2$  pojawiające się w czynniku nieeksponencjalnym (33) jest związane z wykładnikiem w czynniku eksponencjalnym  $e^{-|x - y|^2}/2t$ , czy raczej z geometrią kuli. Mianowicie dla  $x, y$  na (dla uproszczenia) brzegu  $\partial B$  jednostkowej kuli wyrażenie  $|x - y|^2$  jest porównywalne

z dwoma odległościami (patrz rysunek poniżej):

$$d_1(x, y) := \delta_B \left( \frac{x+y}{2} \right) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}|x-y|^2},$$

$$d_2(x, y) := \delta_{H_x} \left( \frac{x+y}{2} \right) = \delta_{H_y} \left( \frac{x+y}{2} \right) = \frac{1}{4}|x-y|^2.$$



Definicję półprzestrzeni  $H_x$  oraz odległości  $d_1(x, y)$  i  $d_2(x, y)$  można łatwo rozszerzyć na obszary klasy  $C^{1,1}$ . Od teraz  $H_x$  będzie oznaczać dowolną półprzestrzeń taką, że  $D \subset H_x$  and  $\delta_D(x) = \delta_{H_x}(x)$ . Taka półprzestrzeń może nie być jedyna, ale miara Lebesgue'a punktów z taką niejednoznacznością wynosi zero.

Pierwszym uzyskanym przeze mnie wynikiem w tym temacie są oszacowania górne zależne od odległości typu  $d_2(x, y)$ .

**Twierdzenie 9** (Theorem 3.2, Theorem 3.4 oraz Corollary 3.5 w [H4]).

Niech  $D \subset \mathbb{R}^n$  będzie obszarem klasy  $C_r^{1,1}$ ,  $r > 0$ . Istnieje stała  $C = C(T, n, r) > 0$  taka, że

$$\begin{aligned} & p_D(t, x, y) \\ & \leq C p(t, x, y) \left[ \left( 1 \wedge \frac{\delta(x)\delta(y)}{t} \right) + \left( 1 \wedge \frac{\delta_{H_x}(x)\delta_{H_x}(y)}{t} \right) \left( 1 \wedge \frac{\delta_{H_y}(y)\delta_{H_y}(x)}{t} \right) \right] \\ & \leq 4C p(t, x, y) \left[ \left( 1 \wedge \frac{\delta(x)\delta(y)}{t} \right) + \left( 1 \wedge \frac{\delta_{H_x}(x)\delta_{H_x}\left(\frac{x+y}{2}\right)}{t} \right) \left( 1 \wedge \frac{\delta_{H_y}(y)\delta_{H_y}\left(\frac{x+y}{2}\right)}{t} \right) \right], \quad (37) \end{aligned}$$

gdzie  $x, y \in D$ ,  $t < T$ . Ponadto jeśli  $\angle(H_x, H_y) \geq \frac{1}{2}\pi$ , wtedy stała  $C$  jest absolutna.

Idea dowodu jest podobna jak ta w przypadku Twierdzenia 7, jednak poszczególne etapy wymagały więcej wysiłku ze względu na ogólność zbioru.

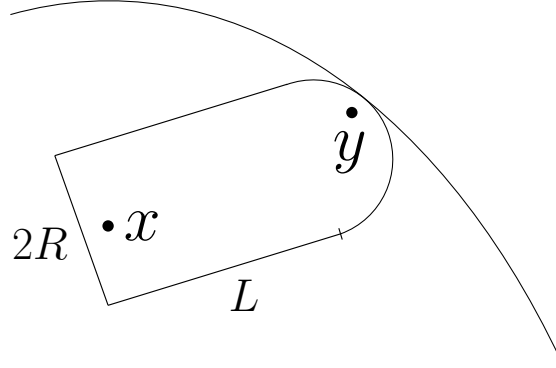
Postać dolnych oszacowań jest podobna, jednak odległość  $d_2(x, y)$  zastąpiona jest odległością  $d_1(x, y)$ .

**Twierdzenie 10** (Theorem 4.3 w [H4]).

Dla dowolnego obszaru klasy  $D \in C_r^{1,1}$  oraz  $T > 0$  istnieje stała  $C = C(n, r, T)$  taka, że

$$\begin{aligned} p_D(t, x, y) &\geq Cp(t, x, y) \left[ \left( 1 \wedge \frac{\delta_D(x)\delta_D(y)}{t} \right) + \left( 1 \wedge \frac{\delta_D(x)\delta_D\left(\frac{x+y}{2}\right)}{t} \right) \left( 1 \wedge \frac{\delta_D(y)\delta_D\left(\frac{x+y}{2}\right)}{t} \right) \right] \\ &\approx Cp(t, x, y) \left( 1 \wedge \frac{\delta_D(x)\left(\delta_D\left(\frac{x+y}{2}\right) + \sqrt{t}\right)}{t} \right) \left( 1 \wedge \frac{\delta_D(y)\left(\delta_D\left(\frac{x+y}{2}\right) + \sqrt{t}\right)}{t} \right). \end{aligned} \quad (38)$$

Pierwszym i najważniejszym krokiem dowodu jest pokazanie nierówności  $p_D(t, x, y) \geq C \left( 1 \wedge \frac{\delta_D(x)\delta_D(y)}{t} \right) p(t, x, y)$  w przypadku zbioru  $D = J_{R,L} := B_n(0, R) \cup ((0, L) \times B_{n-1}(0, R))$  (połowa "pigułki") dla  $x = (L - \sqrt{t}, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $y_1 \leq 0$ , gdzie  $C$  nie zależy od  $R$  ani  $L$ . Następnie uogólniamy tę nierówność na dowolny zbiór  $D \in C_r^{1,1}$  dla  $\delta_D(x) \geq t$  poprzez wpisanie  $J_{R,L}$  w  $D$  w taki sposób, aby  $\delta_{J_{R,L}}(x) = \delta_D(x)$ . Na koniec korzystamy dwukrotnie z tożsamości Chapmana-Kołmogorowa i poprzez odpowiednie manipulacje otrzymujemy (38).



