# Autoreferat

## 1 Imię i nazwisko.

Karol Szczypkowski

## 2 Posiadane dyplomy, stopnie naukowe lub artystyczne – z podaniem podmiotu nadającego stopień, roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej.

2010 dyplom **magistra inżyniera matematyki**,
Instytut Matematyki i Informatyki
Wydział Podstawowych Problemów Techniki
Politechnika Wrocławska
Tytuł pracy: *Time-dependent gradient perturbations of transition densities of stable processes*
Promotor: dr hab. Tomasz Jakubowski, prof. PWr.

2014 dyplom **doktora nauk matematycznych**,
Instytut Matematyki i Informatyki
Wydział Podstawowych Problemów Techniki
Politechnika Wrocławska
Tytuł rozprawy: *Procesy stochastyczne z dryfem*
Promotor: prof. dr hab. Krzysztof Bogdan
Promotor pomocniczy: dr hab. Tomasz Jakubowski, prof. PWr

## 3 Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych lub artystycznych.

| | |
|---|---|
| 2010–2017 | Politechnika Wrocławska<br>Stanowisko: Asystent |
| od 2017 | Politechnika Wrocławska<br>Stanowisko: Adiunkt |
| 2014–2017 | Universität Bielefeld, Niemcy<br>Stanowisko: Postdoc |

# 4 Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 Ustawy.

**Osiągnięcie naukowe:**

Cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych o tytule:
***Niesymetryczne nielokalne operatory typu Lévy'ego.***

Lista publikacji składających się na osiągnięcie naukowe:

[H5] J. Minecki, K. Szczypkowski
Non-symmetric Lévy-type operators
*Math. Nachr.* DOI: 10.1002/mana.202300150

[H4] K. Szczypkowski
Fundamental solution for super-critical non-symmetric Lévy-type operators
*Adv. Differential Equations* 29 (5/6), 291–338, 2024.

[H3] T. Grzywny, K. Szczypkowski
Estimates of heat kernels of non-symmetric Lévy processes
*Forum Math.* 33 no. 5, 1207-1236, 2021.

[H2] T. Grzywny, K. Szczypkowski
Lévy processes: concentration function and heat kernel bounds
*Bernoulli* 26(4), 3191-3223, 2020.

[H1] T. Grzywny, K. Szczypkowski
Heat kernels of non-symmetric Levy-type operators
*J. Differential Equations* 267 (10), 2019.

## 4.1 Wstęp

Matematyka odgrywa bardzo ważną rolę w opisywaniu rozmaitych zjawisk fizycznych, biologicznych, ekonomicznych oraz społecznych. Dostarcza ona precyzyjnego języka, często łączącego analizę z probabilistykę, w którym pojawiają się pojęcia takie jak proces stochastyczny, generator infinitezymalny, półgrupa oraz gęstość przejścia (jądro ciepła). Proces stochastyczny reprezentuje poszczególne realizacje zjawiska na pewnej przestrzeni probabilistycznej, podczas gdy generator służy jako narzędzie analityczne, opisujące średnie zmiany w nieskończenie małych przedziałach czasu. Półgrupa ma za zadanie uchwycić ogólne, uśrednione zachowanie procesu, natomiast jądro ciepła oferuje bardziej szczegółowy niż półgrupa wgląd w proces. Związek między generatorem a jądrem ciepła polega na tym, że to ostatnie jest (w odpowiednim sensie) rozwiązaniem fundamentalnym równania ciepła (parabolicznego równania różniczkowego cząstkowego) opartego na tym generatorze.

Przykładem wartym uwagi jest tu proces Wienera (znany również jako ruch Browna), który przedstawia ciągły ruch cząsteczki. Jest on generowany przez operator Laplace'a, a odpowiadająca mu półgrupa dana jest jawnie przez jądro Gaussa-Weierstrassa, które jest rozwiązaniem fundamentalnym klasycznego równania ciepła $\partial_t u = \Delta u$. Ten model sięga początków XX wieku i jest związany z takimi nazwiskami jak L. Bachelier, A. Einstein i M. Smoluchowski.

Zarówno w ubiegłym wieku, jak i w ostatnich latach wiele wysiłku włożono we wprowadzanie i próby zrozumienia różnorodnych uogólnień powyższego modelu. Ponieważ mogą być one realizowane w wielu kierunkach, motywacją do wybranego przez nas podejścia będzie twierdzenie Courrège'a-Waldenfels'a, które mówi, że generator infinitezymalny półgrupy fellerowskiej z dostatecznie bogatą dziedziną jest operatorem typu Lévy'ego, patrz [8, Theorem 2.21], [30, Theorem 4.5.21]. Jednakże konstrukcja półgrupy na podstawie danego operatora typu Lévy'ego ze współczynnikami, które nie są stałe, jest wymagającym zadaniem, a zbadanie jej jądra ciepła jeszcze trudniejszym, patrz [8, Chapter 3]. Operator $\mathscr{L}$ nazywany operatorem typu Lévy'ego, jeśli jest określony na funkcjach gładkich o zwartym nośniku i dany jest dla nich następującym wzorem:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}f(x) = c(x)f(x) + b(x)\cdot\nabla f(x) + \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \\
+ \int_{\mathbb{R}^d} \Big( f(x+z) - f(x) - \mathbb{1}_{|z|<1} \left\langle z, \nabla f(x)\right\rangle \Big) N(x,dz)\,.
\end{aligned}
$$

$c(x)$, $b(x)$, $a_{ij}(x)$ są pewnymi funkcjami, a $N(x,dz)$ jest miarą intensywności. Później będziemy je nazywać współczynnikami. Muszą one spełniać pewne naturalne warunki. Ponadto $(A,N,b)$ z macierzą $A=[a_{ij}]$ będziemy nazywać trójką generującą. Współczynniki modelują zachowanie cząstki w punkcie $x$. Na przykład wektor $b(x)$ definiuje dryf, podczas gdy $N(x,B)$ jest intensywnością skoków z $x$ do zbioru $x+B\subset\mathbb{R}^d$. Powiemy, że współczynniki są stałe, jeśli $c(x)\equiv c$, $b(x)\equiv b$, $a_{ij}(x)\equiv a_{ij}$ i $N(x,dz)\equiv N(dz)$.

Naszym celem jest wyznaczenie warunków nakładanych na współczynniki operatora, które wystarczą do tego, aby miał on rozszerzenie do generatora półgrupy fellerowskiej. Ponadto warunki te powinny umożliwić analizę odpowiadającego mu jądra ciepła. Główną uwagę skupimy na części *nielokalnej* (całkowej) operatora, równocześnie dbając o to, aby klasa rozważanych operatorów była dostatecznie bogata. W naszych badaniach termin *niesymetryczny* odnosi się do faktu, że ze względu na strukturę rozważanych przez nas operatorów, niezależnie od symetrii lub braku symetrii miary $N(x,dz)$ dla ustalonego $x$, mogą one nie mieć rozszerzeń samosprzężonych. Dlatego podejście oparte o formy Dirichleta [23] nie ma tutaj zastosowania. Jednocześnie zwracamy szczególną uwagę na to, w jaki sposób brak symetrii miary $N(x,dz)$ wpływa na nasze wyniki, ponieważ zazwyczaj powoduje on dodatkowe trudności. Zauważamy również, że istnieją metody oparte o rachunek symboliczny, ale zazwyczaj wymagają one dużej regularności współczynników [29]. Jest to ograniczenie, którego nie chcemy wprowadzać.

Nasz plan działania jest następujący. Najpierw badamy operatory Lévy'ego, czyli te o stałych współczynnikach. Ten krok można uznać za odrębny temat z własną motywacją, tłem historycznym oraz obszerną literaturą i jako taki jest tematem prac [H2] i [H3]. Uzyskane wyniki wykraczają znacznie poza funkcje pomocnicze służące do osiągnięcia głównego celu. W pracy [H2], dla ogólnych operatorów Lévy'ego, przeprowadzona jest dogłębna analiza w celu zrozumienia roli następującego oszacowania na głównej przekątnej:

$$
\sup_{x\in\mathbb{R}^d} p(t,x) \leqslant c\left[h^{-1}(1/t)\right]^{-d},
$$

gdzie $h$ jest funkcją koncentracji (nazywana także funkcją Pruitta), wraz z jego konsekwencjami dla dość delikatnych dolnych oszacowań $p(t,x)$. Dokładniej, dotyczą one dolnych oszacowań $p(t,x+\Theta)$ na przekątnej lub w jej pobliżu, gdzie $\Theta\in\mathbb{R}^d$ jest pewnym przesunięciem.

Zagadnienie to jest dalej badane w kontekście dynamicznego rozkładu procesu poprzez procedurę wycinania części małych skoków, która przy odpowiednich dodatkowych założeniach może prowadzić do precyzyjnej lokalizacji $\Theta$. Następnie w pracy [H3] skupiamy się głównie na czysto nielokalnym przypadku ($a_{ij} = 0$) i rozważamy, między innymi, bardzo niesymetryczne miary $N(dz)$ pod kątem dolnych i górnych oszacowań jądra ciepła poza przekątną.

Przypadek jednowymiarowy jest szczególny z uwagi na prostszą geometrię, co pozwala uwzględniać miary $N(dz)$, charakteryzujące się całkowicie różnym zachowaniem na ujemnej i dodatniej półprostej. Pośród wyników obejmujących dowolne wymiary znajduje się następujące górne oszacowanie jądra ciepła i jego pochodnych:

$$|\partial_x^{\beta} p(t, x + tb_{[h^{-1}(1/t)]})| \leqslant c \left[h^{-1}(1/t)\right]^{-|\beta|} \Upsilon_t(x) ,$$

które jest prawdziwe, gdy $N(dz)$ jest porównywalna z izotropową miarą unimodalną $\nu(z)dz$ oraz jest spełniony pewien *warunek słabego dolnego skalowania*. Te nierówności stanowią podstawę do analizy operatorów o zmiennych współczynnikach. Tutaj $\Upsilon_t$ jest tzw. *funkcją ograniczającą*, wyrażoną jawnie przez $h$ oraz jej wariant oznaczany przez $K$, natomiast $b_r$ jest pewnym wektorem w $\mathbb{R}^d$. Typowym przykładem $\nu$ jest tutaj izotropowa $\alpha$-stabilna miara Lévy'ego, tj. $\nu(z) = c_{d,\alpha}|z|^{-d-\alpha}$, gdzie $\alpha \in (0, 2)$. W tym przypadku

$$|\partial_x^{\beta} p(t, x + tb_{[h^{-1}(1/t)]})| \leqslant ct^{-|\beta|/\alpha} \min\left\{t^{-d/\alpha}, \frac{t}{|x|^{d+\alpha}}\right\}.$$

Po początkowej fazie, w pracach [H1], [H4] i [H5] analizowane jest obiecujące, choć technicznie wymagające podejście oparte na tzw. *metodzie parametrysy (Levi'ego)*, dostosowanej do pojawiających się przeszkód i wykorzystanej do badania operatorów o zmiennych współczynnikach. Dokładniej, rozważamy operatory postaci:

$$\mathcal{L}^{\kappa} f(x) := \int_{\mathbb{R}^d} (f(x+z) - f(x) - \mathbb{1}_{|z|<1} \langle z, \nabla f(x)\rangle)\kappa(x,z)J(z)\, dz , \tag{1}$$

$$\mathcal{L}^{\kappa} f(x) := \int_{\mathbb{R}^d} (f(x+z) - f(x))\kappa(x,z)J(z)\, dz , \tag{2}$$

$$\mathcal{L}^{\kappa} f(x) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} (f(x+z) + f(x-z) - 2f(x))\kappa(x,z)J(z)\, dz . \tag{3}$$

Będziemy zawsze zakładać, że $\kappa(x, z)$ jest ściśle dodatnia, ograniczona i hölderowsko ciągła względem $x$, podczas gdy $J(z)dz$ jest porównywalna z izotropową, unimodalną miarą $\nu(z)dz$ i warunek słabego dolnego skalowania jest spełniony. Dodatkowe ograniczenia mogą się pojawić w zależności od dokładnego kontekstu. Mimo to klasa rozważanych operatorów będzie szeroka i znacząco powiększy niektóre klasy omawiane wcześniej w literaturze, na przykład w [10, 32, 36]. Z uwagi na duże zainteresowanie tematem operatorów o zmiennych współczynnikach, istnieje wiele ciekawych wyników, które obejmują inne klasy operatorów, także w kontekście stochastycznych równań różniczkowych. Niektóre z nich mają niepuste przecięcia z omawianymi tutaj. Dla przykładu wymienimy kilka takich artykułów: [7, 12, 35, 39, 41, 47, 48, 50, 51, 54]. W pracach [H1], [H4] i [H5] poruszane są następujące kwestie: istnienie i jednoznaczność (słabego lub punktowego) rozwiązania fundamentalnego $p^{\kappa}(t, x, y)$ równania

$$\partial_t u(t, x) = \mathcal{L}_x^{\kappa} u(t, x) ,$$

jego oszacowania, regularność (patrz także [59]) oraz inne własności jakościowe, a także własności odpowiadających mu półgrup i ich generatorów w różnych przestrzeniach funkcji. W pracy [H5] proponujemy także ogólne funkcjonalno-analityczne podejście do metody Levi'ego, aby ułatwić przyszłe zastosowania tej techniki.

Biorąc pod uwagę twierdzenie Courrège'a-Waldenfelsa, głównym obiektem naszych zainteresowań jest operator (1). Jeśli miara jest symetryczna, tj. $\kappa(x,z) = \kappa(x,-z)$ i $J(z) = J(-z)$, może on być wyrażony jako (3), co pozwala usunąć składnik pierwszego rzędu z $f$ i ułatwia sytuację. Operator (2) rozważamy przy założeniach, które gwarantują, że $\int_{|z|<1} |z|\kappa(x,z)J(z)dz < \infty$, więc (1) i (2) różnią się operatorem pierwszego rzędu $(\int_{|z|<1} z\kappa(x,z)J(z), dz) \cdot \nabla f(x)$, znanym jako *kompensator*, por. (4) z $r = 0$.

