dr hab. Tomasz Klimsiak, prof. UMK
Katedra Teorii Prawdopodobieństwa
i Analizy Stochastycznej
Wydział Matematyki i Informatyki UMK

Toruń, 20 czerwca 2023 r.

# Recenzja

rozprawy doktorskiej mgra Jonasa Al-Hadada

**„Nieskończone opcje amerykańskie z dyskontowaniem zależnym od aktywa bazowego"**

Rozprawa doktorska mgra Jonasa Al-Hadada stanowi wkład w teorię wyceny papierów pochodnych. A dokładniej analizie została poddana funkcja wartości

$$V_{\mathrm{A}}^{\omega}(s) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathbb{E}_s \left[ e^{-\int_0^{\tau} \omega(S_w)dw} g\left(S_\tau\right) \right], \tag{1}$$

gdzie $g$ jest funkcją wypukłą (funkcja wypłaty), $\omega : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ jest funkcją wklęsłą (funkcja dyskontująca), a proces $S$, modelujący cenę aktywów bazowych, jest zadany poprzez następujace stochastyczne równanie różniczkowe

$$dS_t = \mu\left(S_{t-}, t\right) dt + \sigma\left(S_{t-}, t\right) dB_t + \int_{\mathbb{R}} \gamma\left(S_{t-}, t, z\right) \tilde{v}(dt, dz), \tag{2}$$

w którym $\tilde{v}(dt, dz) = (v - q)(dt, dz)$ jest miarą martyngałową oraz $v$ jest jednordną losową miarą Poissona na $[0,\infty) \times \mathbb{R}$ z miarą intensywności

$$q(dt, dz) = dt \otimes \Pi(dz).$$

W równości (1) przez $\mathcal{T}$ oznacza się zbiór wszystkich skończonych momentów zatrzymania. W rozprawie założono (jest to istotne ograniczenie na model), że

$$\lambda := \int_{\mathbb{R}} \Pi(dz) < \infty.$$

Co do współczynników $\mu, \sigma, \gamma$ rozważane są standardowe i naturalne założenia, które gwarantują istnienie mocnego rozwiązania $S$ powyższego SRR oraz jego nieujemność.

To co wyróżnia model rozpatrywany przez mgra Al-Hadada wśród bogatej literatury poświęconej wycenie instrumentów pochodnych, to dość ogólna zależność współczynnika dyskontującego $\omega(\cdot)$ od ceny $S$ aktywów bazowych (nazywana mocną zależnością).

Rozprawa jest podzielona na cztery rozdziały. W pierwszym rozdziale (Preliminaries) autor zdecydował się na (moim zdaniem ciekawy) przegląd literatury dotyczącej problemu wyceny opcji połączony z zarysem historycznym problemu (pod kątem matematycznym jak i finansowym). W rozdziale przytoczono również szereg, stosowanych w dalszej części rozprawy, pojęć i faktów na temat spektralnie ujemnych procesów Lévy'ego oraz funkcji skalujących. Pod koniec rozdziału autor sformułował główny problem badawczy, a następnie dokonał przeglądu literatury dotyczącej badanego w rozprawie modelu.

W rozdziale drugim (American options with asset-dependent discounting) sformułowane zostały główne wyniki rozprawy (twierdzenia 1–8). Dotyczą one następujących problemów:

- (Twierdzenie 1) wypukłość funkcji wartości $V_A^\omega$,
- (Twierdzenie 2; jako wniosek z twierdzenia 1) postać optymalnego czasu zatrzymania,
- (Twierdzenie 3) wyrażenie poprzez uogólnione funkcje skalujące funkcji wartości w przypadku, gdy cena aktywa bazowego modelowana jest przez spektralnie ujemny wykładniczy proces Lévy'ego,
- (Twierdzenie 4, 5) warianty twierdzenia 3 w przypadku, gdy aktywa bazowe modelowane są geometrycznym ruchem Browna (Twierdzenie 4) oraz wykładniczym procesem Lévy'ego z ujemnymi skokami wykładniczymi (Twierdzenie 5),
- (Twierdzenie 6; kontynuacja twierdzenia 5) równania różniczkowe zwyczajne dla uogólnionych funkcji skalujących,
- (Twierdzenie 7) równania Hamiltona-Jacobiego-Bellmana dla funkcji wartości (*smooth fit property*),
- (Twierdzenie 8) parytet opcji kupna/sprzedaży.

W rozdziale trzecim (Examples) podane są przykłady zastosowań uzyskanych wyników do konkretnych modeli (wraz z wynikami numerycznymi) w zależności od funkcji dyskontującej (homograficzna, stała, liniowa, potęgowa) oraz procesu opisującego cenę aktywów bazowych (model Blacka-Scholesa, model Lévey'ego). Rozdział czwarty (Proofs) składa się z dowodów twierdzeń 1–8.

