Summary of doctoral dissertation entitiled "Perpetual American options with asset-dependent discounting"

Jonas Al-Hadad

This PhD dissertation presents an analysis of the optimal stopping problem of the form

$$V_{\mathrm{A}}^{\omega}(s) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E}_s \left[e^{-\int_0^{\tau} \omega(S_w)dw} g(S_\tau) \right],$$

where S_t is a diffusion process with jumps, $\mathcal{T}$ is a family of stopping times, while g and ω are the payoff function and the discount function, respectively. We further assume that the above expectation is calculated under the martingale measure. Then, according to the general theory of option pricing, we interpret this formula as a value function of a perpetual American option with asset-dependent discounting. The problem we consider is a generalisation of the classic case of pricing the perpetual American option with constant discounting, i.e. when $\omega(s) = r$, where r is a risk-free rate. In the context of financial applications, the payoff function is usually assumed to be of the form $g(s) = (K - s)^+$ or $g(s) = (s - K)^+$, which corresponds to a put option and a call option, respectively. In the thesis, we analyse the first of these cases in detail.

The motivation for analysing this problem is the development of financial instruments, particularly derivatives, which appear more frequently in the scientific literature nowadays. This is a kind of response to the demand of financial markets and their dynamic expansion that began in the second half of the 20th century. The over-the-counter (OTC) market, where large financial institutions, such as investment banks and hedge funds, transact with each other, is a constant field of challenges for mathematicians conducting research in the area of financial mathematics. One of the dominant issues of modern financial mathematics is the valuation of derivatives, and the OTC market allows its participants to create their own unique financial products that would be consistent with the forecasts and goals of a given company. These include hedging against risk in situations of high volatility in the stock markets or speculation to make excess profits. The process of pricing derivatives is done in a strict and mathematically orientated way, so the mathematical apparatus used is constantly being developed. In the case of American options, which are characterised by the fact that the buyer can choose to exercise them at any time during the contract's life, the valuation process boils down to solving a certain optimal stopping problem. In general, optimal stopping problems appear in various fields of mathematics like ruin theory, control theory or queueing theory, but also in other sciences, such as physics. This makes the problem we studied interdisciplinary and not only reduced to applications in the field of financial mathematics.

The main results of the paper include proving the convexity of the analysed value function, determining the form of the optimal stopping time in the case of a put option and, most importantly, obtaining an explicit formula for the value function when the underlying asset process is modelled by a spectrally negative exponential Lévy process. We also formulate a number of auxiliary theorems and lemmas, including those relating to the Hamilton-Jacobi-Bellman equation or call-put option parity. The paper also includes a numerical section in which we provide

examples of value function analytical formulas along with graphs for various discounting functions. We also describe the numerical methodology used, which allows us to determine the value function when we are unable to present it with an analytical formula.

Streszczenie rozprawy doktorskiej pt. „Nieskończone opcje amerykańskie z dyskontowaniem zależnym od aktywa bazowego”

Jonas Al-Hadad

Rozprawa doktorska przedstawia analizę problemu optymalnego zatrzymania postaci

$$V_{\mathrm{A}}^{\omega}(s) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E}_s \left[e^{-\int_0^\tau \omega(S_w)dw} g(S_\tau) \right],$$

gdzie S_t jest procesem dyfuzyjnym ze skokami, $\mathcal{T}$ jest rodziną czasów zatrzymania, natomiast g i ω są odpowiednio funkcją wypłaty i funkcją dyskontującą. Zakładamy ponadto, że powyższa wartość oczekiwana jest liczona względem miary martyngałowej. Wówczas, zgodnie z ogólną teorią wyceny opcji finansowych, wzór ten interpretujemy jako funkcja wartości nieskończonej opcji amerykańskiej z dyskontowaniem zależnym od aktywa bazowego. Rozpatrywany przez nas problem stanowi uogólnienie klasycznego przypadku wyceny opcji amerykańskiej ze stałym dyskontowaniem, tzn. gdy $\omega(s) = r$, gdzie r jest stopą wolną od ryzyka. W kontekście zastosowań finansowych najczęściej przyjmuje się, że funkcja wypłaty jest postaci $g(s) = (K - s)^+$ lub $g(s) = (s - K)^+$, co odpowiada kolejno opcji sprzedaży i opcji kupna. W rozprawie analizujemy dokładnie pierwszy z tych przypadków.

Motywacją do analizy tak zdefiniowanego problemu jest rozwój instrumentów finansowych, w szczególności instrumentów pochodnych, które pojawiają się coraz częściej w literaturze naukowej. Jest to pewnego rodzaju odpowiedź na zapotrzebowanie rynków finansowych i ich dynamiczną ekspansję rozpoczętą w drugiej połowie XX w. Rynek pozagiełdowy, na którym duże instytucje finansowe, takie jak na przykład banki inwestycyjne czy fundusze hedgingowe, zawierają ze sobą transakcje, jest stałym polem wyzwań dla naukowców prowadzących badania w obszarze matematyki finansowej. Jednym z dominujących zagadnień współczesnej matematyki finansowej jest wycena instrumentów pochodnych, a rynek pozagiełdowy umożliwia jego uczestnikom stworzenie własnych, unikalnych produktów finansowych, które byłyby zgodne z prognozami i celami danej firmy. Zaliczyć do nich możemy między innymi zabezpieczenie przed ryzykiem w sytuacji dużej zmienności na giełdach czy spekulację mającą na celu przyniesienie nadmiarowych zysków. Proces wyceny instrumentów pochodnych odbywa się w ścisły, zmatematyzowany sposób, dlatego też wykorzystywany aparat matematyczny jest stale rozwijany. W przypadku opcji amerykańskich, które charakteryzują się tym, że nabywca może zdecydować się na ich wykonanie w dowolnym momencie czasu trwania kontraktu, proces wyceny sprowadza się do rozwiązania pewnego problemu optymalnego zatrzymania. W ogólności, problemy optymalnego zatrzymania pojawiają się w różnych dziedzinach matematyki jak teoria ruiny, teoria sterowania czy teoria kolejek, ale również w innych naukach, na przykład w fizyce. To sprawia, że badany przez nas problem ma charakter interdyscyplinarny i nie jest ukierunkowany jedynie na zastosowania w obszarze matematyki finansowej.

Do głównych wyników pracy zaliczamy udowodnienie wypukłości analizowanej funkcji wartości, określenie postaci optymalnego czasu zatrzymania w przypadku opcji sprzedaży i przede

wszystkim uzyskanie jawnego wzoru funkcji wartości, gdy aktywo bazowe modelowane jest spektralnie ujemnym wykładniczym procesem Lévy'ego. Formułujemy również szereg pomocniczych twierdzeń i lematów, w tym te dotyczące równania Hamiltona-Jacobiego-Bellmana czy parytetu opcji kupna/sprzedaży. Praca zawiera również część numeryczną, w której przedstawiamy przykłady wzorów analitycznych funkcji wartości wraz z wykresami dla różnych funkcji dyskontujących. Opisujemy również zastosowaną metodologię numeryczną, która pozwala nam wyznaczyć funkcję wartości, gdy nie jesteśmy w stanie wyrazić jej wzorem analitycznym.