Na koniec omówimy naiwne podejście, które jako pierwsze przychodziłoby do głowy, czyli zapisanie operatora $\mathcal{L}^\kappa$ w (1) następująco:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^\kappa f(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} (f(x+z) - f(x) - \mathbb{1}_{|z|<1} \langle z, \nabla f(x) \rangle) \varepsilon J(z)\, dz \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^d} (f(x+z) - f(x) - \mathbb{1}_{|z|<1} \langle z, \nabla f(x) \rangle) \Big[\kappa(x,z) - \varepsilon\Big] J(z)\, dz \\
&= \varepsilon \cdot \mathcal{L} f(x) + \mathcal{L}^{\kappa-\varepsilon} f(x)\,,
\end{aligned}
$$

gdzie $\mathcal{L}$ jest operatorem o stałych współczynnikach. Stąd $\mathcal{L}^\kappa$ może być traktowany jako zaburzenie $\mathcal{L}$. Jednakże $\mathcal{L}^{\kappa-\varepsilon}$ nie może być uznany za *małą* perturbację $\mathcal{L}$, ponieważ zazwyczaj są one tego samego (różniczkowego) rzędu.

Inny rozkład operatora (1) będzie przydatny podczas radzenia sobie z brakiem symetrii, zwłaszcza w [H4] i [H5], dla $r > 0$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^\kappa f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} &\Big( f(x+z) - f(x) - \mathbb{1}_{|z|<r} \langle z, \nabla f(x) \rangle \Big) \kappa(x,z) J(z)\, dz \\
&+ \left( \int_{\mathbb{R}^d} z \left( \mathbb{1}_{|z|<r} - \mathbb{1}_{|z|<1} \right) \kappa(x,z) J(z)\, dz \right) \cdot \nabla f(x)\,,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

co interpretujemy jako rozbicie na *wiodącą część nielokalną* oraz *część wewnątrz dryfową* o współczynniku

$$
\zeta_r^x = \int_{\mathbb{R}^d} z \left( \mathbb{1}_{|z|<r} - \mathbb{1}_{|z|<1} \right) \kappa(x,z) J(z)\, dz\,, \qquad r > 0\,. \tag{5}
$$

W związku z powyższym artykuły [H1]-[H5] stanowią spójny i znaczący wkład w teorię niesymetrycznych operatorów typu Lévy'ego. Bardziej szczegółowa dyskusja na temat wyników jest przeprowadzona w podrozdziałach Rozdziałów 4.2 i 4.3.

## 4.2 Operatory Lévy'ego

Procesy Lévy'ego stanowią bogatą klasę modeli stochastyczych, które są szeroko stosowane i w wielu aspektach dobrze zbadane [1, 57]. Wyniki prac [H2], [H3] posłużą naszym celom związanym z operatorami o zmiennych współczynnikach, ale są także niezależnie ważne dla teorii procesów Lévy'ego. Niech $d \in \mathbb{N}$ oraz $Y = (Y_t)_{t\geqslant 0}$ będzie procesem Lévy'ego w $\mathbb{R}^d$. Przypomnijmy, że istnieje jednoznaczne przyporządkowanie między procesami Lévy'ego w $\mathbb{R}^d$ a słabo ciągłymi półgrupami splotowymi miar prawdopodobieństwa $(P_t)_{t\geqslant 0}$ na $\mathbb{R}^d$. Splotowa struktura pozwala na wykorzystanie transformaty Fouriera do badania $Y$. Formuła Lévy'ego-Chińczyna mówi, że wykładnik charakterystyczny $\Psi$ dla $Y$, zdefiniowany przez

$$
\mathbb{E} e^{i\langle x, Y_t\rangle} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,y\rangle} P_t(dy) = e^{-t\Psi(x)}\,, \qquad x \in \mathbb{R}^d\,,
$$

jest równy

$$\Psi(x) = \langle x, Ax \rangle - i \langle x, b \rangle - \int_{\mathbb{R}^d} \left( e^{i\langle x,z \rangle} - 1 - i \langle x, z \rangle \mathbb{1}_{|z|<1} \right) N(dz) \,,$$

gdzie $A$ jest symetryczną, nieujemnie określoną macierzą, $b \in \mathbb{R}^d$, a $N(dz)$ jest miarą Lévy'ego, tzn. miarą spełniającą

$$N(\{0\}) = 0 \,, \qquad \int_{\mathbb{R}^d} (1 \wedge |z|^2) N(dz) < \infty \,.$$

Generatorem procesu Lévy'ego jest operator typu Lévy'ego o stałych współczynnikach, gdzie $c \equiv 0$, $A = [a_{ij}]$ oraz $b$ i $N$ są jak wyżej. Skupimy się na istnieniu i oszacowaniach jądra ciepła, tzn. pochodnej Radona-Nikodyma dla $P_t(dx)$. W tym celu, dla $r > 0$, wykorzystamy

$$h(r) = r^{-2}\|A\| + \int_{\mathbb{R}^d} \left( 1 \wedge \frac{|x|^2}{r^2} \right) N(dx)$$

oraz

$$K(r) = r^{-2}\|A\| + r^{-2} \int_{|x|<r} |x|^2 N(dx) \,.$$

Funkcja $h$ nazywana jest *funkcją koncentracji*. Zauważmy, że $|e^{-t\Psi(x)}| = e^{-t\mathrm{Re}[\Psi(x)]}$, zatem jeśli $e^{-t\Psi(x)}$ jest bezwzględnie całkowalna, to możemy użyć odwrotnej transformaty Fouriera, by wyrazić gęstość przejścia następująco:

$$p(t,x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x,z \rangle} e^{-t\Psi(z)} \, dz \,.$$

Część rzeczywista $\Psi$ to $\mathrm{Re}[\Psi(x)] = \langle x, Ax \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} \Big( 1 - \cos \langle x, z \rangle \Big) N(dz)$. Rozważmy jej ciągłą, radialną i niemalejącą majorantę

$$\Psi^*(r) = \sup_{|z| \leqslant r} \mathrm{Re}[\Psi(z)], \qquad r > 0 \,.$$

Wiadomo, że (patrz [25, Lemma 4])

$$\frac{1}{8(1+2d)} h(1/r) \leqslant \Psi^*(r) \leqslant 2h(1/r) \,.$$

Zatem $h$ można uważać za prostszą wersję $\Psi^*$. W naszych rozważaniach będziemy używali również *efektywnego dryfu*, który jest sumą dryfu zewnętrznego i wewnętrznego, por. z (5),

$$b_r = b + \int_{\mathbb{R}^d} z \left( \mathbb{1}_{|z|<r} - \mathbb{1}_{|z|<1} \right) N(dz) \,.$$

W całym rozdziale zakładamy, że $h(0^+) = \infty$.

### 4.2.1 Artykuł [H2]

Przypomnijmy następujący fakt dotyczący średniego czasu wyjścia z kuli o promieniu $r > 0$ przez scentrowany proces Lévy'ego (patrz [56]): istnieje stała $c > 0$, która zależy tylko od wymiaru $d$ i taka, że

$$c^{-1}/h(r) \leqslant \mathbb{E}[S(r)] \leqslant c/h(r) \,, \qquad r > 0 \,,$$

gdzie $S(r) = \inf\{t\colon |Y_t - tb_r| > r\}$. Zatem $h$ wykrywa szybkość rozprzestrzeniania się procesu w przestrzeni. Zauważmy także, że gęstości przejścia procesu Wienera i izotropowych procesów $\alpha$-stabilnych [9] spełniają

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} p(t,x) \leqslant c[h^{-1}(1/t)]^{-d}\,, \tag{6}$$

co oznacza kontrolę jądra ciepła przez $h$.

Prawdziwość nierówności (6) dla danego procesu Lévy'ego jest głównym tematem naszych badań. W tym kontekście sukcesywnie wskazujemy kolejne równoważne opisy (6), które są wyrażone poprzez warunki dotyczące gęstości przejścia $p$, wykładnika charakterystycznego $\Psi$ oraz funkcji $\Psi^*$, $h$ i $K$. Wiele z tych opisów pochodzi z literatury, gdzie stanowią punkt wyjścia do dalszych badań konkretnych podklas procesów Lévy'ego. Dlatego też uzyskane przez nas równoważności nie tylko ułatwiają zrozumienie (6), ale także wyjaśniają istniejące wyniki oraz umożliwiają znaczne ograniczenie założeń, patrz [33, 34, 37, 60].

Choć oba wspomniane powyższej przykłady są rotacyjnie niezmienniczymi (stąd symetrycznymi), unimodalnymi procesami Lévy'ego, to ani rotacyjna niezmienniczość (ani też symetria), ani unimodalność nie są konieczne dla (6). Wiadomo także, że nie są one wystarczające. Takie procesy można znaleźć w [26]. Innym bezpośrednim przykładem może być proces $Y_t = (X_t^{\alpha_1}, X_t^{\alpha_2}, X_t^{\alpha_3})$ w $\mathbb{R}^3$, gdzie $X^{\alpha_1}$, $X^{\alpha_2}$, $X^{\alpha_3}$ są niezależnymi, jednowymiarowymi i symetrycznymi procesami stabilnymi z $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < 2$.

Równoważne warunki

Rozważmy osiem warunków (C1) – (C8), które są powszechne w literaturze: dla (C2) oraz (C5) patrz [33, 58, 60], dla (C3) zobacz [4], a dla (C4) i (C7) patrz [37, 38]. Kolejno w Proposition 3.6, Corollary 3.8, Corollary 3.9, Lemma 3.11 artykułu [H2] dowodzimy, że następujące warunki są równoważne:

(C1) Gęstość $p(t,x)$ zmiennej $Y_t$ istnieje oraz są takie stałe $T_1 \in (0,\infty]$, $c_1 > 0$, że dla wszystkich $t < T_1$
$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} p(t,x) \leqslant c_1 \left[h^{-1}(1/t)\right]^{-d}.$$

(C2) Istnieją $T_2 \in (0,\infty]$, $c_2 > 0$ takie, że dla wszystkich $t < T_2$
$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-t\,\mathrm{Re}[\Psi(z)]} dz \leqslant c_2 \left[h^{-1}(1/t)\right]^{-d}.$$

(C3) Istnieją $T_3 \in (0,\infty]$, $c_3 \in (0,1]$ oraz $\alpha_3 \in (0,2]$ takie, że dla wszystkich $|x| > 1/T_3$
$$c_3\,\Psi^*(|x|) \leqslant \mathrm{Re}[\Psi(x)] \qquad \text{oraz} \qquad \Psi^*(\lambda r) \geqslant c_3 \lambda^{\alpha_3} \Psi^*(r)\,, \quad \lambda \geqslant 1,\ r > 1/T_3\,.$$

(C4) Istnieją $T_4 \in (0,\infty]$, $c_4 \in [1,\infty)$ takie, że dla wszystkich $|x| > 1/T_4$
$$\Psi^*(|x|) \leqslant c_4 \left( \langle x, Ax\rangle + \int_{|\langle x,z\rangle|<1} |\langle x,z\rangle|^2 N(dz) \right).$$

(C5) Istnieje $T_5 \in (0,\infty]$ takie, że dla pewnego (każdego) $m \in \mathbb{N}$ jest taka stała $c_5 > 0$, że dla wszystkich $t < T_5$
$$\int_{\mathbb{R}^d} |z|^m e^{-t\,\mathrm{Re}[\Psi(z)]}\, dz \leqslant c_5 \left[h^{-1}(1/t)\right]^{-d-m}.$$

(C6) Gęstość $p(t,x)$ zmiennej $Y_t$ istnieje oraz są takie stałe $T_6 \in (0,\infty]$, $c_6 \in [1,\infty)$, że dla każdego $t < T_6$ istnieje $|x_t| \leqslant c_6 h^{-1}(1/t)$, że dla każdego $|y| \leqslant (1/c_6)h^{-1}(1/t)$

$$p(t, y + x_t + tb_{[h^{-1}(1/t)]}) \geqslant (1/c_6) \sup_{x\in\mathbb{R}^d} p(t,x)\,.$$

(C7) Gęstość $p(t,x)$ zmiennej $Y_t$ istnieje oraz są takie stałe $T_7 \in (0,\infty]$, $c_7 \in [1,\infty)$, że dla wszystkich $t < T_7$

$$c_7^{-1}\left[h^{-1}(1/t)\right]^{-d} \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^d} p(t,x) \leqslant c_7\left[h^{-1}(1/t)\right]^{-d}\,.$$

(C8) Istnieją $T_8 \in (0,\infty]$, $c_8 \in [1,\infty)$ oraz $\alpha_8 \in (0,2]$ takie, że dla każdego rzutu $\Pi_1$ na jednowymiarową podprzestrzeń $\mathbb{R}^d$ mamy

$$h(r) \leqslant c_8\, h_1(r) \qquad \text{oraz} \qquad h(r) \leqslant c_8\, \lambda^{\alpha_8} h(\lambda r)\,, \quad \lambda \leqslant 1,\, r < T_8\,,$$

gdzie $h_1$ odpowiada zrzutowanemu procesowi Lévy'ego $\Pi_1 Y$.

W wynikach bądź w dowodach podajemy bezpośrednią zależność między parametrami w powyższych warunkach. (C1) to oczywiście to samo co (6). Zauważmy, że (C5) jest rozszerzeniem (C2), co oznacza, że kontrola jądra ciepła zapewnia oszacowania dla wszystkich jego pochodnych przestrzennych. Warunek (C8) jest formalizacją następującego opisu (6):

*Proces Lévy'ego w $\mathbb{R}^d$ ma gęstość przejścia $p(t,x)$ spełniającą (6) dla wszystkich $t \in (0,1]$ i pewnej stałej $c > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy jego średnie rozprzestrzenianie się określone przez $h(r)$ spełnia pewien warunek słabego skalowania w zerze oraz każdy rzut procesu na jednowymiarową podprzestrzeń $\mathbb{R}^d$ lokalnie rozprzestrzenia się w ten sam sposób co oryginalny proces, ponadto ta porównywalność powinna być jednostajna względem wyboru rzutu.*

Ponadto (C6) i (C7) zawierają informacje o dolnym oszacowaniu jądra ciepła. W [H2, Lemma 3.7] pokazujemy, że następująca własność wynika z (C1) − (C8):

(Im) Gęstość $p(t,x)$ zmiennej $Y_t$ istnieje oraz są takie stałe $T \in (0,\infty]$, $c \in [1,\infty)$, że dla każdego $t < T$ istnieje $|x_t| \leqslant ch^{-1}(1/t)$, że dla wszystkich $|y| \leqslant (1/c)h^{-1}(1/t)$

$$p(t, y + x_t + tb_{[h^{-1}(1/t)]}) \geqslant (1/c)\left[h^{-1}(1/t)\right]^{-d}\,.$$

Jednakże takie dolne oszacowania nadal nie są wystarczające dla niektórych zastosowań, ponieważ wartość $c$ może być duża i trudno kontrolować enigmatyczne przesunięcia $x_t$. By móc poprawić ten wynik, będziemy korzystać z pewnego szczególnego rozkładu procesu.