Z nierówności (37) i (38) łatwo widać, że jeśli dla danego obszaru  $D$  klasy  $C_r^{1,1}$  istnieje stała  $C$  taka, że  $1 < \delta_{H_x}\left(\frac{x+y}{2}\right) / \delta_D\left(\frac{x+y}{2}\right) < C$  dla wszystkich  $x, y \in D$ , wtedy oszacowania w Twierdzeniach 9 i 10 są porównywalne, co daje nam ostre dwustronne oszacowania. Niestety taka stała nie musi istnieć. Aby opisać zbiory, dla których wyprowadzimy dwustronne ostre oszacowania, wprowadzimy następujące charakterystyki ściśle wypukłych obszarów  $D$  klasy  $C^{1,1}$

$$\begin{aligned} Q_D &:= \inf_{w, z \in \partial D, w \neq z} \frac{\delta_D\left(\frac{w+z}{2}\right)}{\delta_{H_w}\left(\frac{w+z}{2}\right)}, \\ R_D &:= \min \left\{ \inf_{\substack{w, z \in \partial D, w \neq z \\ \delta_D\left(\frac{w+z}{2}\right) \leq 1}} \frac{\delta_D\left(\frac{w+z}{2}\right)}{\delta_{H_w}\left(\frac{w+z}{2}\right)}, \inf_{\substack{w, z \in \partial D, w \neq z \\ \delta_D\left(\frac{w+z}{2}\right) > 1}} \sup_{\substack{m \in \overline{wz} \\ \delta_D(m) > 1}} \frac{\delta_D(m)}{\delta_{H_w}(m)} \right\}, \end{aligned}$$

oraz odpowiadające im rodziny zbiorów:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_Q &:= \left\{ D \in C^{1,1}(\mathbb{R}^n) : D \text{ jest ściśle wypukły, } Q_D > 0 \right\}, \\ \mathcal{S}_R &:= \left\{ D \in C_r^{1,1}(\mathbb{R}^n) \text{ dla pewnego } r > 0 : D \text{ jest ściśle wypukły, } R_D > 0 \right\}. \end{aligned}$$

Warunek  $Q_D > 0$  oznacza, że dla dowolnych  $w, z \in \partial D$  odległość od punktu  $\frac{w+z}{2}$  do brzegu  $\partial D$  jest porównywalna z jego odległością do  $P_w$  oraz  $P_z$ . Jeśli  $R_D > 0$ , to warunek jest słabszy o ile  $\delta_D\left(\frac{w+z}{2}\right) > 1$ , ponieważ wtedy wystarczy istnienie punktu na odcinku  $\overline{wz}$ , którego odległość od  $\partial D$  jest większa niż 1 oraz porównywalna z odległością od  $P_w$ . Kilka uwag:

1.  $0 \leq Q_D \leq R_D \leq 1$ .
2. W definicji  $Q_D$  oraz  $R_D$  punkty  $w$  i  $z$  są brane jedynie z brzegu zbioru  $D$ , a nie z jego wnętrza, co ułatwia szacowanie tych charakterystyk.
3. Jeśli  $D \in S_Q$ , wtedy  $D$  jest ograniczony (Lemma 5.2 w [H4]). Wprowadzenie charakterystyki  $R_D$  wynika z potrzeby rozważania zbiorów nieograniczonych.
4. W definicji  $S_Q$  oraz  $S_R$  pojawia się dodatkowy warunek ściśle wypukłości. Okazuje się, że w przeciwnym razie problem dwustronnych oszacowań mocno się komplikuje i ciężko opisać je uniwersalnymi prawami. Zachęcam czytelnika do analizy Przykładu 3, gdzie przedstawione jest nietypowe zachowanie jądra ciepła Dirichleta bardzo prostego nieściśle wypukłego zbioru.
5. Obie klasy  $S_Q$  oraz  $S_R$  zawierają wiele istotnych i nietrywialnych zbiorów (patrz przykłady 1 oraz 2). Ponadto skonstruowanie obszaru ściśle wypukłego klasy  $C_r^{1,1}$ , który nie należy do klasy  $S_R$  wydaje się zadaniem bez łatwego rozwiązania.

**Twierdzenie 11.** *Jeśli  $D \in S_Q$ , wtedy*

$$p_D(t, x, y)$$

$$\stackrel{r, Q_D, T}{\approx} p(t, x, y) \left[ \left( 1 \wedge \frac{\delta_D(x)\delta_D(y)}{t} \right) + \left( 1 \wedge \frac{\delta_D(x)\delta_D\left(\frac{x+y}{2}\right)}{t} \right) \left( 1 \wedge \frac{\delta_D(y)\delta_D\left(\frac{x+y}{2}\right)}{t} \right) \right]$$

$$\stackrel{Q_D}{\approx} p(t, x, y) \left[ \left( 1 \wedge \frac{\delta_D(x)\delta_D(y)}{t} \right) + \left( 1 \wedge \frac{\delta_{H_x}(x)\delta_{H_x}(y)}{t} \right) \left( 1 \wedge \frac{\delta_{H_y}(y)\delta_{H_y}(x)}{t} \right) \right]$$

zachodzi dla  $x, y \in D$  oraz  $0 < t < T$ .

Okazuje się, że  $S_Q$  jest właściwą podklasą obszarów klasy  $C^{1,1}$  dla których oszacowania z Twierdzenia 10 są obustronnymi oszacowaniami.

**Twierdzenie 12.** *Niech  $D$  będzie ściśle wypukłym obszarem klasy  $C^{1,1}$  oraz  $T > 0$ .  $D \in S_Q$  wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$p_D(t, x, y)$$

$$\stackrel{D, T}{\approx} p(t, x, y) \left[ \left( 1 \wedge \frac{\delta_D(x)\delta_D(y)}{t} \right) + \left( 1 \wedge \frac{\delta_D(x)\delta_D\left(\frac{x+y}{2}\right)}{t} \right) \left( 1 \wedge \frac{\delta_D(y)\delta_D\left(\frac{x+y}{2}\right)}{t} \right) \right]$$

zachodzi dla wszystkich  $x, y \in D$  i  $0 < t < T$ .