Wyniki rozprawy zostały przedstawione w sposób czytelny, a dowody twierdzeń są poprowadzone w sposób zrozumiały dla czytelnika. Najpierw dowodzona jest wypukłość funkcji $V_A^\omega$ (rozumowanie oparte o wyniki i pomysły z pracy Ekström, E. oraz Tysk, J. (2007)), a następnie jako wniosek otrzymano, że zbiór $\{V_A^\omega = g\}$ jest wypukły, co w konsekwencji implikuje, że optymalny moment ma postać $\tau^* = \inf\{t \geqslant 0 : S_t \in [l^*, u^*]\}$ dla pewnych liczb $l^*, u^* \geqslant 0$, $l^* \leqslant u^*$. Innymi słowy

$$V_A^\omega(s) = \mathbb{E}_s\left[e^{-\int_0^{\tau^*} \omega(S_w)dw} g\left(S_{\tau^*}\right)\right].$$

W dowodzie twierdzenia 3 wykorzystano powyższą formułę oraz relacje pomiędzy momentami zatrzymania typu: pierwszy moment przekroczenia przez proces pewnej wartości, a uogólnionymi funkcjami skalującymi. Twierdzenia 4 i 5 są rozwinięciem twierdzenia 3 przy wykorzystaniu struktury i informacji o konkretnych modelach. Dowód twierdzenia 6 polega na umiejętnym manipulowaniu formułami dla funkcji skalujących przytoczonymi w rozdziale pierwszym. Dowód twierdzenia 7 jest modyfikacją znanych w literaturze rozumowań dla przypadku skończonego horyzontu czasowego. Dowód twierdzenia 8 polega na interesującej zamianie miary probabilistycznej we wzorze na funkcję wartości.

### Podsumowanie

Przedstawione w rozprawie wyniki są ważne z punktu widzenia zastosowań, ale również mają dużą wartość teoretyczną i naukową. Rozumowania zawarte w dowodach twierdzeń są ciekawe, wymagają dużej sprawności rachunkowej oraz bardzo dobrego przygotowania merytorycznego. Autor rozprawy wykazał się dobrą znajomością pojęć z teorii procesów Lévy'ego, analizy stochastycznej oraz teorii równań różniczkowych jak również bardzo dobrym zrozumieniem instrumentów pochodnych w matematyce finansowej. Rozprawa jest napisana dobrze i stanowi cenną pozycję czytelniczą (również dzięki licznym interesującym uwagom i komentarzom). Wartościową część rozprawy stanowią wyniki numeryczne oraz zarys historyczny problemu. Główny wynik rozprawy (twierdzenie 3) jest nowym i interesującym wkładem w matematykę i matematykę finansową (a konkretniej w teorię problemu z przeszkodą dla całkowo-różniczkowych równań cząstkowych oraz w teorię wyceny papierów pochodnych) .

## Wnioski

Uważam, że recenzowana rozprawa spełnia wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim. Dlatego wnoszę o jej przyjęcie oraz dopuszczenie mgra Jonasa Al-Hadada do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

## Uwagi i pytania

- W równości (1) występuje wyrażenie $S_\tau$, gdzie $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ jest momentem zatrzymania. Jak zatem rozumieć $S_\infty$ (w rozprawie nie wspomniano o istnieniu granicy $\lim_{t\to\infty} S_t$).
- funkcja dyskontująca $\omega$ stała się (zapewne w sposób niezamierzony) dość tajemniczym obiektem matematycznym. Wiemy, że jest to pewna funkcja ale dość długo nie znamy jej dziedziny (nawet w twierdzeniu 1 czytelnik ciągle nie zna dziedziny funkcji $\omega$).
- Na początku strony 6 wspomniano, że dla $\omega \equiv const$ otrzymujemy *perpetual American option*, ale gdy $\omega$ jest funkcją stałą, to $d\omega = 0$.
- W sformułowaniu twierdzenia 1 założono, że $\omega$ jest jedynie funkcją wypukłą. Następnie we wzorze (2.5) liczona jest druga pochodna $\omega$ (jakaś dodatkowa regularność na $\omega$ jest zakładana, czy mowa o pochodnych dystrybucyjnych?).
- Czy założenia twierdzenia 3 nie implikują, że $\omega$ jest stała?
- Czy *smooth fit property* w twierdzeniu 7 nie jest prostym wnioskiem z faktu, że $V_A^\omega \in D(\mathcal{A}), g \in C^1(\mathbb{R}^+)$?

$$V_A^\omega = g \text{ w } (l^*, u^*) \Rightarrow \frac{dV_A^\omega}{ds} = \frac{dg}{ds} \text{ w } (l^*, u^*) \Rightarrow \frac{dV_A^\omega}{ds} = \frac{dg}{ds} \text{ w } [l^*, u^*]$$

  (ostatnia implikacja wynika z faktu, że obie funkcje są $C^1$).
- Gdzie znajduje się dowód Lematu 6?
- Zgodnie z notacją w pracy $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Przy formułowaniu zbioru warunków (A) funkcje często mają dziedzinę $\mathbb{R}^+$ (albo pewne współrzędne funkcji maja taką dziedzinę). Ponieważ często wspomniane funkcje działają na $S$, to formalnie należy wyjaśnić dlaczego proces $S$ jest ściśle dodatni (po (2.7) sprawa jest jasna).

Klimsiak