Zanim przejdziemy dalej, zauważmy, że jeśli $d = 1$ lub jeśli proces jest rotacyjnie niezmienniczy, to warunki (C1) − (C8) znacznie się upraszczają, patrz [H2, Remark 3.2 i 3.3]. W rzeczywistości potrzebujemy mniej niż niezmienniczności.

**Lemat 1** (Lemma 3.5 w [H2])**.** *Jeśli $A = 0$, $N(dz) \approx N_0(dz)$ oraz $b \in \mathbb{R}^d$, gdzie $N_0$ jest rotacyjnie niezmiennicza, to* (C1) − (C8) *są równoważne istnieniu $\alpha_h \in (0,2]$, $C_h \in [1,\infty)$ oraz $\theta_h \in (0,\infty]$ takich, że prawdziwy jest następujący warunek:*

(A1) *Dla wszystkich $\lambda \leqslant 1$ oraz $r < \theta_h$*

$$h(r) \leqslant C_h \lambda^{\alpha_h} h(\lambda r)\,.$$

*Ponadto $T_3 = \theta_h$ oraz $\alpha_3 = \alpha_h$.*

Więcej równoważnych z (A1) warunków można znaleźć w [H2, Lemma 2.3]. Na przykład jednym z nich jest

(A4) Istnieje stała $c > 0$ taka, że dla wszystkich $r < \theta_h$

$$h(r) \leqslant cK(r)\,.$$

W rozdziale 3.2 pracy [H2] rozważamy podobne równoważności dla warunków (D1)$-$(D4), gdzie $t \in (T, \infty)$ dla pewnego $T > 0$.

Rozbicie procesu

Niech $Y$ będzie procesem Lévy'ego w $\mathbb{R}^d$ o trójce generującej $(0, N, b)$ i załóżmy, że warunek (C3) zachodzi. Naszym celem jest rozłożenie procesu $Y$ na procesy $Z^{1.\lambda}$ i $Z^{2.\lambda}$ w taki sposób, aby można było je wykorzystać do badania gęstości. Pomysł ten jest częściowo zaczerpnięty z [55]. Wprowadźmy pomocniczą miarę Lévy'ego $\nu$, która dla pewnego $a_1 \in (0, 1]$ spełnia

$$a_1\, \nu(dx) \leqslant N(dx)$$

oraz dla pewnego $a_2 \in [1, \infty)$ i wszystkich $|x| > 1/T_3$

$$\mathrm{Re}[\Psi(x)] \leqslant a_2\, \mathrm{Re}[\Psi_\nu(x)]\,.$$

Tutaj $\Psi_\nu$ odpowiada procesowi o trójce $(0, \nu, 0)$. Podobnie piszemy $h_\nu$. Dla $\lambda > 0$ rozważmy następujące miary Lévy'ego:

$$N_{1.\lambda}(dx) := N(dx) - \frac{a_1}{2}\nu|_{B_\lambda}(dx)\,, \qquad N_{2.\lambda}(dx) := \frac{a_1}{2}\nu|_{B_\lambda}(dx)\,.$$

Niech $Z^{1.\lambda}$ oraz $Z^{2.\lambda}$ będą procesami Lévy'ego odpowiednio o trójkach $(0, N_{1.\lambda}, b)$ i $(0, N_{2.\lambda}, 0)$. Analogicznie piszemy $\Psi_{1.\lambda}$, $h_{1.\lambda}$, $p_{1.\lambda}$, $b_r^{1.\lambda}$ oraz $\Psi_{2.\lambda}$, $h_{2.\lambda}$, $p_{2.\lambda}$, $b_r^{2.\lambda}$. Po kilku lematach opisujących $Z^{1.\lambda}$ oraz $Z^{2.\lambda}$ zostają one połączone, by uzyskać oszacowania jądra ciepła procesu $Y$. W celu sformułowania tego wyniku, dla danych $T \in (0, \infty]$, $a, r > 0$, rozważamy rodzinę nieskończenie podzielnych miar probabilistycznych

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(T, a, r) := \{\mu\colon \mu \text{ jest rozkładem } (Z_t^{2.\lambda} - tb_\lambda^{2.\lambda})/\lambda + y \text{ dla}\\ \text{pewnej } \lambda := a\, h_\nu^{-1}(1/t) < T \text{ i pewnego } |y| \leqslant r\}\,.\end{aligned}$$

**Twierdzenie 2** (Proposition 4.4 w [H2])**.** *Niech $a_0$, $c_{p_1}$ oraz $\lambda$ będą jak w [H2, Lemma 4.2]. Ustalmy $\theta_1, \theta_2 > 0$ oraz $r_0 = 1 + \theta_1 + \theta_2$. Dla wszystkich $t < 1/h_\nu(T_3/a_0)$ oraz $|x| \leqslant \theta_1 h_\nu^{-1}(1/t)$*

$$p(t, x + \Theta_t) \geqslant 1/(4\omega_d)\left[a_0 h_\nu^{-1}(1/t)\right]^{-d} \inf_{\mu \in \mathcal{X}(T_3, a_0, r_0)} \mu(B_{c_{p_1}})\,,$$

*jeśli tylko $\Theta_t \in \mathbb{R}^d$ spełnia $|tb_\lambda - \Theta_t| \leqslant \theta_2 \lambda$ dla $\lambda < T_3$.*

Porównując z (Im), Twierdzenie 2 sugeruje jawne przesunięcie w przestrzeni i daje możliwość jego wyboru w pewnej klasie. Z drugiej strony, wciąż pozostawia kluczowe pytanie o dodatniość $\inf_{\mu \in \mathcal{X}(T_3, a_0, r_0)} \mu(B_{c_{p_1}})$ bez odpowiedzi. Rodzina $\mathcal{X}$ jest dalej badana w kilku ostatnich lematach rozdziału 4 pracy [H2], a do pytania o dodatniość wracamy w rozdziale 5.

Oszacowania dolne

W rozdziale 5 pracy [H2] prezentujemy dwa główne rezultaty, które dotyczą dolnych oszacowań jądra ciepła, a ich dowody wykorzystują Twierdzenie 2. Są to [H2, Theorem 5.2 i 5.3]. W [H2, Theorem 5.3] wymagamy, aby warunek (C3) był spełniony z $\alpha_3 \geqslant 1$. Poniżej formułujemy wynik [H2, Theorem 5.2], który wykorzystuje symetryczną miarę Lévy'ego $\nu_s(dx)$. Założenia i teza są wyrażone za pomocą $\Psi_s$ i $h_s$, które odpowiadają trójce $(0, \nu_s, 0)$. Rezultat ten rozszerza częściowo [33, Theorem 2] oraz, w naszym kontekście, poprawia [38, Theorem 2.3], [37, Theorem 1]. Podkreślmy, że miara $N(dx)$ w Twierdzeniu 3 nie musi być symetryczna.

**Twierdzenie 3** (Theorem 5.2 w [H2])**.** *Załóżmy, że* (C3) *zachodzi oraz $A = 0$. Przypuśćmy, że istnieją $a_1 \in (0, 1]$ takie, że*

$$a_1\, \nu_s(dx) \leqslant N(dx)$$

*oraz $a_2 \in [1, \infty)$ takie, że dla każdego $|x| > 1/T_3$*

$$\mathrm{Re}[\Psi(x)] \leqslant a_2\, \mathrm{Re}[\Psi_s(x)]\,.$$

*Wtedy dla dowolnych $T, \theta > 0$ istnieje taka stała $\tilde{c} = \tilde{c}(d, \alpha_3, c_3, T_3, a_1, a_2, \nu_s, T, \theta) > 0$, że dla wszystkich $0 < t < T$ oraz $|x| \leqslant \theta h_s^{-1}(1/t)$*

$$p(t, x + tb_{[h_s^{-1}(1/t)]}) \geqslant \tilde{c}\left[h_s^{-1}(1/t)\right]^{-d}\,.$$

*Jeśli $T_3 = \infty$, to możemy wziąć $T = \infty$ z $\tilde{c} > 0$.*

### 4.2.2 Artykuł [H3]

W tym artykule również badamy jądra ciepła i skupiamy się na górnych i dolnych oszacowaniach poza przekątną. Oszacowania górne uzyskujemy przy założeniach dotyczących górnych ograniczeń na miarę $N(dx)$. W [H3, Theorem 2.1] rozpatrujemy przypadek $d$-wymiarowy, gdzie poprawiamy [33, Theorem 3] uwzględniając wyniki z [H2] i śledząc stałe, co nie zostało jasno przedstawione w [33]. Przypadek jednowymiarowy jest rozważany w rozdziale 3 pracy [H3], gdzie, na przykład w [H3, Proposition 3.1 i Theorem 3.3], założenia stawiane są tylko na zachowanie miary Lévy'ego na dodatniej półprostej. Takie podejście pozwala na badanie $N(dx)$, które mają różne własności na półprostej dodatniej i ujemnej. Rozdział 4 w [H3] poświęcony jest oszacowaniom dolnym, gdzie jako założenia wykorzystujemy podobne ograniczenia na miarę $N(dx)$. W $\mathbb{R}^d$ mają one postać $N(dx) \geqslant f(|x|)dx$ dla $|x| > r_0$, a w $\mathbb{R}$ stosujemy wersję jednostronną $N(dx) \geqslant f_+(x)dx$ dla $x > r_0$. Stopniowo dodajemy kolejne założenia, aby poprawić jakość dolnych oszacowań, gdzie – jak poprzednio – mamy do czynienia z ogólnie nieznanymi przesunięciami. Na przykład w [H3, Proposition 4.4] zakładamy (C3) a w dowodzie istotnie korzystamy z (Im). W końcu w [H3, Theorem 4.6 i 4.7] założenia mają podobną formę do tych z [H2, Theorem 5.2 i 5.3], gdzie prowadziły do dolnych oszacowań na przekątnej lub w jej pobliżu. W dowodzie [H3, Theorem 4.6] wykorzystujemy [H2, Theorem 5.2], czyli Twierdzenia 3, jako jeden z kluczowych składników. To samo dotyczy [H3, Theorem 4.7] i [H2, Theorem 5.3].

**Twierdzenie 4** (Theorem 4.6 w [H3])**.** *Załóżmy, że* (C3) *zachodzi, $A = 0$ oraz miara Lévy'ego $N(dx)$ spełnia*

$$N(dx) \geqslant f(|x|)dx\,,$$

*gdzie* $f\colon (0,\infty) \to [0,\infty)$ *jest funkcją niemalejącą. Przypuścimy, że istnieją* $a_1 \in (0,1]$ *takie, że*

$$a_1\, \nu_s(dx) \leqslant N(dx)\,,$$

*oraz* $a_2 \in [1,\infty)$ *takie, że dla każdego* $|x| > 1/T_3$

$$\mathrm{Re}[\Psi(x)] \leqslant a_2\, \mathrm{Re}[\Psi_s(x)]\,.$$

*Tutaj* $\nu_s(dx)$ *jest symetryczną miarą Lévy'ego,* $\Psi_s(x)$ *oraz* $h_s(r)$ *odpowiadają trójce* $(0,\nu_s,0)$*. Wtedy dla dowolnych* $T,\theta_1,\theta_2 > 0$ *istnieje taka stała* $\tilde{c} = \tilde{c}(d,\alpha_3,c_3,T_3,a_1,a_2,\nu_s,T,\theta_1,\theta_2) \in (0,1]$*, że dla wszystkich* $0<t<T$*,* $|y| \leqslant \theta_1 h_s^{-1}(1/t)$ *oraz* $|x| \geqslant \theta_2 h_s^{-1}(1/t)$

$$p(t,x+y+tb_{[h_s^{-1}(1/t)]}) \geqslant \tilde{c}\, t f(|x|)\,.$$

*Jeśli* $T_3=\infty$*, to możemy wziąć* $T=\infty$ *z* $\tilde{c}>0$.

W rozdziale 5 pracy [H3] skupiamy się na procesie Lévy'ego $Y$ w $\mathbb{R}^d$ o trójce $(A,N,b)$, gdzie $A=0$, $b\in\mathbb{R}^d$, a $N(dx)$ jest porównywalna z izotropową, unimodalną miarą Lévy'ego $\nu_0(|x|)dx$. Przypomnijmy, że wtedy (C3) upraszcza się do (A1) lub równoważnie do (A4). Wykorzystujemy [H3, Theorem 2.1], aby udowodnić górne oszacowania sformułowane w [H3, Theorem 5.2], które razem z [H3, Proposition 5.4] stanowią punkt wyjścia w analizie operatorów ze zmiennymi współczynnikami. Otrzymujemy również dolne oszacowania, łącząc Twierdzenia 3 i 4, patrz [H3, Remark 5.7]. Poniżej prezentujemy twierdzenie, które jest konsekwencją wyników rozdziału 5 w artykule [H3].

**Twierdzenie 5** (Theorem 1.1 w [H3])**.** *Niech* $A=0$*,* $b\in\mathbb{R}^d$ *oraz* $N(dx)=n(x)dx$ *będzie miarą Lévy'ego spełniającą* $n(x)\approx g(|x|)$ *dla niemalejącej funkcji* $g\colon [0,\infty)\to[0,\infty]$*. Dla danego* $T\in(0,\infty]$ *następujące warunki są równoważne:*

*(a) Istnieje* $c\in[1,\infty)$ *takie, że dla wszystkich* $r<T$

$$h(r) \leqslant cK(r)\,.$$

*(b) Istnieje* $c>0$ *takie, że dla wszystkich* $t<T$

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-t\,\mathrm{Re}[\Psi(z)]}dz \leqslant c\left[h^{-1}(1/t)\right]^{-d}.$$

*(c) Dla każdego* $\beta\in\mathbb{N}_0^d$ *istnieje* $c\in[1,\infty)$ *takie, że dla wszystkich* $0<t<T$*,* $x\in\mathbb{R}^d$

$$|\partial_x^{\beta} p(t,x+tb_{[h^{-1}(1/t)]})| \leqslant c\left[h^{-1}(1/t)\right]^{-|\beta|}\left([h^{-1}(1/t)]^{-d} \wedge \frac{tK(|x|)}{|x|^d}\right)$$

*oraz*

$$p(t,x+tb_{[h^{-1}(1/t)]}) \geqslant c^{-1}\left([h^{-1}(1/t)]^{-d} \wedge tn(x)\right).$$

*Ponadto istnieją* $c\in[1,\infty)$*,* $R\in(0,\infty]$ *takie, że dla wszystkich* $|x|<R$

$$\frac{K(|x|)}{|x|^d} \leqslant c\, n(x)$$

*wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnych* $\beta\in[0,2)$*,* $c\in(0,1]$ *mamy* $c\,\lambda^{d+\beta}g(\lambda r)\leqslant g(r)$*,* $\lambda\leqslant 1$*,* $r<R$.