Gdy osłabimy warunek  $Q_D > 0$  do  $R_D > 0$ , wtedy dwustronne ostre oszacowania jądra ciepła  $p_D(t, x, y)$  mają taką postać jak w Twierdzeniu 9, która jednak już niekoniecznie jest porównywalna z tą z Twierdzenia 10.

**Twierdzenie 13.** *Jeśli  $D \in \mathcal{S}_R$ , to*

$$p_D(t, x, y) \stackrel{r, T, R_D}{\approx} p(t, x, y) \left[ \left( 1 \wedge \frac{\delta(x)\delta(y)}{t} \right) + \left( 1 \wedge \frac{\delta_{H_x}(x)\delta_{H_x}(y)}{t} \right) \left( 1 \wedge \frac{\delta_{H_y}(y)\delta_{H_y}(x)}{t} \right) \right]$$

*zachodzi dla  $x, y \in D$ ,  $0 < t < T$ , gdzie  $H_x, H_y$  są dowolnymi półprzestrczeniami takimi, że  $D \subset H_x, H_y$  oraz  $\delta_D(x) = \delta_{H_x}(x)$ ,  $\delta_D(y) = \delta_{H_y}(y)$ .*

**Uwaga 14.** Podobnie jak w (22) oraz we Wniosku 8, gęstość  $q_D(t, x, y)$  czasu i miejsca pierwszego wyjścia ze zbioru jest skierowaną do wewnątrz pochodną normalną funkcji  $p_D(t, x, y)$  i dzięki temu każde oszacowanie jądra ciepła Dirichleta, oznaczone poniżej przez  $f(t, x, y)$ , można przekształcić w oszacowanie funkcji  $q_D(t, x, y)$  poprzez obliczenie granicy

$$\lim_{\delta(y) \rightarrow 0} \frac{f(t, x, y)}{\delta(y)}.$$

Przykładowo z Twierdzenia 13 możemy wywnioskować, że jeśli  $D \in \mathcal{S}_R$ , wtedy  $q_D(t, x, y)$  posiada ostre dwustronne oszacowania postaci

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta(y) \rightarrow 0} \frac{p(t, x, y)}{\delta(y)} \left[ \left( 1 \wedge \frac{\delta(x)\delta(y)}{t} \right) + \left( 1 \wedge \frac{\delta_{H_x}(x)\delta_{H_x}(y)}{t} \right) \left( 1 \wedge \frac{\delta_{H_y}(y)\delta_{H_y}(x)}{t} \right) \right] \\ & = p(t, x, y) \frac{1}{t} \left[ \delta(x) + \left( 1 \wedge \frac{\delta_{H_x}(x)\delta_{H_x}(y)}{t} \right) \delta_{H_y}(x) \right], \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równości  $\delta(y) = \delta_{H_y}(y)$ .

## Przykłady

Pierwszy przykład dotyczy wnętrza paraboloidy oraz jej uogólnień. Badanie obszarów tego typu sprawia wiele trudności, ponieważ ani nie są ograniczone, ani ich dopełnienie nie jest ograniczone. W pracy [30] znajdują się oszacowania jądra ciepła Dirichleta z różnymi stałymi w eksponentach, natomiast w pracach [2, 41] badany był pierwszy czas wyjścia z tych zbiorów.

**Przykład 1** (Proposition 5.6. w [H4]).

Rozważmy zbiór  $U = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > a|(x_1, \dots, x_{n-1})|^p\}$ , gdzie  $p \geq 2$ ,  $n \geq 2$  oraz  $a > 0$ . Zachodzi  $U \in \mathcal{S}_R$ . W konsekwencji jądro ciepła  $p_U(t, x, y)$  posiada oszacowania opisane w Twierdzeniu 13 ze stałymi zależnymi od  $n, T, a, p$ .

Następnie rozważymy ograniczone podzbiory  $\mathbb{R}^2$  z analitycznym brzegiem.

**Przykład 2** (Proposition 5.7. w [H4]).

Dla  $n = 2$  klasa  $\mathcal{S}_Q$  zawiera ściśle wypukłe obszary ograniczone z analitycznym brzegiem. W konsekwencji jądro ciepła Dirichleta takich zbiorów posiada oszacowania zarówno z Twierdzenia 13 jak i z Twierdzenia 12.

Na koniec rozważmy następujący zbiór

$$S = \left( B_2((-1, 0), 1) \right) \cup \left( (-1, 1) \times (-1, 1) \right) \cup \left( B_2((1, 0), 1) \right) \subset \mathbb{R}^2,$$

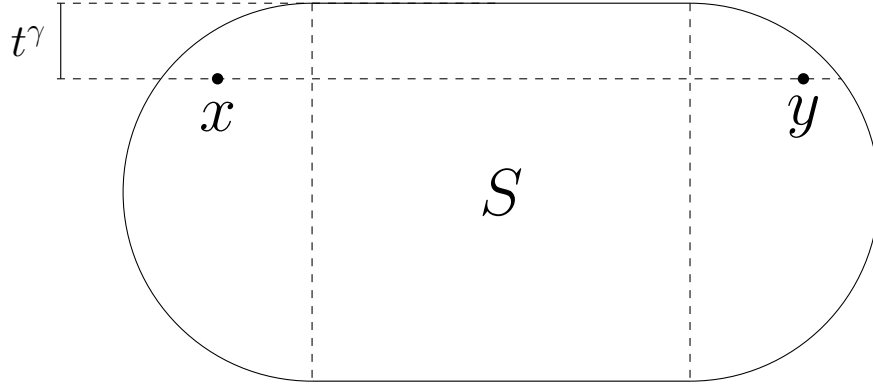
który to jest po prostu kwadratem  $(-1, 1) \times (-1, 1)$  z dwoma półkolemi dodanymi do jego dwóch przeciwległych boków. Znany jest pod nazwą *stadion*. Następny przykład pokazuje, że dla pewnego zakresu argumentów jądro ciepła  $p_S(t, x, y)$  nie spełnia oszacowań ani



z Twierdzenia 9, ani tych z Twierdzenia 10. Argumenty przestrzenne, dla których pojawia się to zachowanie, położone są na przeciwległych końcach 'płaskiej' części brzegu, co sugeruje, że nieściśła wypukłość zbiorów rzeczywiście sprawia, że oszacowania wyprowadzone w tym rozdziale nie są spełnione.

