

prof. dr hab. Jacek Jakubowski
profesor zwyczajny UW
Wydział Matematyki,
Informatyki i Mechaniki
Uniwersytetu Warszawskiego

Warszawa, 30.06.2023

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Jonasa Al-Hadad
p.t. „Perpetual American options with
asset-dependent discounting”

Mgr Jonas Al-Hadad w rozprawie doktorskiej zajął się badaniem nieskończonych opcji amerykańskich z dyskontowaniem zależnym od aktywa bazowego. Jest to inny problem od klasycznego problemu badania opcji amerykańskich, gdzie dyskontowanie jest poprzez wartość rachunku bankowego, a więc zależy od stopy procentowej. Gdy dyskonto jest stałe i równe stopie procentowej wolnej od ryzyka, to zagadnienie badane przez Autora sprowadza się do klasycznego przypadku wyceny opcji amerykańskiej ze stałym dyskontowaniem. Problem dyskontowania zależnego od aktywa bazowego rozpatrywany w rozprawie ma swoje uzasadnienia ekonomiczne.

W rozprawie mając daną przestrzeń probabilistyczną, proces cen S i funkcję dyskontującą ω rozpatrywany jest problem znalezienia funkcji wartości

$$V_A^\omega(s) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E\left(e^{-\int_0^\tau \omega(S_u) du} g(S_\tau)\right), \quad (1)$$

gdzie proces cen S jest dyfuzją ze skokami, choć większość otrzymanych wyników dotyczy węższej klasy procesów cen, a mianowicie spektralnie ujemnych wykładniczych procesów Lévy'ego, $S_0 = s$, \mathcal{T} jest rodziną czasów zatrzymania, g jest funkcją wypłaty, a wartość oczekiwana jest brana przy mierze martyngałowej. Podkreślmy jeszcze raz, że w tym problemie dyskonto silnie zależy od ceny aktywa bazowego i wyboru funkcji ω .

Z ogólniejszego punktu widzenia jest to problem optymalnego stopowania, a więc jest to problem należący do klasy problemów pojawiających się w

różnych dziedzinach matematyki. Takie postrzeganie daje szersze spojrzenie na przedstawione w rozprawie doktorskiej rezultaty.

W rozprawie autor bada szczegółowo jedną z najpopularniejszych opcji amerykańskich – amerykańską opcję sprzedaży. Celem jest znalezienie jawnych wzorów na funkcję wartości V_A^ω zadaną przez (1) dla funkcji wypłaty $g(x) = (K - x)^+$, gdzie K jest stałą dodatnią. Zostały znalezione wzory dla różnych charakterystyk procesów S i różnych funkcji dyskontujących ω . Rozwiązanie problemu wymagało od mgr. Jonasa Al-Hadad dużej biegłości technicznej, korzystania z zaawansowanych metod analitycznych i z różnych technik.

Praca składa się z czterech rozdziałów, konkluzji i wyczerpującego spisu literatury dotyczącej badanego zagadnienia.

Rozdział 1 jest wstępem przedstawiającym podstawowe informacje o rynkach finansowych, o teorii wyceny opcji, o spektralnie ujemnych wykładniczych procesach Lévy’ego i funkcjach skalujących związanych z nimi. W rozdziale pierwszym został także przedstawiony główny problem badań, motywacje autora i przegląd literatury dotyczącej tego typu kontraktów finansowych. Autor też dobrze opisał jakie szczególne przypadki obejmuje jego podejście.