Rozdział ten zakończymy przykładem, dla którego Twierdzenie 5 nie może być użyte (jeśli tylko $c_- \neq c_+$ poniżej), ale mają zastosowanie jednowymiarowe twierdzenia z [H3]. Niech $d = 1$ i rozważmy proces Lévy o trójce $(A, N, b)$, gdzie $A = 0$, $b \in \mathbb{R}$ oraz

$$N(dx) = n(x)dx\,, \qquad n(x) \approx |x|^{-1-\alpha}\left(e^{-c_-|x|}\mathbb{1}_{x<0} + e^{-c_+|x|}\mathbb{1}_{x>0}\right)$$

z $\alpha \in (0, 2)$ i $c_-, c_+ \geqslant 0$. Wtedy dla każdego $T > 0$

$$p(t, x + tb_{[1/\Psi^{-1}(1/t)]}) \approx \left(t^{-1/\alpha} \wedge tn(x)\right)$$

na $(0, T) \times \mathbb{R}$, patrz Example 6.5 w rozdziale 6 pracy [H3].

## 4.3 Operatory typu Lévy'ego

Metoda parametrysy

Jak już zapowiedziano, głównym narzędziem, którego użyjemy, jest *metoda parametrysy*, zaproponowana przez Levi'ego [52], Hadamarda [28], Gevery'ego [24] dla operatorów różniczkowych, a później rozszerzona przez Fellera [21] i Dressela [14]. Zainteresowanego czytelnika odsyłamy także do klasycznych monografii Friedmana [22] oraz Eidelmana [18]. Operatory nielokalne były później analizowane przez Drin'a [15], Drin'a, Eidelmana [16], Kochubei'a [43] oraz Kolokoltsova [45], zobacz także monografię Eidelmana, Ivasyshina, Kochubei'a [19]. Ostatnio metoda ta została użyta do operatorów nielokalnych przez Xie, Zhanga [61], Knopovą, Kulika [39], Bogdana, Knopovą, Sztonyka [7], Kühn [47], Knopovą, Kulika, Schillinga [41], Chena, Zhanga [10, 12], Kima, Songa, Vondračeka [36], Kima, Lee [35]. Była ona również wykorzystana w analizie stochastycznych równań różniczkowych przez Kohatsu-Higę, Li [44], Knopovą, Kulika [40], Kulika [51], Kulczyckiego, Ryznara [49], Kulczyckiego, Ryznara, Sztonyka [50], Kulczyckiego, Kulika, Ryznara [48], Menozziego, Zhanga [54]. Dodatkowo odsyłamy czytelnika do monografii autorstwa Knopovej, Kochubeia, Kulika [42], Chena, Zhanga [11] oraz Kühn [46].

Pierwotną rolą metody parametrysy jest dostarczenie kandydata na rozwiązanie fundamentalne (jądro całkowe półgrupy). Każde użycie tej metody niesie ze sobą różne trudności techniczne, które trzeba pokonać, a zależą one od klasy współczynników, które są brane pod uwagę. Większość zastosowań wiąże się z charakterystycznym wzorcem: rozkład kandydata na *przybliżenie rzędu zerowego* i *resztę*. W artykułach [H1] i [H4], zgodnie z punktową wersją metody, przewidujemy, że

$$p^{\kappa}(t, x, y) = p^{\mathfrak{K}_y}(t, x, y) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} p^{\mathfrak{K}_z}(t - s, x, z)q(s, z, y)\, dzds\,,$$

gdzie $q(t, x, y)$ rozwiązuje równanie

$$q(t, x, y) = q_0(t, x, y) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} q_0(t - s, x, z)q(s, z, y)\, dzds$$

oraz $q_0(t, x, y) = \left(\mathcal{L}_x^{\mathfrak{K}_x} - \mathcal{L}_x^{\mathfrak{K}_y}\right)p^{\mathfrak{K}_y}(t, x, y)$. Tutaj $p^{\mathfrak{K}_w}$ jest jądrem ciepła operatora Lévy'ego $\mathcal{L}^{\mathfrak{K}_w}$ otrzymanego z $\mathcal{L}^{\kappa}$ przez zamrożenie współczynników: $\mathfrak{K}_w(z) = \kappa(w, z)$. Alternatywnie, $q$ może być zdefiniowane jako szereg

$$q(t, x, y) = q_0(t, x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t, x, y)\,,$$

gdzie dla $n \geqslant 1$

$$q_n(t,x,y) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} q_0(t-s,x,z) q_{n-1}(s,z,y)\, dzds\,.$$

W rozdziale 3 pracy [H5], zainspirowani pracą [41], przedstawiamy ogólne funkcjonalno-analityczne podejście do metody parametrysy, a mianowicie do konstrukcji rodziny operatorów $P_t\colon t \in (0,1]$ dla ustalonego wyboru operatora *przybliżenia rzędu zerowego* $P_t^0$ oraz operatora *błędu* $Q_t^0$. W literaturze istnieje wiele dowodów na to, że elastyczność w wyborze przybliżenia rzędu zerowego jest kluczowa. Będziemy używać przestrzeni rzeczywistych funkcji borelowskich $B_b(\mathbb{R}^d)$ wyposażonej w normę supremum $\|f\|_\infty$. Dla $t \in (0,1]$ rozważamy dwa operatory *liniowe*

$$P_t^0\colon B_b(\mathbb{R}^d) \to B_b(\mathbb{R}^d)\,,$$
$$Q_t^0\colon B_b(\mathbb{R}^d) \to B_b(\mathbb{R}^d)\,.$$

Badamy obiekt postaci

$$P_t f := P_t^0 f + \int_0^t P_{t-s}^0\, Q_s f\, ds\,,$$

gdzie

$$Q_t f := Q_t^0 f + \sum_{n=1}^{\infty} Q_t^n f$$

oraz

$$Q_t^n f := \int \cdots \int_{0<s_1<\ldots<s_n<t} Q_{t-s_n}^0 \ldots Q_{s_1}^0 f\;\, ds_1 \ldots ds_n\,.$$

Rozwijamy tak sformułowane ogólne podejście operatorowe i omawiamy konsekwencje, gdy mamy do czynienia z operatorami całkowymi. W zastosowaniach w pracy [H5] rozważamy klasyczny wybór $P_t^0$ przez *zamrażanie współczynników na końcu*: dla $t > 0$, $x, y \in \mathbb{R}^d$ bierzemy

$$p^{\mathfrak{K}_w}(t,x,y) := p^{\mathfrak{K}_w}(t, y-x)\,,$$

$$p_0(t,x,y) := p^{\mathfrak{K}_y}(t,x,y)\,,$$
$$q_0(t,x,y) := -(\partial_t - \mathcal{L}_x)\, p_0(t,x,y)$$

oraz

$$P_t^0 f(x) := \int_{\mathbb{R}^d} p_0(t,x,y) f(y)\, dy\,,$$
$$Q_t^0 f(x) := \int_{\mathbb{R}^d} q_0(t,x,y) f(y)\, dy\,.$$

Zdefiniowanie operatorowych ram istotnych dla zastosowań

Zasadniczym elementem tej części badań jest stworzenie ram do analizy operatorów (1)–(3), które budujemy na wynikach pracy [H3]. Nie wymagamy, aby operatory miały jakąkolwiek jednorodność, w przeciwieństwie do Eidelmana, Ivasyshina, Kochubeia [19]. Nie muszą też być stabilne, na przykład w odróżnieniu od operatorów z pracy Knopovej, Kulika, Schillinga [41].

Niech $d \in \mathbb{N}$ oraz $\nu : [0,\infty) \to [0,\infty]$ będzie funkcją nierosnącą ($\nu \not\equiv 0$) spełniającą

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1 \wedge |x|^2)\, \nu(|x|) dx < \infty\,. \tag{7}$$

Rozważamy $J : \mathbb{R}^d \to [0,\infty]$ takie, że dla pewnej stałej $c_J \in [1,\infty)$ oraz wszystkich $x \in \mathbb{R}^d$

$$c_J^{-1} \nu(|x|) \leqslant J(x) \leqslant c_J\, \nu(|x|)\,. \tag{8}$$

Przypuśćmy dalej, że $\kappa\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to (0,\infty)$ jest taka, że dla pewnej stałej $c_\kappa \in [1,\infty)$ i wszystkich $x, z \in \mathbb{R}^d$

$$c_\kappa^{-1} \leqslant \kappa(x,z) \leqslant c_\kappa \tag{9}$$

oraz dla pewnej $\beta \in (0,1]$ i wszystkich $x, y, z \in \mathbb{R}^d$

$$|\kappa(x,z) - \kappa(y,z)| \leqslant c_\kappa\, |x-y|^\beta\,. \tag{10}$$

Ponadto dla $r > 0$ niech

$$h(r) := \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 \wedge \frac{|x|^2}{r^2}\right) \nu(|x|) dx\,, \qquad K(r) := r^{-2} \int_{|x|<r} |x|^2\, \nu(|x|) dx\,.$$

Będziemy korzystać z dwóch ważnych warunków na $h$. Pierwszy, i kluczowy, to *warunek słabego dolnego skalowania* w zerze: istnieją stałe $\alpha_h \in (0,2]$ i $C_h \in [1,\infty)$ takie, że

$$h(r) \leqslant C_h\, \lambda^{\alpha_h} h(\lambda r)\,, \qquad \lambda, r \in (0,1]\,. \tag{11}$$

Drugi warunek to *warunek słabego górnego skalowania* w zerze: istnieją stałe $\beta_h \in (0,2]$ i $c_h \in (0,1]$ takie, że

$$h(r) \geqslant c_h\, \lambda^{\beta_h}\, h(\lambda r)\,, \qquad \lambda, r \in (0,1]\,. \tag{12}$$

Założenia i operatory

Dla przejrzystości dyskusji, w poniższej tabeli prezentujemy nazwy zestawów warunków używanych jako założenia w artykułach [H1], [H4] i [H5]. Są one precyzyjnie określone w odpowiednich definicjach w dalszej części opisu.

| Artykuł | Założenia | Definicje poniżej |
|---|---|---|
| [H1] | (P1), (P2), (P3) | Def. 6 |
| [H4] | (Q1), (Q2) | Def. 14 |
| [H5] | (**A**), (**A***) | Def. 21 |

Operator, który rozważamy w ramach każdego założenia przedstawiony jest w kolejnej tabeli. W przypadku zbiorów warunków (**A**) i (**A***) uwzględniony jest także zewnętrzny dryf.

| Operator | Założenia |
|---|---|
| (1) | (P1), (Q1), (Q2), (**A**), (**A***) |
| (2) | (P2) |
| (3) | (P3) |

Rząd operatora

Operatory (1)–(3) są operatorami pseudo-różniczkowymi, których rząd (różniczkowy) może nie być dany przez liczbę. Będziemy natomiast identyfikować oszacowania na rząd za pomocą (11) lub (12). Powiemy, że wiodąca część nielokalna operatora ma rząd co najmniej $\alpha_h$, jeśli (11) jest spełnione. Podobnie rząd wiodącej części nielokalnej operatora wynosi co najwyżej $\beta_h$, jeśli (12) jest spełnione. Zauważmy, że jeśli (11) jest spełnione dla $\alpha_h = \alpha$, to zachodzi dla każdego $0 < \alpha_h < \alpha$.

W porównaniu z operatorem różniczkowym rzędu pierwszego, który w naszych rozważaniach może wynikać z zewnętrznego lub wewnętrznego dryfu, wyróżniamy trzy scenariusze: jeśli $\alpha_h > 1$, to mówimy, że jest to *przypadek podkrytyczny*; jeśli największą możliwą wartością jest $\alpha_h = 1$, to mówimy o *przypadku krytycznym*; w przeciwnym razie, czyli gdy możliwe jest tylko przyjęcie $0 < \alpha_h < 1$, mówimy o *przypadku nadkrytycznym*. Dla izotropowej miary $\alpha$-stabilnej mamy $\alpha_h = \beta_h = \alpha \in (0, 2)$. Istnieją przykłady, takie że

(i) rząd jest *nieco powyżej jedynki*, ponieważ (11) jest spełnione z $\alpha_h = 1$, ale nie zachodzi z żadną $\alpha_h > 1$, jednocześnie (12) jest spełnione dla każdej $\beta_h > 1$, ale nie z $\beta_h = 1$;

(ii) rząd jest *nieco poniżej jedynki*, ponieważ (11) jest spełnione dla każdej $\alpha_h < 1$, ale nie z $\alpha_h = 1$, równocześnie (12) nie zachodzi dla żadnej $\beta_h < 1$, ale jest spełnione z $\beta_h = 1$;

(iii) rząd *oscyluje wokół jedynki*, ponieważ (11) jest spełnione z $\alpha_h = 3/4$, ale nie zachodzi dla żadnej $\alpha_h > 3/4$, jednocześnie (12) jest spełnione z $\beta_h = 5/4$, ale nie zachodzi dla żadnej $\beta_h < 5/4$.

Zatem (i) jest przypadkiem krytycznym, natomiast zarówno (ii), jak i (iii) są nadkrytyczne.

Sprawdźmy, w jaki sposób rząd wpływa na wiedzę na temat kompensatora. Wiadomo ogólnie, patrz [H2, Lemma 2.9], że (11) z $\alpha_h \geqslant 1$ (przypadek podkrytyczny lub krytyczny) implikuje

$$\int_{|z|<1} |z|\nu(z)\,dz = \infty\,,$$

jednak w przypadku nadkrytycznym możemy mieć

$$\int_{|z|<1} |z|\nu(z)\,dz < \infty \qquad \text{albo} \qquad \int_{|z|<1} |z|\nu(z)\,dz = \infty\,.$$

Jeśli (12) zachodzi z $\beta_h < 1$, wtedy $\int_{|z|<1} |z|\nu(z)\,dz < \infty$.