**Przykład 3** (Example 5.1 w [H4]).

Niech  $x, y \in S$  będą takie, że  $x_1 < -1$ ,  $y_1 > 1$ ,  $x_2, y_2 = 1 - t^\gamma$ ,  $\gamma > 0$  oraz  $\delta_S(x), \delta_S(y) < t^{1+\gamma}$ , gdzie  $t < 1$  (patrz rysunek poniżej).



Dla  $0 < \gamma \leq \frac{1}{2}$  mamy

$$p_S(t, x, y) \approx p(t, x, y) \left[ \left( 1 \wedge \frac{\delta_S(x)\delta_S(y)}{t} \right) + \left( 1 \wedge \frac{\delta_{H_x}(x)\delta_{H_x}(y)}{t} \right) \left( 1 \wedge \frac{\delta_{H_y}(y)\delta_{H_y}(x)}{t} \right) \right],$$

a dla  $\gamma \geq \frac{2}{3}$  zachodzi

$$p_S(t, x, y) \approx p(t, x, y) \left[ \left( 1 \wedge \frac{\delta_S(x)\delta_S(y)}{t} \right) + \left( 1 \wedge \frac{\delta_S(x)\delta_S\left(\frac{x+y}{2}\right)}{t} \right) \left( 1 \wedge \frac{\delta_S(y)\delta_S\left(\frac{x+y}{2}\right)}{t} \right) \right].$$

Niemniej jednak dla  $\frac{1}{2} < \gamma < \frac{2}{3}$  dostajemy

$$p_S(t, x, y) \approx \frac{\delta_S(x)\delta_S(y)}{t^{3(1-\gamma)}} p(t, x, y), \quad (39)$$

podczas gdy

$$\left( 1 \wedge \frac{\delta_S(x)\delta_S(y)}{t} \right) + \left( 1 \wedge \frac{\delta_S(x)\delta_S\left(\frac{x+y}{2}\right)}{t} \right) \left( 1 \wedge \frac{\delta_S(y)\delta_S\left(\frac{x+y}{2}\right)}{t} \right) \approx \frac{\delta_S(x)\delta_S(y)}{t}$$

oraz

$$\left( 1 \wedge \frac{\delta_S(x)\delta_S(y)}{t} \right) + \left( 1 \wedge \frac{\delta_{H_x}(x)\delta_{H_x}(y)}{t} \right) \left( 1 \wedge \frac{\delta_{H_y}(y)\delta_{H_y}(x)}{t} \right) \approx \frac{\delta_S(x)\delta_S(y)}{t^{2-\gamma}} = \frac{\delta_S(x)\delta_S(y)}{t^{3(1-\gamma)+2\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)}}.$$

## 4.5 Opis wkładu w prace

Poniżej opisuję mój wkład w powstanie artykułów stanowiących osiągnięcie.

- [H1] Byłem pomysłodawcą oraz wykonawcą dowodu górnych oszacowań funkcji  $p_1^{(\mu)}(t, x, y)$  (Proposition 3.2 w pracy) oraz autorem głównych kroków w oszacowaniach dolnych (Proposition 3.1), mianowicie w przypadku gdy  $x \leq 1/4$  oraz  $\mu > -1/2$ . Moi współautorzy otrzymali wcześniej oszacowania pokrywające część wymienionych wyników, ale metody przez nich zaproponowane były standardowe lub nie zostały w pracy użyte.
- [H2] Praca samodzielna.
- [H3] Górne oszacowania zostały udowodnione głównie przeze mnie, poza nierównością (35) ((3.2) w [H3]), którą i tak sam zaproponowałem. W przypadku dolnych oszacowań jestem autorem głównych idei dowodowych oraz wykonałem wstępne obliczenia. Podczas pracy nad górnymi oszacowaniami zaproponowałem końcową, prawidłową hipotezę.
- [H4] Praca samodzielna.

## 4.6 Podsumowanie i znaczenie wyników

Moje osiągnięcie może być ogólnie określone jako wyprowadzenie ostrych oszacowań jąder ciepła Dirichleta oraz gęstości rozkładu czasu i miejsca pierwszego wyjścia z danego zbioru dla ruchu Browna oraz procesu Bessela, ze specjalnym naciskiem na zachowanie eksponencjalne. Procesy te są ze sobą związane poprzez fakt, że norma ruchu Browna ma taki sam rozkład jak proces Bessela z odpowiednim indeksem. Rozważane przeze mnie funkcje są obiektami podstawowymi w swoich dziedzinach; pełnią ważną rolę zarówno w teorii procesów stochastycznych, analizie matematycznej, jak i fizyce i są obiektem badań nieprzerwanie już od dziesiątków lat. Pomimo tego otrzymane przeze mnie wyniki są pierwsze w swoim rodzaju. Dokładne oszacowania pozwalają na lepsze zrozumienie zachowania badanych funkcji i na porównanie ich z globalnym jądrem ciepła oraz umożliwiają dalsze badania np. nad asymptotykami czy jądrami rezolwent. Ostre oszacowania były już znane w przypadku funkcji Greena i jąder Poissona dla omawianych procesów (patrz [29, 68]), a także dla jąder ciepła Dirichleta dużej klasy procesów Lévy'ego oraz Markowa (patrz m.in. [6, 7, 16, 31]), gdzie jednakże nie występuje zachowanie eksponencjalne. Naturalnym więc było zmierzyć się z analogicznymi zagadnieniami w przypadku tak klasycznych procesów jak ruch Browna czy proces Bessela. Sukces przeprowadzonych badań może zachęcać do kontynuacji prac w tym kierunku.