Rozdział 2 zawiera główne wyniki rozprawy. Zaczyna się od uszczegółowienia założeń przy których zostały uzyskane wyniki. Proces cen S jest dyfuzją ze skokami spełniającą SDE z warunkami na współczynniki zapewniającymi istnienie jedynego silnego rozwiązania, które jest nieujemne. Te warunki spełnia np. wykładniczy proces Lévy’ego. Zakłada się, że funkcja wypłaty ma wzrost co najwyżej wielomianowy, a funkcja wartości jest skończona. Twierdzenie pierwsze mówi, że w ogólnym przypadku przy naturalnych założeniach na S , dla funkcji wypukłej g i funkcji wklęsłej ω funkcja wartości $V_A^\omega(\cdot)$ jest wypukła. Te naturalne założenia na S spełnia wykładniczy proces Lévy’ego. Od tego momentu rozprawy zakłada się, że proces cen S jest spektralnie ujemnym wykładniczym procesem Lévy’ego i funkcja wypłaty ma postać $g(x) = (K - x)^+$, zatem mamy do czynienia z amerykańską opcją sprzedaży. Dla tego przypadku Autor dowodzi, że optymalny czas zatrzymania (tzn. dający wartość V_A^ω) jest pierwszym momentem, w którym cena aktywa bazowego wpada w pewien dobrze określony odcinek. W głównym twierdzeniu pracy (Twierdzenie 3) przedstawiona jest jawna po-

stać funkcji wartości w języku funkcji skalujących przy pewnych ogólnych założeniach na funkcję dyskontującą ω . Następnie badane są dwa szczególne przypadki, a mianowicie gdy aktywo bazowe modelowane jest geometrycznym ruchem Browna oraz gdy modelowane jest wykładniczym procesem Lévy'ego z ujemnymi skokami wykładniczymi. W obu tych przypadkach otrzymuje się prostsze wyrażenia na jawną postać funkcji wartości. Dalej Autor dowodzi, że przy pewnych założeniach na funkcję $V_A^\omega(\cdot)$ jest ona jedynym rozwiązaniem równania Hamiltona-Jacobiego-Bellmana i wskazuje warunki wystarczające, aby warunek gładkości był spełniony. Ostatnie twierdzenie w tym rozdziale pokazuje związek funkcji wartości amerykańskiej opcji kupna i funkcji wartości amerykańskiej opcji sprzedaży.

Rozdział 3 zawiera przykłady wyliczeń funkcji wartości dla różnych modeli. W tym celu zostały wykorzystane wyniki teoretyczne z poprzedniego rozdziału i metody numeryczne. Dobrze zostały przedstawione użyte metody numeryczne. Wyliczenia zostały przeprowadzone dla modelu Backa-Scholesa z funkcją ω będącą przesunięciem funkcji homograficznej specjalnej postaci oraz dla wykładniczego procesu Lévy'ego z ujemnymi skokami dla różnych funkcji dyskontujących. Zostały przedstawione wykresy uzyskanych funkcji wartości.

W rozdziale 4 zostały zamieszczone dowody. Autor wykazuje dużą biegłość techniczną i umiejętność posługiwania się skomplikowanymi pojęciami technicznymi.

Mam drobne zastrzeżenia do prezentacji wyników. Parę przykładów:

- Autor oznacza proces S przez S_t , a to jest wartość procesu w chwili t , więc zmienna losowa. Lepiej by było używać S lub (S_t) lub $(S_t)_t$.
- Na str 28 w twierdzeniu jest odnośnik do wzoru z następnego rozdziału. Należało go tu napisać.
- W tw. 5 i 6 rozpatrywany jest proces dany przez (2.12) dla którego z założenia jest $\lambda > 0$ (by rozpatrywać zgodnie z założeniem proces o skokach w dół), a w twierdzeniach rozpatrywany jest przypadek $\lambda = 0$.
- W rozdziale 1 jest dobry przegląd literatury, ale w tekście też przydałyby się odnośniki do literatury.

Podsumowując uważam, że Autor wykazał się umiejętnością samodzielnego wykorzystania skomplikowanego aparatu technicznego używanego w

matematyce finansowej, bardzo dobrą orientacją w literaturze, a także umiejętnością stosowania metod numerycznych. Na końcu chcę podkreślić, że wszystkie drobne uwagi i zastrzeżenia nie wpływają na moją pozytywną ocenę recenzowanej pracy.

Konkluzja

Uważam, że przedstawiona rozprawa spełnia wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim. Praca zawiera dużo ciekawych wyników. Wnoszę o jej przyjęcie i dopuszczenie magistra Jonasa Al-Hadad do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

A handwritten signature in blue ink, reading "J. Jakubowski". The signature is written in a cursive style with a prominent initial "J".