Ewolucja założeń

Zakładając (P3) zajmujemy się przypadkiem symetrycznym, tzn. $\kappa(x,z) = \kappa(x,-z)$ i $J(z) = J(-z)$, gdy rząd operatora jest ściśle dodatni ($\alpha_h > 0$). Jak już wspomniano we wstępie, badamy wtedy operator (3), który jest zsymetryzowaną wersją (1). Biorąc pod uwagę wzór (4), warto zauważyć, że symetria sprawia, iż dla $r > 0$ i $x \in \mathbb{R}^d$ mamy

$$\zeta_r^x = 0\,. \tag{13}$$

We wszystkich pozostałych przypadkach dopuszczamy, aby odwzorowanie $z \mapsto \kappa(x,z)J(z)$ było niesymetryczne. Zakładając (P1) rozważamy operator (1) o rzędzie ściśle większym niż jeden ($\alpha_h > 1$), jest to przypadek podkrytyczny. Zwróćmy uwagę, że zgodnie z (7)–(10) w przypadkach symetrycznym oraz podkrytycznym dla $r \in (0,1]$, $x, y \in \mathbb{R}^d$ mamy

$$|\zeta_r^x| \leqslant c\, r h(r)\,, \qquad |\zeta_r^x - \zeta_r^y| \leqslant c\,|x-y|^\beta r h(r)\,, \tag{14}$$

patrz (13) oraz [H4, Fact 1.1]. Nierówności te mogą być postrzegane jako dominacja wiodącej części nielokalnej nad wewnętrznym dryfem. Ogólnie biorąc, w przypadku krytycznym lub nadkrytycznym nierówności (14) nie zachodzą, a gdy są prawdziwe, oznaczają występowanie pewnych kasowań w całce definiującej wewnętrzny dryf. Mimo to w [H4] używamy (14), patrz (25) i (26), jako część naszych założeń. Jak wyjaśniono w [H4, Remark 2.1], konstrukcja kandydata na rozwiązanie fundamentalne przy użyciu metody parametrysy jest wykonywana przy następującym założeniu:

(Q0): (7)–(11) zachodzą, $\alpha_h \in (0,1]$; (25) oraz (26) zachodzą;

co obejmuje wszystkie przypadki, włącznie z nadkrytycznym. Ze względu na monotoniczność (11) względem $\alpha_h$, w (Q0) dopuszczamy w istocie $\alpha \in (0,2]$. Jak już wiemy, jeśli $\alpha_h > 1$, to (25) i (26) są naturalnie spełnione. Aby uzyskać dalsze wyniki, w (Q1) dodatkowo wymagamy, żeby rząd był co najmniej jeden ($\alpha_h \geqslant 1$), obejmując przypadek krytyczny z kontrolą wewnętrznego dryfu określoną przez (25) i (26). Ponieważ skupiamy się na przypadku niesymetrycznym, zauważamy, że dla danego profilu $\nu$ spełniającego (7) nie jest trudno znaleźć $J(z)$ i $\kappa(x,z)$ takie, że (8)–(10) zachodzą oraz dla $r \in (0,1]$, $x \in \mathbb{R}^d$ mamy

$$c \int_{r \leqslant |z| < 1} |z| \nu(|z|)\, dz \leqslant |\zeta_r^x| \tag{15}$$

dla pewnego $c > 0$. Z tego powodu w przykładach zazwyczaj porównujemy nasze warunki dotyczące wewnętrznego dryfu z lewą stroną powyżej nierówności. Zobacz także Przykłady 17 i 18 oraz Fakt 19 w Rozdziale 4.3.2.

Operator (2) jest omawiany w ramach (P2), gdzie zakłada się, że $0 < \alpha_h \leqslant \beta_h < 1$. W porównaniu z operatorem (1) skończony kompensator jest sztucznie usuwany. W rozdziale 4.3.2 wyjaśniamy, że operatory (1) i (2) są naturalnie powiązane poprzez nierówności (14), czyli de facto (25) i (26), które są wcielone w warunki definiujące (Q2).

Oczywistym jest, że powyższe założenia (nie mówimy tu o (Q0)) nie pozwalają na operatory z niesymetryczną miarą i o rzędzie nieco poniżej jedynki lub wahające się wokół jedynki. Nawet dla operatorów o rzędzie nieco powyżej jedynki wymagają one wystarczających kasowań. Z tego właśnie powodu w (**A**) i (**A**$^*$) proponujemy dalsze osłabienie warunków dotyczących rzędu i kasowań, co obejmuje (Q0). Więcej szczegółów podanych jest w Rozdziale 4.3.3.

Silna symetria

Podkreślmy, że zakres wyników osiągalnych przy użyciu metody parametrysy zależy od właściwości jądra ciepła, które (w odpowiednim sensie) związane jest z operatorem o stałych współczynnikach. Mając to na względzie, zauważmy, że jeśli $p$ jest jądrem ciepła izotropowego procesu $\alpha$-stabilnego, to

$$|\nabla_x p(t,x)| \leqslant c \min\left\{ t^{-(d+1)/\alpha}, \frac{t}{|x|^{d+1+\alpha}} \right\}, \tag{16}$$

patrz [5, Lemma 5]. Wiadomo także, że to oszacowanie nie jest ogólnie prawdziwe w naszym kontekście, patrz [17]. Dla operatorów o stałych współczynnikach mamy jedynie dostęp do słabszego oszacowania *bez* dodatkowego zaniku względem zmiennej przestrzennej,

$$|\nabla_x p(t,x)| \leqslant ct^{-1/\alpha} \min\left\{t^{-d/\alpha}, \frac{t}{|x|^{d+\alpha}}\right\}.$$

W szczególności ma to wpływ na zakres parametrów naszych modeli, dla których jesteśmy w stanie udowodnić istnienie i górne oszacowania gradientu rozwiązania fundamentalnego $\nabla_x p^\kappa(t,x,y)$, które związane są z warunkiem $1-\alpha_h < \beta \wedge \alpha_h$, patrz Twierdzenie 8 punkt (6) lub (Q2) oraz [H4, Theorem 2.2 (6)]. W pracy [53] dla $J(z)=|z|^{-d-\alpha}$ warunek ten jest jasno objaśniony, patrz Remark 2.1 tamże, i zastąpiony słabszym warunkiem $1-\alpha_h<\beta$, ale kosztem dodatkowych założeń na współczynnik $\kappa(x,z)$ wymagających silnych własności symetrii względem $z$. Ponieważ gradient występuje w sposób jawny w definicji (1), warunki dotyczące istnienia $\nabla p^\kappa$ wpłyną na wyniki, gdy mowa o punktowym rozwiązaniu fundamentalnym. Ten problem nie pojawia się, gdy analizujemy którykolwiek z operatorów (2) lub (3).

### 4.3.1 Artykuł [H1]

Motywacją do powstania tego artykułu była chęć rozszerzenia i wzmocnienia wyników zawartych w [10] oraz [36] na szerszą klasę operatorów. Ponadto w dużej mierze pokryjemy wyniki pracy [32], z wyjątkiem jednego przypadku, który badamy w [H4], patrz także [12] i [39]. Nasze uogólnienia nie wynikają wyłącznie i bezpośrednio z wykorzystania rezultatów pracy [H3], ale także z poprawy lub optymalizacji wielu kroków podczas realizowania metody parametrysy. Poniżej sprecyzowane są zestawy warunków używane w [H1].

**Definicja 6.** Definiujemy następujące trzy zbiory warunków:

(P1): (7)–(11) zachodzą oraz $1<\alpha_h\leqslant 2$;

(P2): (7)–(12) zachodzą oraz $0<\alpha_h\leqslant\beta_h<1$;

(P3): (7)–(11) zachodzą, $J$ jest symteryczna oraz $\kappa(x,z)=\kappa(x,-z)$, $x,z\in\mathbb{R}^d$.

Powiemy, że (P) zachodzi jeśli przynajmniej jeden ze zbiorów warunków (P1), (P2) lub (P3) jest spełniony.

Przez $\mathcal{L}^{\kappa,\varepsilon} f$ oznaczamy wyrażenie (1), (2) lub (3) z $J(z)$ zastąpionym przez $J_\varepsilon(z) := J(z)\mathbb{1}_{|z|>\varepsilon}$, $\varepsilon\in[0,1]$. Operatory te będą używane (w silnym lub słabym sensie) tylko wtedy, gdy będą dobrze określone zgodnie z następującymi definicjami. Niech $f\colon\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ funkcją borelowsko mierzalną.

**Silny operator**

Operator $\mathcal{L}^\kappa f$ jest dobrze określony jeśli definiująca go całka jest zbieżna bezwzględnie, a w przypadku (P1) gradient $\nabla f(x)$ istnieje dla każdego $x\in\mathbb{R}^d$.

**Słaby operator**

Operator $\mathcal{L}^{\kappa,0^+} f$ jest dobrze określony jeśli poniższa granica istnieje dla każdego $x\in\mathbb{R}^d$

$$\mathcal{L}^{\kappa,0^+} f(x) := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathcal{L}^{\kappa,\varepsilon} f(x),$$

gdzie dla $\varepsilon\in(0,1]$ (silne) operatory $\mathcal{L}^{\kappa,\varepsilon} f$ są dobrze określone.

Operator $\mathcal{L}^{\kappa,0^+}$ jest rozszerzeniem operatora $\mathcal{L}^{\kappa,0}=\mathcal{L}^\kappa$, co oznacza, że jeśli $\mathcal{L}^\kappa f$ jest dobrze określony, wtedy to samo jest prawdą dla $\mathcal{L}^{\kappa,0^+} f$ i mamy $\mathcal{L}^{\kappa,0^+} f=\mathcal{L}^\kappa f$. Dlatego chcemy udowodnić istnienie rozwiązania równania $\partial_t=\mathcal{L}^\kappa$ oraz jednoznaczność dla $\partial_t=\mathcal{L}^{\kappa,0^+}$.

**Twierdzenie 7** (Theorem 1.1 w [H1]). *Załóżmy, że* (P) *zachodzi. Istnieje dokładnie jedna funkcja* $p^\kappa(t,x,y)$ *na* $(0,\infty)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ *taka, że spełnione są następujące warunki:*

*(i) Dla wszystkich* $t>0$, $x,y\in\mathbb{R}^d$, $x\neq y$

$$\partial_t p^\kappa(t,x,y)=\mathcal{L}_x^{\kappa,0^+}p^\kappa(t,x,y)\,. \tag{17}$$

*(ii) Funkcja* $p^\kappa(t,x,y)$ *jest łącznie ciągła na* $(0,\infty)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ *oraz dla każdej* $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\lim_{t\to0^+}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d}p^\kappa(t,x,y)f(y)\,dy-f(x)\right|=0\,. \tag{18}$$

*(iii) Dla dowolnych* $0<t_0<T$ *istnieją* $c>0$ *oraz* $f_0\in L^1(\mathbb{R}^d)$ *takie, że dla wszystkich* $t\in(t_0,T]$, $x,y\in\mathbb{R}^d$

$$|p^\kappa(t,x,y)|\le cf_0(x-y) \tag{19}$$

*oraz*

$$|\mathcal{L}_x^{\kappa,\varepsilon}p^\kappa(t,x,y)|\leqslant c\,,\qquad \varepsilon\in(0,1]\,. \tag{20}$$

*W przypadku* (P1) *dodatkowo:*

*(iv) Dla każdego* $t>0$ *istnieje* $c>0$ *taka, że dla wszystkich* $x,y\in\mathbb{R}^d$

$$|\nabla_x p^\kappa(t,x,y)|\leqslant c\,. \tag{21}$$

Dowodzimy również wielu własności jakościowych funkcji $p^\kappa(t,x,y)$. By je zaprezentować, wykorzystamy *funkcję ograniczającą* zdefiniowaną dla $t>0$ i $x\in\mathbb{R}^d$ przez

$$\Upsilon_t(x):=\left([h^{-1}(1/t)]^{-d}\wedge\frac{tK(|x|)}{|x|^d}\right). \tag{22}$$

**Twierdzenie 8** (Theorem 1.2 w [H1]). *Załóżmy, że* (P) *zachodzi. Następujące stwierdzenia są prawdziwe.*

(1) *(Nieujemność) Funkcja* $p^\kappa(t,x,y)$ *jest nieujemna na* $(0,\infty)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$.

(2) *(Zachowanie masy) Dla wszystkich* $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$

$$\int_{\mathbb{R}^d}p^\kappa(t,x,y)dy=1\,.$$

(3) *(Równość Chapmana-Kolmogorova) Dla wszystkich* $s,t>0$, $x,y\in\mathbb{R}^d$

$$\int_{\mathbb{R}^d}p^\kappa(t,x,z)p^\kappa(s,z,y)\,dz=p^\kappa(t+s,x,y)\,.$$

(4) *(Oszacowanie górne) Dla każdego* $T>0$ *istnieje* $c>0$ *takie, że dla wszystkich* $t\in(0,T]$, $x,y\in\mathbb{R}^d$

$$p^\kappa(t,x,y)\leqslant c\Upsilon_t(y-x)\,.$$

(5) *(Ułamkowa pochodna) Dla każdego* $T>0$ *istnieje* $c>0$ *takie, że dla wszystkich* $t\in(0,T]$, $x,y\in\mathbb{R}^d$

$$|\mathcal{L}_x^{\kappa,\varepsilon}p^\kappa(t,x,y)|\leqslant ct^{-1}\Upsilon_t(y-x)\,,\qquad \varepsilon\in[0,1]\,.$$

(6) *(Gradient) Jeśli* $1-\alpha_h < \beta \wedge \alpha_h$, *to dla każdego* $T>0$ *istnieje* $c>0$ *takie, że dla wszystkich* $t \in (0,T]$, $x,y \in \mathbb{R}^d$

$$|\nabla_x p^\kappa(t,x,y)| \leqslant c\Big[h^{-1}(1/t)\Big]^{-1} \Upsilon_t(y-x)\,.$$

(7) *(Ciągłość) Funkcja* $\mathcal{L}_x^\kappa p^\kappa(t,x,y)$ *jest łącznie ciągła na* $(0,\infty)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$.

(8) *(Mocny operator) Dla wszystkich* $t>0$, $x,y\in\mathbb{R}^d$

$$\partial_t p^\kappa(t,x,y) = \mathcal{L}_x^\kappa\, p^\kappa(t,x,y)\,.$$

(9) *(Ciągłość hölderowska) Dla dowolnych* $T>0$, $\gamma\in[0,1]\cap[0,\alpha_h)$ *istnieje* $c>0$ *takie, że dla wszystkich* $t\in(0,T]$ *oraz* $x,x',y\in\mathbb{R}^d$

$$|p^\kappa(t,x,y)-p^\kappa(t,x',y)| \leqslant c(|x-x'|^\gamma\wedge 1)\left[h^{-1}(1/t)\right]^{-\gamma}\Big(\Upsilon_t(y-x)+\Upsilon_t(y-x')\Big).$$

(10) *(Ciągłość hölderowska) Dla dowolnych* $T>0$, $\gamma\in[0,\beta)\cap[0,\alpha_h)$, *istnieje* $c>0$ *takie, że dla wszystkich* $t\in(0,T]$ *oraz* $x,y,y'\in\mathbb{R}^d$

$$|p^\kappa(t,x,y)-p^\kappa(t,x,y')| \leqslant c(|y-y'|^\gamma\wedge 1)\left[h^{-1}(1/t)\right]^{-\gamma}\Big(\Upsilon_t(y-x)+\Upsilon_t(y-x')\Big).$$

*Stałe w* (4)–(6) *mogą być wybrane tak, aby zależały tylko od* $d, c_J, \kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \beta, \alpha_h, C_h, h, T$ *(oraz* $\beta_h$, $c_h$ *w przypadku* (P2)*). Podobnie dla* (9) *oraz* (10)*, ale z dodatkową zależnością od* $\gamma$.