Osiągnięcie tych wyników było możliwe dzięki połączeniu metod probabilistycznych oraz analitycznych. Dodatkowo pojawiło się również sporo argumentów geometrycznych. Kombinacja ta wydaje się niezwykle skuteczna względem rozważanych problemów i powinna dać się zaadoptować w przypadku innych dyfuzji czy zbiorów o mniej regularnym brzegu. Część metod z pracy [H3] została już wykorzystana w artykule [54] do uzyskania jednostajnych oszacowań funkcji Greena kuli w przestrzeni hiperbolicznej.

Temat którego dotyczy osiągnięcie, pomimo swojej długiej historii, wciąż należy do głównego nurtu badań w matematyce. Osiągnięte w pracach rezultaty są nie tylko wzmiankowane w innych pracach, ale także stosowane czy rozszerzane przez innych matematyków. W szczególności oszacowania jądra ciepła Fouriera-Bessela z pracy [H1] zostały użyte

do oszacowania gęstości rozkładu maksimum mostu Bessela [36], do udowodnienia ograniczoności operatora  $\gamma$ -Littlewooda-Paley'a-Steina [5] czy operatora maksymalnego związanego z rozwinięciem Fouriera-Bessela [40], a także do pokazania jednostajnego ograniczenia w normie  $L^1$  półgrupy związanej z atomową przestrzenią Hardy'ego [11]. Oszacowania gęstości czasu pierwszego wyjścia z pracy [H2] pomogły autorowi [59] w obliczeniu asymptotycznej prędkości wzrostu populacji oraz autorom [3] w ograniczeniu odległości między procesem Lévy'ego  $X$  typu càdlàg na ośrodkowej przestrzeni Banacha a pewną rodziną procesów adaptowalnych względem filtracji generowanej przez  $X$ . Ponadto w pracy [4] wyprowadzone zostały nowe, niezależne od indeksu ograniczenia momentów pierwszego czasu wyjścia dla procesu Bessela, podczas gdy wyniki pracy [H2] implikują ograniczenia zależne od indeksu. W końcu artykuł [H3] był jedną z motywacji do badań, które zostały zwieńczone pracą [48]. Ostatni element osiągnięcia - praca [H4] - nie był jeszcze cytowany, ale został opublikowany dopiero niedawno. Wydaje się jednak najbardziej wartościowym w osiągnięciu, ponieważ oszacowania w nim zawarte dotyczą szerokiej klasy zbiorów, nie tracąc przy tym na jakości i na przykład obejmują pracę [H3] jako szczególny przypadek.

Podsumowując, moje osiągnięcie wnosi wkład w klasyczną teorię potencjału poprzez oszacowania jąder ciepła Dirichleta oraz gęstości rozkładu czasu i miejsca pierwszego wyjścia ze zbiorów dla ruchu Browna i procesu Bessela, przyrównując je do globalnych jąder ciepła. Zagadnienia tego typu są związane między innymi z własnością niewyczuwania brzegu wprowadzoną przez Marca Kaca w 1950 roku i mogą być rozumiane jako kontynuacja badań w tym kierunku. Rozwinięta metodologia oparta na połączeniu prawdopodobieństwa i analizy wydaje się mieć zastosowania przy różnorodnych założeniach. Otrzymane wyniki zostały już zauważone i wykorzystane przez innych matematyków. Ponadto mój wkład w artykuły stanowiące osiągnięcie jest w każdym przypadku pełny lub dominujący, co potwierdza moje możliwości do prowadzenia samodzielnych badań.

## 5 Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową w więcej niż jednej uczelni, w szczególności zagranicznej.

W trakcie mojej kariery odbyłem 3 staże naukowe na Nanyang Technological University (NTU) w Singapurze pod opieką prof. Nicolasa Privault. Miały one miejsce w terminach 13.05–30.09.2015, 02.10.2017–18.02.2018 oraz 18.02.–25.08.2019. Na pierwszy staż dostałem się poprzez aplikację, dwa kolejne były już na zaproszenie. W szczególności pomagałem w pracach nad wnioskiem o grant, z którego finansowany był mój trzeci pobyt. Stosunkowo krótkie okresy trwania wynikają jedynie ze względów prywatnych - duża odległość od Polski oraz brak możliwości pracy mojej żony w swoim zawodzie w Singapurze - kraj ten znany jest z bardzo ostrych przepisów.

W trakcie staży badałem zagadnienia związane z metodą Steina, przybliżaniem rozkładem normalnym i ich zastosowaniem do grafów losowych. Singapur wydaje się doskonałym miejscem na zgłębianie tej tematyki, gdyż uczeń Charlesa Steina i jednocześnie autor metody Steina-Chena (wariacji metody Steina) Louis Chen jest Singapurem i pracuje na zaprzyjaźnionym z NTU National University of Singapore. Pomimo iż były to dla mnie nowe tematy, współpraca z prof. Privault szybko nabrała tempa i jeszcze w roku 2015 ukończyliśmy pierwszą wspólną pracę [50], opublikowaną ostatecznie w roku 2018. Od tego czasu opublikowaliśmy jeszcze trzy prace [51, 52, 53]. Jednym z ważniejszych owoców naszej współpracy jest rozwiązanie 30-sto letniego problemu związanego z prędkością zbieżności znormalizowanego rozkładu liczby kopii ustalonego grafu w modelu Erdősa-Rényi'ego  $G(n, p)$  grafu losowego [51].

Choć od ostatniego stażu minęły 3 lata, jesteśmy z prof. Privault w stałym kontakcie i kontynuujemy współpracę. W szczególności odwiedziłem go w marcu 2022 roku na dwa tygodnie oraz prowadzimy badania związane z moim grantem.

## 6 Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę.

### Osiągnięcia dydaktyczne:

- W przeciągu swojej pracy, czyli od roku 2010 (doktorat realizowałem w ramach pracy na stanowisku asystenta) **prowadziłem 116 kursów** - zarówno ćwiczenia (107), jak i wykłady (13). Większość z nich (111), co dość typowe na Politechnice Wrocławskiej, było kursami ogólnouczelnianymi - prowadzone były dla kierunków niematematycznych na różnych wydziałach uczelni. Cztery z nich odbywały się w języku angielskim. Ponadto dwunastokrotnie prowadziłem kursy na kierunkach matematycznych, mianowicie Analizę matematyczną 2 i 3, Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, Rachunek prawdopodobieństwa, Matematykę dyskretną oraz Wstęp do logiki i teorii mnogości.

Dodatkowo, w ramach zastępstw, prowadziłem takie przedmioty jak Statystyka czy Wstęp do Procesów Stochastycznych. We wszelkich statystykach ująłem jedynie kursy, których byłem głównym prowadzącym. Poniżej dokładne zestawienie.

Wykaz kursów ogólnouczelnianych:

Kurs	Ćw.	Wykł.
Analiza matematyczna (1 lub 2) <sup>1</sup>	47	4
Algebra z geometrią analityczną	24	1
Matematyka dyskretna	22	1
Rachunek prawdopodobieństwa		1
Mathematics (w j.ang.)	1	1
Algebra <sup>1</sup> (w j.ang.)	2	

Wykaz kursów na kierunkach matematycznych:

Kurs	Ćw.	Wykł.
Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa	3	
Rachunek prawdopodobieństwa	3	
Matematyka dyskretna	1	2
Wstęp do logiki i teorii mnogości	1	
Analiza matematyczna M2	1	
Analiza matematyczna M3	1	

- Jestem **opiekunem dwóch kursów** na Wydziale Matematyki - Matematyki dyskretniej oraz (współopiekunem) Teorii grafów. Wiąże się z tym m.in. opracowanie programu oraz efektów kształcenia tych kursów.
- Pełniłem rolę **promotora pomocniczego** w przewodzie doktorskim doktora Kamila Bogusa.
- Pod moją opieką tytuł **licencjata** otrzymały 3 osoby:  
Jana Wilczyńska (2019)  
Klaudia Pytel (2020)  
Barbara Maziarz (2021).

#### Osiągnięcia organizacyjne:

- W roku 2019 razem z prof. K. Bogdanem, dr. hab. K. Kaletą oraz dr. hab. P. Sztonykiem założyłem i dalej kieruję **seminarium naukowym** *Grafy losowe i struktury dyskretne*. Celem seminarium jest rozszerzenie zainteresowań naukowych na uczelni w kierunku matematyki dyskretniej, a w szczególności grafów losowych, które pełnią coraz większą rolę we współczesnej matematyce. Jedną z motywacji do założenia seminarium były moje badania prowadzone nad grafami losowymi razem z prof. Nicolasem Privaut.
- Dwukrotnie - w latach 2015 oraz 2019 byłem członkiem **komitetu organizacyjnego** międzynarodowej **konferencji** *Probability and Analysis* odbywającej się w Będlewie. W tegorecznej edycji należę dodatkowo do **komitetu naukowego**.
- W latach 2011–2014 byłem członkiem **Rady Wydziału** Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej. Od 2021 jestem członkiem Rady Wydziału Matematyki.

---

<sup>1</sup>W nazwach kursów pojawiały się drobne różnice, ale materiał był bardzo podobny więc podobne kursy zostały potraktowane zbiorczo

- W latach 2011–2014 pomagałem w **organizacji finałów krajowych** eliminacji do *Międzynarodowych Mistrzostw w Grach Matematycznych i Logicznych*, które odbywają się na Politechnice Wrocławskiej, a zwycięzcy biorą udział w międzynarodowym finale w Paryżu.
- W roku 2009 byłem współzałożycielem studenckiego *Koła Naukowego Matematyki*, które prężnie działa aż do dzisiaj.

#### Osiągnięcia popularyzujące naukę:

- W semestrach zimowych 2020/21 oraz 2021/22 prowadziłem autorski kurs w ramach **Studium Talent**. Kursy tego typu są przeznaczone dla licealistów - mają ich zainteresować danym przedmiotem (w tym wypadku matematyką) na poziomie studenckim oraz, poprzez egzamin końcowy, umożliwić zdobycie dodatkowych punktów w rekrutacji na Politechnikę Wrocławską.
- W dniu 9 października 2021 wygłosiłem popularnonaukowy **referat** "Grafo-mania" w ramach ogólnopolskiego wydarzenia *Noc innowacji*.
- W dniach 25 oraz 28 kwietnia 2022 wygłosiłem dwa zdalne **referaty** dla licealistów w ramach dolnośląskiego *Tygodnia matematyki* organizowanego przez Politechnikę Wrocławską.
- W semestrze letnim roku szkolnego 2021/22 prowadziłem **kółko matematyczne** a Akademickim Liceum Ogólnokształcącym we Wrocławiu.
- W roku szkolnym 2021/2022 **opiekowałem się uzdolnionym uczniem** Akademickiego Liceum Ogólnokształcącego we Wrocławiu poprzez regularne spotkania i rozmowy na najróżniejsze tematy matematyczne.

## 7 Inne ważne informacje dotyczące kariery zawodowej.

- W roku 2022 mój projekt *Centralne twierdzenie graniczne dla ogólnych funkcjonalów z zastosowaniami w grafach losowych* otrzymał finansowanie od Narodowego Centrum Nauki w ramach konkursu **SONATA 17**.
- W roku 2021 zostałem wybrany na dwuletnią kadencję do **Academia Iuvenum** - nowego ciała na Politechnice Wrocławskiej zrzeszającego 48 wybitnych młodych (do 35 roku życia) naukowców z uczelni. Celem Akademii Iuvenum jest wsparcie wyróżniających się młodych naukowców oraz zmotywowanie do interdyscyplinarnej wymiany intelektualnej.
- W latach 2014, 2017 oraz 2021 otrzymywałem **Nagrody Rektora** Politechniki Wrocławskiej za wybitny wkład w rozwój uczelni
- W roku 2010 zdobyłem III-cią nagrodę w XLIV ogólnopolskim **Konkursie PTM** na najlepszą pracę studencką z teorii prawdopodobieństwa i zastosowań matematyki
- W semestrze zimowym 2018-19 otrzymywałem **dotację celową** z MNiSW dla młodych naukowców.