Hölderowska ciągłość wzlgędem $x$ została dogłębniej zbadana i poprawiona w [59]. Analizujemy również półgrupę. Dla $t>0$ definiujemy

$$P_t^\kappa f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} p^\kappa(t,x,y)f(y)\,dy\,, \quad x\in\mathbb{R}^d\,,$$

gdy tylko całka istnieje w sensie Lebesgue'a. Dodefiniujemy także $P_0^\kappa$ jako operator identycznościowy.

**Twierdzenie 9** (Theorem 1.3 w [H1])**.** *Załóżmy, że* (P) *zachodzi. Następujące stwierdzenia są prawdziwe.*

(1) $(P_t^\kappa)_{t\geqslant 0}$ *jest analityczną, dodatnią, mocno ciągłą półgrupą kontrakcji na* $(C_0(\mathbb{R}^d),\|\cdot\|_\infty)$.

(2) $(P_t^\kappa)_{t\geqslant 0}$ *jest analityczną, mocno ciągłą półgrupą na każdym* $(L^p(\mathbb{R}^d),\|\cdot\|_p)$, $p\in[1,\infty)$.

(3) *Niech* $(\mathcal{A}^\kappa, D(\mathcal{A}^\kappa))$ *będzie generatorem* $(P_t^\kappa)_{t\geqslant 0}$ *na* $(C_0(\mathbb{R}^d),\|\cdot\|_\infty)$. *Wtedy*

  (a) $C_0^2(\mathbb{R}^d)\subseteq D(\mathcal{A}^\kappa)$ *oraz* $\mathcal{A}^\kappa=\mathcal{L}^\kappa$ *na* $C_0^2(\mathbb{R}^d)$,

  (b) $(\mathcal{A}^\kappa, D(\mathcal{A}^\kappa))$ *jest domknięciem* $(\mathcal{L}^\kappa, C_c^\infty(\mathbb{R}^d))$,

  (c) *funkcja* $x\mapsto p^\kappa(t,x,y)$ *należy do* $D(\mathcal{A}^\kappa)$ *dla wszystkich* $t>0$, $y\in\mathbb{R}^d$ *oraz*

$$\mathcal{A}_x^\kappa\, p^\kappa(t,x,y) = \mathcal{L}_x^\kappa\, p^\kappa(t,x,y) = \partial_t p^\kappa(t,x,y)\,, \qquad x\in\mathbb{R}^d\,.$$

(4) *Niech* $(\mathcal{A}^\kappa, D(\mathcal{A}^\kappa))$ *będzie generatorem* $(P_t^\kappa)_{t\geqslant 0}$ *na* $(L^p(\mathbb{R}^d),\|\cdot\|_p)$, $p\in[1,\infty)$. *Wtedy*

  (a) $C_c^2(\mathbb{R}^d)\subseteq D(\mathcal{A}^\kappa)$ *oraz* $\mathcal{A}^\kappa=\mathcal{L}^\kappa$ *na* $C_c^2(\mathbb{R}^d)$,

(b) $(\mathcal{A}^\kappa, D(\mathcal{A}^\kappa))$ *jest domknięciem* $(\mathcal{L}^\kappa, C_c^\infty(\mathbb{R}^d))$,

(c) *funkcja* $x \mapsto p^\kappa(t,x,y)$ *należy do* $D(\mathcal{A}^\kappa)$ *dla wszystkich* $t>0$, $y \in \mathbb{R}^d$ *oraz następująca równość zachodzi w* $L^p(\mathbb{R}^d)$*:*

$$\mathcal{A}^\kappa\, p^\kappa(t,\cdot,y) = \mathcal{L}^\kappa\, p^\kappa(t,\cdot,y) = \partial_t p^\kappa(t,\cdot,y)\,.$$

Podajemy także dolne oszacowania na jądro ciepła $p^\kappa(t,x,y)$.

**Twierdzenie 10** (Theorem 1.4 w [H1])**.** *Załóżmy, że* (P) *zachodzi. Następujące stwierdzenia są prawdziwe.*

*(i) Istnieją* $T_0 = T_0(d,\nu,\sigma,\kappa_2,\beta) > 0$ *oraz* $c = c(d,\nu,\sigma) > 0$ *takie, że dla wszystkich* $t \in (0,T_0]$, $x,y \in \mathbb{R}^d$

$$p^\kappa(t,x,y) \geqslant c\left([h^{-1}(1/t)]^{-d} \wedge t\nu\left(|x-y|\right)\right). \tag{23}$$

*(ii) Jeśli dodatkowo* $\nu$ *jest dodatnia, to dla każdego* $T>0$ *istnieje* $c = c(d,T,\nu,\sigma,\kappa_2,\beta) > 0$ *taka, że* (23) *zachodzi dla wszystkich* $t \in (0,T]$ *oraz* $x,y \in \mathbb{R}^d$.

*(iii) Jeśli dodatkowo istnieją* $\bar\beta \in [0,2)$ *oraz* $\bar c > 0$ *takie, że* $\bar c \lambda^{d+\bar\beta}\nu(\lambda r) \leqslant \nu(r)$, $\lambda \leqslant 1$, $r>0$, *to dla każdego* $T>0$ *istnieje* $c = c(d,T,\nu,\sigma,\kappa_2,\beta,\bar c,\bar\beta) > 0$ *taki, że dla wszystkich* $t \in (0,T]$ *oraz* $x,y \in \mathbb{R}^d$

$$p^\kappa(t,x,y) \geqslant c\Upsilon_t(y-x)\,. \tag{24}$$

W dyskusji poniżej odniesiemy się do następującego przykładu.

**Przykład 11.** Nasze wyniki mogą być zastosowane, jeśli (8) zachodzi z $\nu(r) = r^{-d}[\log(1+r^{\alpha/2})]^{-2}$, gdzie $\alpha \in (0,2)$. W istocie, warunki (11) i (12) są spełnione z $\alpha_h = \beta_h = \alpha$, patrz [H3, Example 6.3]. Ponadto założenia Twierdzenia 10(iii) również są spełnione. Podkreślmy, że taki profil $\nu$ nie ma skończonego logarytmicznego momentu w nieskończoności, tzn.

$$\int_{\mathbb{R}^d} \ln\left(1+|z|^2\right)\nu(|z|)dz = \infty\,.$$

Przedyskutujemy teraz nasze założenia w kontekście literatury z uwzględnieniem dwóch wybranych aspektów: dopuszczalnych miar Lévy'ego i warunku symetrii.

Najpierw skupimy się na miarze Lévy'ego $J(z)dz$. Zwrócimy uwagę na trzy artykuły [10,36,39], z których dwa, w wybranym kontekście, znajdują się na przeciwnych biegunach. W pracy [10] autorzy koncentrują uwagę na izotropowym procesie $\alpha$-stabilnym $J(z) = |z|^{-d-\alpha}$, $\alpha \in (0,2)$ i podają między innymi jawne oszacowania rozwiązania fundamentalnego. W [39] rozważane są znacznie bardziej ogólne, niekoniecznie absolutnie ciągłe miary Lévy'ego, ale oszacowania są podane w dość uwikłanej formie złożonych jąder. Praca [36] znajduje się pomiędzy tymi skrajnościami. Autorzy [36] kontynuują podejście z [10] i rozważają $J(z)$ porównywalne z miarą Lévy'ego $j(|z|)$ podporządkowanego ruchu Browna. Zamiast tego, my używamy (8), co oznacza porównywalność $J(z)$ z izotropową unimodalną miarą Lévy'ego $\nu(|z|)$ i pozwala na istotnie większą klasę tych miar. W szczególności, możemy rozważać miary o zwartym nośniku. Biorąc to pod uwagę, palsuje to nas pomiędzy [36] a [39].

Kolejnym założeniem dotyczącym miary Lévy'ego jest słabe skalowanie (11), które jest naturalnym uogólnieniem własności skalowania izotropowego procesu $\alpha$-stabilnego [10] i jest obecne w [36] oraz [39]. Dokładniej, warunek [36, (1.4)] jest równoważny z (11) zgodnie z [H1, (85)] i (86)], natomiast gdy założymy (8), to warunek [39, A1] też jest równoważny z (11). To ostatnie jest konsekwencją równoważności warunków (C3) i (C4) w [H2, Theorem 3.1], (A1) i (A3) w [H2, Lemma 2.3] oraz [H1, (85)]. Innymi słowy, nasze założenia pokrywają się tutaj z założeniami z [39] ograniczonymi do absolutnie ciągłych miar Lévy'ego spełniających (8). W rzeczywistości w (P2) potrzebujemy również dodatkowego słabego skalowania (12), ale ten przypadek nie jest przedmiotem żadnej z prac [10, 36, 39].

Co więcej, w porównaniu z [36] unikamy dwóch dodatkowych technicznych założeń [36, (1.5) i (1.9)] dotyczących zachowania miary Lévy'ego w nieskończoności. Uzyskujemy to poprzez wybór formy funkcji ograniczającej $\Upsilon_t(x)$, wsparty wynikami z [H3], oraz odpowiednie sformułowanie zasady maksimum w [H1, Theorem 4.1]. Zauważamy na przykład, że miara Lévy'ego w Przykładzie 17, która jest dopuszczona przez nasze założenia, nie spełnia [36, (1.5)], patrz [H1, (85) i Lemat 6.2], więc twiedzenie z artykułu [36] nie mogą być zastosowane w tym przypadku.

Założenia (9) i (10) dotyczące funkcji $\kappa(x,z)$ są powszechne. W obu pracach [10] i [36] wymagany jest również warunek symetrii, który obejmujemy w ramach (P3). W przypadkach (P1) i (P2) warunek symetrii jest nie jest zakładany, dlatego wybór operatora musi być bardziej uważny. W [32] i [12] autorzy badają przypadki niesymetryczne dla $J(z) = |z|^{-d-\alpha}$ i rozważają następujący operator:

(a) (1) jeśli $\alpha \in (1,2)$;

(b) (1) jeśli $\alpha = 1$ i (13) zachodzi dla wszystkich $r > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$;

(c) (2) jeśli $\alpha \in (0,1)$.

Przypadki (a) i (c) są objęte przez (P1) i (P2). Przypadek (b) wraz z rozszerzeniami jest przedmiotem pracy [H4]. W [39], oprócz przypadku symetrycznego, również (a) i (P1) są uwzględnione w dyskusji wraz z hölderowsko ciągłym składnikiem pierwszego rzędu.

Na zakończenie skoncentrujemy się na omówieniu jakościowych ulepszeń, które osiągamy nawet w sytuacjach rozważanych w [10] i [36]. Po pierwsze, w Twierdzeniu 7 znacznie upraszczamy sformułowanie jednoznaczności $p^\kappa$. W Twierdzeniu 8 rozszerzamy zakres $\alpha_h$ i $\beta$, dla których istnieje gradient $\nabla p^\kappa$, dowodzimy łączną ciągłość $\mathcal{L}^\kappa p^\kappa$ i hölderowską ciągłość względem drugiej współrzędnej przestrzennej $p^\kappa$. W Twierdzeniu 9 przeprowadzamy bardziej szczegółową analizę półgrupy $P_t^\kappa$ i jej generatora na różnych przestrzeniach. W konsekwencji, w części (8) Twierdzenia 8 mamy, że $p^\kappa(t,x,y)$ rozwiązuje równanie $\partial_t = \mathcal{L}_x^\kappa$ (i $\partial_t = \mathcal{L}_x^{\kappa,0^+}$) dla wszystkich $t > 0$, $x, y \in \mathbb{R}^d$, bez ograniczenia $x \neq y$ (por. [10, (1.7)], [36, (1.10)]). O ile nam wiadomo, istnienie rozwiązania równania z silnym operatorem $\mathcal{L}_x^\kappa$ jest zupełnie nowym wynikiem, a wymaga przeprowadzenia wielu dodatkowych technicznych kroków.

Podsumowując, całkowicie uogólniamy wyniki z [10] i [36], ograniczając bardzo ogólne założenia z [39] do miar Lévy'ego spełniających (8) (przypadek (P2) nie jest rozważany w [39]). Ponadto wzmacniamy pewne wyniki nawet, gdy $J(z)dz$ jest izotropową miarą $\alpha$-stabilną [10] i proponujemy nowe wyniki. Rozszerzamy także kluczowe części [32] i [12] dla przypadku niesymetrycznego (wyłączając niesymetrię z $\alpha = 1$, zależność od czasu i mały dryf Kato). Naszym wkładem jest to, że przy stosunkowo słabych założeniach i z satysfakcjonującą ogólnością, która pozwala na niesymetryczne miary Lévy'ego, uzyskujemy jawne wyniki, które są właściwym rozszerzeniem przypadku $\alpha$-stabilnego.

Aby rozpocząć procedurę konstruowania rozwiązania fundamentalnego dla operatora typu Lévy'ego, konieczna jest odpowiednia wiedza na temat rozwiązania dla operatora z zamrożonymi współczynnikami, co prowadzi z powrotem do przypadku Lévy'ego. W naszej sytuacji korzystamy z wyników pracy [H3]. Poniższe twierdzenie wynika z wariantu Twierdzenia 5, patrz [H3, Theorem 5.4].

**Twierdzenie 12.** *Załóżmy* (P). *Dla dowolnych* $T>0$, $\mathbb{\beta}\in\mathbb{N}_0^d$ *istnieje stała* $c=c(d,T,\mathbb{\beta},\sigma)$ *taka, że dla wszystkich* $t\in(0,T]$, $x,y,w\in\mathbb{R}^d$

$$|\partial_x^{\mathbb{\beta}} p^{\mathfrak{K}_w}(t,x,y)| \leqslant c\left[h^{-1}(1/t)\right]^{-|\mathbb{\beta}|}\Upsilon_t(y-x)\,.$$

Tutaj $\sigma$ to zestaw parametrów, który się nie zmienia po ustaleniu naszych założeń, co zapewnia, że powyższe oszacowania są jednostajne względem $w\in\mathbb{R}^d$.