# Bibliografia

- [1] P. Baldi, E. C. Tarabusi, A. Figá-Talamanca, and M. Yor. Non-symmetric hitting distributions on the hyperbolic half-plane and subordinated perpetuities. *Rev. Mat. Iberoam.* 17, 587–605, 2001.
- [2] R. Bañuelos, R. D. DeBlassie and R. Smits. The first exit time of planar Brownian motion from the interior of a parabola. *Ann. Probab.* 29, no. 2, 882–901, 2001.
- [3] W. M. Bednorz, R. M. Łochowski and R. Martynek. Optimal uniform approximation of Lévy processes on Banach spaces with finite variation processes. *arxiv:1808.08373*, 2020.
- [4] W. M. Bednorz and R. M. Łochowski. Moments and tails of hitting times of Bessel processes and convolutions of elementary mixtures of exponential distributions *arxiv:2102.07015*, 2021.
- [5] J. J. Betancor, A. J. Castro and M. De León-Contreras. Variation operators for semigroups associated with Fourier-Bessel expansions. *Comm. Pure Appl. Anal.* 21, issue 1, 239–273, 2022.
- [6] K. Bogdan, T. Grzywny and M. Ryznar. Heat kernel estimates for the fractional Laplacian with Dirichlet conditions. *Ann. Probab.* 38, no. 5, 1901–1923, 2010.
- [7] K. Bogdan, T. Grzywny and M. Ryznar. Density and tails of unimodal convolution semigroups. *J. Funct. Anal.* 266, no. 6, 3543–3571, 2014.
- [8] K. Bogus and J. Małecki. Sharp estimates of transition probability density for Bessel process in half-line. *Potential Anal.* 43(1), 1–22, 2015.
- [9] K. Bogus and J. Małecki. Heat kernel estimates for the Bessel differential operator in half-line. *Math. Nachr.* 289, no. 17-18, 2097–2107, 2016.
- [10] A. N. Borodin, P. Salminen, *Handbook of Brownian Motion: Facts and Formulae*, Second Edition, Birkhäuser, 2002.
- [11] T. A. Bui, X. T. Duong and F. K. Ly. Maximal function characterizations for Hardy spaces on spaces of homogeneous type with finite measure and applications. *J. Funct. Anal.* 278, no. 8, 108423, 2020
- [12] V. S. Buslaev. Continuum integrals and the asymptotic behavior of the solution of parabolic equation as  $t \rightarrow 0$ , Application to diffraction. *Topics in Math. Phys.* 2, ed. by M. Sh. Birman, 67–86, 1968.
- [13] T. Byczkowski, J. Małecki, and M. Ryznar. Hitting times of Bessel processes. *Potential Anal.* 38(3), 753–786, 2013.
- [14] T. Byczkowski and M. Ryznar. Hitting distributions of geometric Brownian motion. *Studia math.* 170, 19–38, 2006.
- [15] J. Cheeger and S. T. Yau. A lower bound for the heat kernel. *Comm. Pure Appl. Math.* 34(4), 465–480, 1981.

- [16] Z.-Q. Chen, P. Kim and R. Song. Two-sided heat kernel estimates for censored stable-like processes. *Probab. Theory Related Fields* 146(3-4), 361–399, 2010.
- [17] Ó. Ciaurri and L. Roncal. The Bochner-Riesz means for Fourier-Bessel expansions. *J. Funct. Anal.* 228, 89–113, 2005.
- [18] Ó. Ciaurri and L. Roncal. Littlewood-Paley-Stein  $g_k$ -functions for Fourier-Bessel expansions. *J. Funct. Anal.* 258, 2173–2204, 2010.
- [19] Ó. Ciaurri and K. Stempak. Conjugacy for Fourier-Bessel expansions. *Studia Math.* 176, 215–247, 2006.
- [20] Ó. Ciaurri and K. Stempak. Transplantation and multiplier theorems for Fourier-Bessel expansions. *Trans. Amer. Math. Soc.* 358, 4441–4465, 2006.
- [21] Ó. Ciaurri and K. Stempak. Weighted transplantation for Fourier-Bessel expansions. *J. Anal. Math.* 100, 133–156, 2006.
- [22] P. Collet, S. Martínez, and J. San Martín. Asymptotic behaviour of a Brownian motion on exterior domains. *Probab. Theory Related Fields* 116(3), 303–316, 2000.
- [23] E. B. Davies. The equivalence of certain heat kernel and Green function bounds. *J. Funct. Anal.* 71, 88–103, 1987.
- [24] E. B. Davies and B. Simon. Ultracontractivity and heat kernels for Schrödinger operators and Dirichlet Laplacians. *J. Funct. Anal.* 59, 335–395, 1984.
- [25] D. Dufresne. The distribution of a perpetuity, with application to risk theory and pension funding. *Scand. Actuar. J.* 25, 39–79, 1990.
- [26] J. Dziubański, M. Preisner, L. Roncal, and P. R. Stinga. Hardy spaces for Fourier-Bessel expansions. *J. Anal. Math.* 128, 261–287, 2016.
- [27] H. German and M. Yor. Bessel processes, Asian options, and perpetuities. *Mathematical finance* 3, 1993.
- [28] A. Grigor’yan and L. Saloff-Coste. Dirichlet heat kernel in the exterior of a compact set. *Comm. Pure Appl. Math.* 55(1), 93–133, 2002.
- [29] M. Grüter and K.-O. Widman. The Green function for uniformly elliptic equations. *Manuscripta Math.* 37, no. 3, 303–342, 1982.
- [30] P. Gyrya and L. Saloff-Coste. Neumann and Dirichlet heat kernels in inner uniform domains. *Astérisque* 336, viii+144, 2011.
- [31] T. Grzywny, K. -Y. Kim and P. Kim. Estimates of Dirichlet heat kernel for symmetric Markov processes. *Stoch. Pr. Appl.* 130(1), 431–470, 2020.
- [32] Y. Hamana and H. Matsumoto. The probability densities of the first hitting times of Bessel process. *J. of Math-for-Industry* 4, 91–95, 2012.
- [33] P. Hsu. Brownian exit distribution of a ball. In *Seminar on stochastic processes, 1985 (Gainesville, Fla., 1985)*, volume 12 of *Progr. Probab. Statist.*, 108–116. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1986.



- [34] G. A. Hunt, *Markov Processes and Potentials I and II*, Illinois J. of Math. 1, 44–93 and 316–369, 1957 and Illinois J. of Math. 2, 151–213, 1958,
- [35] N. Ikeda and S. Kusuoka. Short time asymptotics for fundamental solutions of diffusion equations. *Stochastic analysis (Paris, 1987)*, 37–49, Lecture Notes in Math., 1322, Springer, Berlin, 1988.
- [36] K. Ishitani, T. Rin and S. Yanashima. On the weak convergence of conditioned Bessel bridges. *arxiv:2201.11328*, 2022.
- [37] M. Kac. On some connections between probability theory and differential and integral equations. In *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1950*, pages 189–215. University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1951.
- [38] J. T. Kent. Eigenvalue expansions for diffusion hitting times. *Z. Wahr. verw. Geb* 52, 309–319, 1980.
- [39] P. Kim and R. Song. Two-sided estimates on the density of Brownian motion with singular drift. *Illinois J. Math.* 50(1-4), 635–688, 2006.
- [40] B. Langowski and A. Nowak. On derivatives, Riesz transforms and Sobolev spaces for Fourier-Bessel expansions. *J. Fourier Anal. Appl.* 28, no. 1, 2022.
- [41] W. V. Li. The first exit time of a Brownian motion from an unbounded convex domain. *Ann. Probab.* 31 no. 2, 1078–1096, 2003.
- [42][H1] J. Małecki, G. Serafin, T. Żórawik. Fourier-Bessel heat kernel estimates. *J. Math. Anal. Appl.* 439(1), 91–102, 2016.
- [43][H3] J. Małecki, G. Serafin. Dirichlet heat kernel for the Laplacian in a ball. *Potential Anal.* 52, 545–563, 2020.
- [44] H. Matsumoto and M. Yor. Exponential functionals of Brownian motion. I. Probability laws at fixed time. *Probab. Surv.* 2, 312–347, 2005.
- [45] S. A. Molchanov and E. Ostrowski. Symmetric stable processes as traces of degenerate diffusion processes. *Theor. Prob. Appl.* 12, 128–131, 1969.
- [46] A. Nowak and L. Roncal. On sharp heat and subordinated kernel estimates in the Fourier-Bessel setting. *Rocky Mountain J. Math.* 44, 1321–1342, 2014.
- [47] A. Nowak and L. Roncal. Sharp heat kernel estimates in the Fourier-Bessel setting for a continuous range of the type parameter. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)* 30, 437–444, 2014.
- [48] A. Nowak, P. Sjögren and T. Z. Szarek. Sharp estimates of the spherical heat kernel. *J. Math. Pures Appl.* 129, 23–33, 2019.
- [49] A. Nowak, P. Sjögren and T. Z. Szarek. Genuinely sharp heat kernel estimates on compact rank-one symmetric spaces, for Jacobi expansions, on a ball and on a simplex. *Math. Ann.* 381, 1455–1476, 2021

- [50] N. Privault and G. Serafin. Stein approximation for functionals of independent random sequences. *Electron. J. Probab.* 23(4), 1–34, 2018.
- [51] N. Privault and G. Serafin. Normal approximation for sums of discrete  $U$ -statistics - application to Kolmogorov bounds in random subgraph counting. *Bernoulli*, 26 (1) 587–615, 2020.
- [52] N. Privault and G. Serafin. Normal approximation for the weights of subgraphs in the Erdős-Rényi random graph. *Stochastics* 94(3), 432–458, 2022.
- [53] N. Privault and G. Serafin. Berry-Esseen bounds for functionals of independent random variables. *Electron. J. Probab.* 27, 1–37, 2020.
- [54] M. Ryznar, G. Serafin and T. Žak. Hyperbolic Green function estimates. *Electron. J. Probab.* 54, 535–559, 2021.
- [55] D. Revuz and M. Yor. *Continuous martingales and Brownian Motion*. Third Edition, Springer, 2005.
- [56][H2] G. Serafin. Exit times densities of Bessel process. *Proceedings of American Mathematical Society* 145 , 3165–3178, 2017.
- [57] G. Serafin. Feeling boundary by Brownian motion in a ball. *Asymptotic Analysis*, vol. Pre-press, DOI: 10.3233/ASY-211734, 2021.
- [58][H4] G. Serafin. Laplace Dirichlet heat kernels in convex domains. *J. Differential Equations* 314, 700–732, 2022.
- [59] Y. Shiozawa. Maximal displacement and population growth for branching Brownian motions. *Illinois J. Math.* 63, no. 3, 353–402, 2019.
- [60] K. Uchiyama. Asymptotics of the densities of the first passage time distributions for Bessel diffusions. *Trans. Amer. Math. Soc.* 367, 2719–2742, 2015.
- [61] M. van den Berg. Heat equation and the principle of not feeling the boundary. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 112, no. 3-4, 257–262, 1989.
- [62] M. van den Berg. Gaussian bounds for the Dirichlet heat kernel. *J. Funct. Anal.* 88, no. 2, 267–278, 1990.
- [63] M. van den Berg. A Gaussian lower bound for the Dirichlet heat kernel. *Bull. London Math. Soc.* 24, no. 5, 475–477, 1992.
- [64] S. R. S. Varadhan. Diffusion processes in a small time interval. *Comm. Pure Appl. Math.* 20, 659–685, 1967.
- [65] M. Yor. *Exponential functionals of Brownian motion and related processes*. Springer, Berlin, 2001.
- [66] Q. S. Zhang. The boundary behavior of heat kernels of Dirichlet Laplacians. *J. Differential Equations* 182:416–430, 2002.
- [67] Q. S. Zhang. The global behavior of heat kernels in exterior domains. *J. Funct. Anal.* 200(1):160–176, 2003.

- [68] Z. Zhao. Green function for Schrödinger operator and conditioned Feynman-Kac gauge.  
*J. Math. Anal. Appl.* 116, no. 2, 309–334, 1986.

Green Sanyin