Kolejnym ważnym składnikiem wstępnych rozważań są tzw. nierówności splotowe, używane do radzenia sobie z wielokrotnymi całkami, które pojawiają się w konstrukcji. W przypadku rozkładu $\alpha$-stabilnego można je znaleźć na przykład w [43, Lemma 5]. W [H1, Lemma 5.17] proponujemy ulepszoną wersję zainspirowaną [36, Lemma 2.6] z większą liczbą parametrów oraz dla funkcji $\rho_\beta^\gamma$ zdefiniowanej za pomocą funkcji ograniczającej. Mianowicie dla $\gamma,\beta\in\mathbb{R}$

$$\rho_\gamma^\beta(t,x) := \left[h^{-1}(1/t)\right]^\gamma\left(|x|^\beta\wedge 1\right)t^{-1}\Upsilon_t(x)\,.$$

Na przykład dla odpowiednio dobranych parametrów mamy

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}(t-s)^{1-\theta}\,\rho_{\gamma_1}^{\beta_1}(t-s,x-z)\,s^{1-\eta}\,\rho_{\gamma_2}^{\beta_2}(s,z)\,dzds&\\ \leqslant c\,t^{2-\eta-\theta}\Big(\rho^0_{\gamma_1+\gamma_2+n_1}+\rho^0_{\gamma_1+\gamma_2+n_2}+\rho^{\beta_2}_{\gamma_1+\gamma_2+m_1}+\rho^{\beta_1}_{\gamma_1+\gamma_2+m_2}\Big)(t,x)\,.\end{aligned}$$

Metoda parametrysy polega również na wykorzystaniu regularności współczynników. Oto typowy przykład: zauważmy, że

$$\int_{\mathbb{R}^d}\nabla_x p^{\mathfrak{K}_w}(t,x,y)\,dy = 0\,.$$

Jeśli po prostu skorzystamy z Twierdzenia 12 i faktu, że funkcja ograniczająca całkuje się do stałej, otrzymamy (zauważmy, że poniżej mamy $\mathfrak{K}_y$ i całkujemy względem $dy$)

$$\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla_x p^{\mathfrak{K}_y}(t,x,y)|\,dy\leqslant c\left[h^{-1}(1/t)\right]^{-1}\,,$$

ale korzystając z regularności współczynnika w pierwszej nierówności, patrz [H1, Theorem 2.11], dostajemy

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^d}\nabla_x p^{\mathfrak{K}_y}(t,x,y)\,dy\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\nabla_x p^{\mathfrak{K}_y}(t,x,y)-\nabla p^{\mathfrak{K}_x}(t,\cdot,y)(x)\Big)\,dy\right|\\ &\leqslant c\int_{\mathbb{R}^d}\|\kappa(y,\cdot)-\kappa(x,\cdot)\|\left[h^{-1}(1/t)\right]^{-1}\Upsilon_t(y-x)\,dy\\ &\leqslant c\left[h^{-1}(1/t)\right]^{-1}\int_{\mathbb{R}^d}(|y-x|^{\beta_1}\wedge 1)\Upsilon_t(y-x)\,dy\\ &\leqslant c\left[h^{-1}(1/t)\right]^{-1+\beta_1}\,.\end{aligned}$$

W Rozdziale 3.3 analizujemy $\phi_y(t,x)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}p^{\mathfrak{K}_z}(t-s,x,z)q(s,z,y)dzds$, co stanowi najbardziej techniczną część, a wprowadzone przez nas w tym miejscu ulepszenia mają wpływ na końcowe wyniki. Jednym z nich jest następujący lemat.

**Lemat 13.** *Niech $\beta_1 \in (0,\beta] \cap (0,\alpha_h)$. Dla każdego $T>0$ istnieje stała $c = c(d,T,\sigma,\kappa_2,\beta_1)$ taka, że dla wszystkich $t \in (0,T]$, $x,y \in \mathbb{R}^d$*

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^t \left|\int_{\mathbb{R}^d} \delta^{\mathfrak{K}_z}(t-s,x,z;w)q(s,z,y)\,dz\right| ds\,\kappa(x,w)J(w)dw \leqslant c\rho_0^0(t,x-y)\,,$$
$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^t \left|\int_{\mathbb{R}^d} \delta^{\mathfrak{K}_z}(t-s,x,z;w)q(s,z,y)\,dz\right| ds\,\kappa(x,w)J(w)dw\,dy \leqslant ct^{-1}\left[h^{-1}(1/t)\right]^{\beta_1}\,.$$

Tutaj $\delta^{\mathfrak{K}_y}(t,x,y;z)$ jest jednym z następujących wyrażeń:

$$\delta_1^{\mathfrak{K}_z}(t,x,y;z) := p^{\mathfrak{K}_z}(t,x+z,y) - p^{\mathfrak{K}_z}(t,x,y) - \mathbb{1}_{|z|<1}\left\langle z, \nabla_x p^{\mathfrak{K}_z}(t,x,y)\right\rangle\,,$$
$$\delta_2^{\mathfrak{K}}(t,x,y;z) := p^{\mathfrak{K}}(t,x+z,y) - p^{\mathfrak{K}}(t,x,y)\,,$$
$$\delta_3^{\mathfrak{K}}(t,x,y;z) := \frac{1}{2}(p^{\mathfrak{K}}(t,x+z,y) + p^{\mathfrak{K}}(t,x-z,y) - 2p^{\mathfrak{K}}(t,x,y))$$

odpowiednio dla (P1), (P2), (P3).

### 4.3.2 Artykuł [H4]

Ten artykuł stanowi dobrze uzasadnioną kontynuację badań przeprowadzonych w [H1]. Poprawiamy i rozszerzamy wyniki z [32], a także część wyników z [12] i [39]. Głównym osiągnięciem w pracy [H4] jest rozpoznanie i wykorzystanie w założeniach nierówności (25) i (26), które zawsze zachodzą w przypadkach symetrycznym i podkrytycznym. Odpowiadamy tym samym na pytanie o naturalne warunki dla krytycznych operatorów niesymetrycznych, które prowadzą do silnych wyników, podobnych do tych w [H1], oraz zapewniających kompleksową analizę operatora, rozwiązania fundamentalnego dla odpowiadającego równania parabolicznego i związanej półgrupy. Sukces naszego podejścia, opartego na (25) i (26), sugeruje, że także w innych badaniach i kontekstach, gdzie odpowiednik równości (13) odgrywa rolę (patrz [13, (1.13)]), osłabienie założeń do odpowiednich wersji (25) i (26) powinno być możliwe. Załóżmy, że istnieją stałe $\kappa_3, \kappa_4 \geqslant 0$ takie, że

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left|\int_{r\leqslant|z|<1} z\,\kappa(x,z)J(z)dz\right| \leqslant \kappa_3 r h(r)\,, \qquad r\in(0,1], \tag{25}$$
$$\left|\int_{r\leqslant|z|<1} z\left[\kappa(x,z)-\kappa(y,z)\right]J(z)dz\right| \leqslant \kappa_4|x-y|^\beta r h(r)\,, \qquad r\in(0,1]. \tag{26}$$

Oczywiście są to szacowania na $|\zeta_r^x|$ oraz $|\zeta_r^x - \zeta_r^y|$, patrz (14).

**Definicja 14.** Definiujemy następujące dwa zbiory warunków:

(Q1): (7)–(11) zachodzą, $\alpha_h = 1$; (25) oraz (26) zachodzą;

(Q2): (7)–(12) zachodzą, $0 < \alpha_h \leqslant \beta_h < 1$ oraz $1-\alpha_h < \beta \wedge \alpha_h$; (25) oraz (26) zachodzą.

Ostateczne wyniki artykułu [H4] mają dokładnie taki sam charakter jak w [H1], dlatego w tym zakresie odsyłamy czytelnika bezpośrednio do [H4, Theorems 2.1-2.4]. Pod względem dowodów, już w części wstępnej, w rozdziałach 4 i 5 pracy [H4], zasadniczo uwzględniamy (25) i (26), co różni się od [H1]. Na przykład w [H1] przy założeniu (P1) uzyskanie Twierdzenia 12 odbywa się przy pomocy [H3, Proposition 5.4(i)], natomiast tutaj, aby otrzymać początkowe oszacowania górne [H4, Proposition 4.1], korzystamy z [H3, Proposition 5.4(ii)], patrz również [H4, Lemma 4.2]. Dostrzegamy również wpływ wewnętrznego dryfu i faktu, że rząd operatora nie musi być ścisłe większy niż jeden, np. porównaj [H4, Proposition 4.6] z jego odpowiednikiem w [H1, Theorem 2.9] lub [H4, (5.3)] z [H1, Theorem 2.11], gdzie oszacowania są w istocie różne. Niektóre kroki muszą być dodatkowo podzielone na dwie odrębne fazy: jedną, aby uzasadnić użycie twierdzenia Fubiniego w późniejszym etapie, i drugą, aby wykorzystać kasowania i uzyskać dokładne oszacowania. Poniżej jako przykład prezentujemy fragmenty z [H4, Lemma 5.6] i [H4, Lemma 5.7]. Bardziej techniczne wyniki z podobnym podziałem to [H4, Lemma 6.8 i 6.9] z jednej strony - dla twierdzenia Fubiniego, a [H4, Lemma 6.11, Corollary 6.12 i Lemma 6.13] z drugiej - dla oszacowań. Patrz również komentarze poprzedzające [H4, Lemma 6.8].

**Lemat 15** (Lemma 5.6 w [H4])**.** *Załóżmy* (Q0)*. Niech* $\beta_1 \in [0,\beta]\cap[0,\alpha_h)$*. Dla każdego* $T>0$ *nierówność*

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d}\delta^{\mathfrak{K}_y}(t,x,y;z)\,dy\right|J(z)dz \leqslant c\,\vartheta(t)\,t^{-1}\left[h^{-1}(1/t)\right]^{\beta_1}$$

*zachodzi dla wszystkich* $t\in(0,T]$, $x\in\mathbb{R}^d$ *z*

(a) $\vartheta(t)=\ln\left(2+[h^{-1}(1/t)]^{-1}\right)$ *jeśli* $\alpha_h=1$,

(b) $\vartheta(t)=t\,[h^{-1}(1/t)]^{-1}$ *jeśli* (12) *jest spełnione dla* $0<\alpha_h\leqslant\beta_h<1$.

**Lemat 16** (Lemma 5.7 w [H4])**.** *Załóżmy* (Q0)*. Niech* $\beta_1 \in [0,\beta]\cap[0,\alpha_h)$*. Dla każdego* $T>0$ *istnieje stała* $c$ *taka, że dla wszystkich* $t\in(0,T]$, $x\in\mathbb{R}^d$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{L}_x^{\mathfrak{K}_x}p^{\mathfrak{K}_y}(t,x,y)\,dy\right| \leqslant ct^{-1}\left[h^{-1}(1/t)\right]^{\beta_1}\,.$$

Zwróćmy w tym miejscu uwagę, że musimy kontrolować jak stałe zależą od początkowych parametrów naszego modelu, ponieważ jest to niezbędne podczas wykonywania konstrukcji i znajdowania kluczowych własności rozwiązania fundamentalnego.

Jak już wcześniej zapowiedziano, analizując przykłady, porównamy (25) i (26) z lewą stroną nierówności (15). Przypomnijmy ponownie, że (13) było założone w przypadku niesymetrycznym w [32] i [12] dla $\nu(r)=r^{-d-1}$. Jak zobaczymy w Przykładzie 17, założenie, że zachodzą nierówności (25) i (26), jest mniej restrykcyjne.

**Przykład 17** (Example 1 w [H4])**.** Niech $\nu(r)=r^{-d-1}$. Wtedy (11) oraz (12) zachodzi z $\alpha_h=\beta_h=1$. Ponieważ $h(r)=r^{-1}h(1)$, nierówności (25) i (26) przyjmują postać

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left|\int_{r\leqslant|z|<1} z\,\kappa(x,z)J(z)dz\right| \leqslant c\,, \qquad r\in(0,1],$$

$$\left|\int_{r\leqslant|z|<1} z\left[\kappa(x,z)-\kappa(y,z)\right]J(z)dz\right| \leqslant c|x-y|^{\beta}\,, \qquad r\in(0,1].$$

Zatem, jeśli $J(z)$ oraz $\kappa(x,z)$ są takie, że (8), (9), (10) oraz powyższe nierówności zachodzą, to założenie (Q1) jest spełnione. Zauważmy też, że

$$\int_{r\leqslant|z|<1}|z|\nu(|z|)dz = c\log(1/r).$$

W ramach naszych założeń możemy rozpatrywać inne ciekawe operatory.

**Przykład 18** (Example 2 w [H4]). Niech $\nu(r) = r^{-d-1}\log(2+1/r)$. Wtedy (11) zachodzi z $\alpha_h = 1$, nie zachodzi dla żadnej $\alpha_h > 1$. Ponadto (12) jest spełnione dla każdej $\beta_h > 1$, ale nie z $\beta_h = 1$. Tutaj $\nu(r)$ jest porównywalne z $r^{-d}h(r)$, zobacz [H1, Lemma 5.3 oraz 5.4]. Zatem (25) oraz (26) pozwalają odpowiednio na logarytmiczny wzrost gdy $r \to 0$:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left|\int_{r\leqslant|z|<1} z\,\kappa(x,z)J(z)dz\right| \leqslant c\log(2+1/r)\,, \qquad r\in(0,1],$$
$$\left|\int_{r\leqslant|z|<1} z\left[\kappa(x,z)-\kappa(y,z)\right]J(z)dz\right| \leqslant c|x-y|^{\beta}\log(2+1/r)\,, \qquad r\in(0,1].$$

Dlatego, jeśli $J(z)$ oraz $\kappa(x,z)$ są takie, że (8), (9), (10) oraz powyższe nierówności zachodzą, to założenie (Q1) jest spełnione. W tym przykładzie, dla małych $r$,

$$\int_{r\leqslant|z|<1}|z|\nu(|z|)dz \qquad \text{jest porównywalne z} \qquad [\log(2+1/r)]^2\,.$$

Następny fakt pokazuje, w jaki sposób regularność współczynnika względem $z$ w pobliżu zera może prowadzić do (25) i (26). Jest to uogólnienie [H5, Fact 2.9].

**Fakt 19.** *Załóżmy, że* (7)–(10) *zachodzą oraz* $J(z)=J(-z)$ *dla wszystkich* $|z|<1$. *Przypuśćmy, że* (11) *zachodzi z* $\alpha_h \geqslant 1$ *oraz*

$$\tilde\kappa(x,z) = \kappa(x,z)-\kappa(x,-z)$$

*jest takie, że dla pewnych* $c\in(0,\infty)$, $\eta\in(0,1]$ *oraz wszystkich* $x,y\in\mathbb{R}^d$, $|z|<1$

$$|\tilde\kappa(x,z)|\leqslant c\,|z|^{\eta}\,, \qquad\qquad |\tilde\kappa(x,z)-\tilde\kappa(y,z)|\leqslant c\,|x-y|^{\beta}|z|^{\eta}\,.$$

*Wtedy założenie* (Q1) *jest spełnione.*

Weryfikacja i znaczenie (25) i (26) redukują się do jednego tylko całkowania, jeśli operator rozważany w naszym przypadku spełnia warunek $0<\alpha_h\leqslant\beta_h<1$.

**Fakt 20.** *Załóżmy, że* (7)–(12) *zachodzą oraz* $0<\alpha_h\leqslant\beta_h<1$. *Wtedy* (25) *oraz* (26) *zachodzą wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich* $x\in\mathbb{R}^d$

$$\int_{|z|<1} z\,\kappa(x,z)J(z)dz = 0\,. \tag{27}$$

Wynika z tego, że (25) i (26) – nietrywialne dla przypadku krytycznego – dla operatorów o rzędzie ograniczonym z góry przez liczbę ściśle mniejszą niż jeden powodują, że operator (1) przyjmuje postać operatora (2). Dzieje się tak, ponieważ kompensator jest dobrze zdefiniowany i równy zero.

### 4.3.3 Artykuł [H5]

W tym artykule rozważamy

$$\mathcal{L}f(x) = b(x)\cdot\nabla f(x) + \int_{\mathbb{R}^d}\Big(f(x+z)-f(x)-\mathbb{1}_{|z|<1}\left<z,\nabla f(x)\right>\Big)\kappa(x,z)J(z)dz\,. \tag{28}$$

Podobnie jak wcześniej, najbardziej interesuje nas sytuacja, w której odwzorowanie dane $z\mapsto\kappa(x,z)J(z)$ jest niesymetryczne. Jednym z powodów do przeprowadzenia tych badań był fakt, że – pomimo dużego zaangażowania sił w prace nad operatorami nielokalnymi i dynamicznie rosnącej literatury – następująca ważna rodzina operatorów wciąż nie była w pełni objęta istniejącymi wynikami. Niech $b \equiv 0$ oraz $J(z) = |z|^{-d-1}$ w (28), czyli

$$\mathcal{L}f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Big( f(x+z) - f(x) - \mathbb{1}_{|z|<1} \langle z, \nabla f(x) \rangle \Big) \frac{\kappa(x,z)}{|z|^{d+1}} dz \tag{29}$$

i przyjmijmy jedynie, że spełnione są warunki (9) i (10). Należy zwrócić uwagę, że dostępne w [12,32,41] lub [H4] twierdzenia wymagają dodatkowych założeń dotyczących współczynnika $\kappa$, co wyklucza niektóre naturalne przykłady. Wyniki pracy [H5] eliminują te ograniczenia i konstruujemy oraz szacujemy półgrupę $(P_t)_{t>0}$, zobacz Przykład 26. Oczywiście pozwalają one również na zbadanie innych interesujących operatorów. Podkreślmy też, że ogólna funkcjonalno-analityczna metoda opracowana w rozdziale 3 pracy [H5] powinna móc być zastosowana do innych przybliżeń rzędu zerowego $P_t^0$ [51], choć już dla wyboru $P_t^0$ wynikającego z tzw. zamrażania współczynników na końcu otrzymujemy nowe wyniki dla miar niesymetrycznych.

Teraz sformułujemy warunki, które zostaną użyte w założeniach. Niech $b\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. Dla $x \in \mathbb{R}^d$ i $r > 0$ definiujemy efektywny dryf wzorem

$$b_r^x := b(x) + \int_{\mathbb{R}^d} z \left( \mathbb{1}_{|z|<r} - \mathbb{1}_{|z|<1} \right) \kappa(x,z) J(z) dz \,.$$

Rozważmy istnienie stałej $\sigma \in (0,1]$ takiej, że dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^d$

$$|b_r^x| \leqslant c_\kappa r^\sigma h(r) \,, \qquad r \in (0,1] \,. \tag{30}$$

Następnie niech $N_0 \in \mathbb{N}$, $\epsilon_j \in (0,1]$ oraz $s_j \in (0,1]$ będą takie, że

$$|b_r^x - b_r^y| \leqslant c_\kappa \sum_{j=1}^{N_0} |x-y|^{\epsilon_j} \, r^{s_j} h(r) \,, \qquad |x-y| \leqslant 1, \, r \in (0,1] \,. \tag{31}$$

Alternatywnie do (31) rozważamy

$$|b_r^x - b_r^y| \leqslant c_\kappa \sum_{j=1}^{N_0} (|x-y|^{\epsilon_j} \wedge 1) \, r^{s_j} h(r) \,, \qquad x,y \in \mathbb{R}^d, \, r \in (0,1] \,. \tag{31*}$$

Zauważmy, że nierówność (30) z $b \equiv 0$ i $\sigma = 1$ prowadzi do (25). Podobnie (31*) dla $b \equiv 0$ i $s_j = 1$ sprowadza się do (26). Bez odnoszenia się do konkretnych wyników, nasze założenia są mniej ograniczające niż w [H1] i [H4]. W szczególności obejmują one (Q0), patrz [H5, Remark 2.2(iv)]. Bardziej szczegółowa dyskusja jest przeprowadzona w [H5, Remarks 2.1, 2.2 i 2.3].

**Definicja 21.** Definiujemy następujące dwa zbiory warunków:

(**A**): (7)–(11) zachodzą; (30) i (31) zachodzą z

$$\underset{j=1,\ldots,N_0}{\forall} \quad \alpha_h \wedge (\sigma\epsilon_j) + s_j - 1 > 0 \qquad \text{oraz} \qquad \alpha_h + \sigma - 1 > 0 \,.$$

(**A***): (7)–(11) zachodzą; (30) i (31*) zachodzą z

$$\underset{j=1,\ldots,N_0}{\forall} \quad \alpha_h \wedge (\sigma\epsilon_j) + s_j - 1 > 0 \,.$$

Aby przedstawić główne wyniki, posłużymy się pojęciem jądra.

**Definicja 22.** Powiemy, że $\mu$ *jądrem* na czasoprzestrzeni, jeśli dla dowolnych $(s,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ oraz dowolnego ograniczonego przedziału $I \subset \mathbb{R}$ odwzorowanie

$$E \longmapsto \mu(s,x,E)$$

jest (skończoną) miarą znakowaną na $\mathcal{B}(I \times \mathbb{R}^d)$ – $\sigma$-ciało zbiorów borelowskich dla $I \times \mathbb{R}^d$.

Najpierw pokażemy jednoznaczność rozwiązania fundamentalnego dla równania $\partial_t u = \mathcal{L}u$, gdzie $\mathcal{L}$ jest podany przez (28).

**Twierdzenie 23** (Theorem 2.4 w [H5])**.** *Załóżmy* (**A**) *lub* (**A***)*. Niech* $(s,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ *będzie ustalone. Przypuśćmy, że* $\mu_1$ *oraz* $\mu_2$ *są jądrami na czasoprzestrzeni takimi, że dla każdego* $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$

$$\iint\limits_{(s,\infty)\times\mathbb{R}^d} \mu_j(s,x,dudz)\Big[\partial_u \phi(u,z) + \mathcal{L}_z\phi(u,z)\Big] = -\phi(s,x)\,, \qquad j=1,2\,.$$

*Wtedy dla każdego ograniczonego przedziału* $I \subset (s,\infty)$ *i każdego zbioru* $E \in \mathcal{B}(I \times \mathbb{R}^d)$ *mamy*

$$\mu_1(s,x,E) = \mu_2(s,x,E)\,.$$

W drugim wyniku rozstrzygamy kwestię istnienia rozwiązania.

**Twierdzenie 24** (Theorem 2.5 w [H5])**.** *Załóżmy* (**A**) *lub* (**A***)*. Istnieje jądro* $\mu$ *na czasoprzestrzeni takie, że dla wszystkich* $(s,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ *oraz* $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$

$$\iint\limits_{(s,\infty)\times\mathbb{R}^d} \mu(s,x,dudz)\Big[\partial_u \phi(u,z) + \mathcal{L}_z\phi(u,z)\Big] = -\phi(s,x)\,.$$

*Ponadto istnieje borelowska funkcja* $p\colon (0,\infty)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *taka, że dla każdego ograniczonego przedziału* $I \subset (s,\infty)$ *i każdego zbioru* $E \in \mathcal{B}(I \times \mathbb{R}^d)$ *mamy*

$$\mu(s,x,E) = \iint\limits_E p(u-s,x,z)\,dzdu\,.$$

Następnie w [H5, Theorem 2.6] analizujemy związaną z $p$ półgrupę i jej generator. W [H5, Theorem 4.26] wyznaczamy $\frac{d}{dt}P_t f = \mathcal{A}P_t f$ i podajemy kilka reprezentacji tej pochodnej. Dwie z nich wyrażone są za pomocą operatora $\mathcal{L}$, patrz [H5, Theorem 4.23, Corollary 4.25 i (70)]. W [H5, Theorem 2.7] przy dodatkowych założeniach podajemy górne oszacowania dla $p(t,x,y)$.

Poniżej podamy dwa bardzo konkretne przykłady. Powód, dla którego założenie (**A***) jest spełnione w tych przykładach ma charakter ogólny, przedstawiony w następującym fakcie, por. [H5, Remark 2.3(b)(ii)].

**Fakt 25.** *Załóżmy, że* (7)*–*(11) *są spełnione i* $b \equiv 0$*. Jeśli* $\alpha_h \in (0,1)$ *można wybrać dowolnie blisko 1, to warunek* (**A***) *jest spełniony.*

**Przykład 26** (Example 1 w [H5])**.** Niech $d = 1$, $J(z) = \nu(|z|) = |z|^{-2}$. Wtedy $h(r) = r^{-1}h(1)$, zatem (11) oraz (12) zachodzą z $\alpha_h = \beta_h = 1$. Przypuścimy, że $b \equiv 0$ i $\kappa(x, z) = a(x)k(z)$, gdzie

$$a(x) = 1 + \sqrt{x}\,\mathbb{1}_{(0,1)} + \mathbb{1}_{[1,\infty)}\,, \qquad k(z) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{(-\infty,0)} + \frac{3}{2}\mathbb{1}_{[0,\infty)}\,.$$

Wtedy ($\mathbf{A}^*$) jest spełnione z uwagi na Fakt 25 lub bezpośrednio przez spostrzeżenie, że dla każdego $\sigma, s \in (0, 1)$ istnieje $c > 0$ takie, że dla wszystkich $r \in (0, 1]$

$$|b_r^x| = |a(x)| \log(1/r) \leqslant c r^\sigma h(r)\,,$$

$$|b_r^x - b_r^y| = |a(x) - a(y)| \log(1/r) \leqslant c(|x - y|^{1/2} \wedge 1)\, r^s h(r)$$

więc można je dobrać tak, aby $(\sigma/2) + s - 1 > 0$. Zatem dla powyższych współczynników operatora (28) możemy zastosować Twierdzenia 23 oraz 24. Następnie [H5, Theorem 2.7] daje

$$p(t, x, y) \leqslant c(1 + t^{s-1}(|y - x|^{1/2} \wedge 1)) \left( t^{-1} \wedge \frac{t}{|y - x - a(y)t \log(\frac{1}{th(1)})|^2} \right)$$

dla wszystkich $t \in (0, 1/h(1)]$, $x, y \in \mathbb{R}$. Dokładne oszacowania $p$ wciąż nie są znane.

Drugi konkretny przykład to szczególny przypadek [H5, Example 5], gdzie dla małych $r$

$$\int_{r\leqslant|z|<1} |z|\nu(|z|)dz \quad \text{jest porównywalne z} \quad \log[\log(2 + 1/r)]\,,$$

co pokazuje najgorszy możliwy wzrost realizujący (15). W Przykładzie 27 pokazujemy, że kasowania mogą poprawić parametry w ($\mathbf{A}^*$), nawet jeśli miara jest niesymetryczna. W tym szczególnym przypadku będą one dawać (30) i ($31^*$) z $\sigma = N_0 = 1$ oraz $\epsilon_1 = \beta$, $s_1 = 1$. Innymi słowy, będziemy mieli (25) i (26). Jednakże, ponieważ rząd operatora będzie nieco (logarytmicznie) poniżej jedynki, żadne z założeń rozważanych w [H1] czy [H4] nie będzie spełnione. Jednocześnie, ponieważ

$$\int_{|z|<1} |z|\nu(z)dz = \infty\,,$$

pomimo $b \equiv 0$ i $\lim_{r\to 0^+} |b_r^x| = 0$ (kasowania), nie możemy pisać ani używać (27) w celu całkowitego usunięcia kompensatora. Choć moglibyśmy traktować operator (28) jako (2) w ich słabych wersjach (jako wartości główne całek), nie możemy tego zrobić w silnym sensie, bo (2) nie jest dobrze określony.

**Przykład 27** (Example 2 w [H5])**.** Niech $d = 1$ oraz $J(z) = \nu(|z|) = |z|^{-2}\varphi(|z|)$, gdzie

$$\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{\log(1/r)}, & r \leqslant 1/2\,, \\[2ex] \dfrac{1}{\log(2)}, & r > 1/2\,. \end{cases}$$

Wtedy $h(r)$ jest porównywalne z $r^{-1}\varphi(r)$ dla $r \in (0, 1]$. Zatem (11) zachodzi dla każdej $\alpha_h < 1$, ale nie z $\alpha_h = 1$. Ponadto (12) jest spełnione z $\beta_h = 1$, ale nie zachodzi z żadną

$\beta_h < 1$. Załóżmy, że $b \equiv 0$ oraz $\kappa(x,z) = a(x)k(z)$, gdzie dla pewnych stałych $c > 0$, $\beta \in (0,1]$ oraz wszystkich $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$0 < c^{-1} \leqslant a(x) \leqslant c < \infty\,, \qquad\qquad |a(x) - a(y)| \leqslant c|x-y|^{\beta}\,,$$

$$k(z) = 1 + \begin{cases} 1 & z \in (2^{-2n}, 2^{-2n+1}], \\ k_n & z \in [-2^{-2n}, -2^{-2n-1}), \\ 0 & poza, \end{cases} \qquad\qquad n = 1, 2, \ldots$$

oraz

$$k_n = \frac{\log(1 + 1/(2n-1))}{\log(1 + 1/(2n))}\,.$$

Wtedy (7)–(11) zachodzą oraz dla $r \in (0, 1/2]$ mamy

$$\left| \int_{r \leqslant |z| < 1} z\, k(z) J(z) dz \right| = \left| \int_r^{1/2} \Big(k(z) - k(-z)\Big) \frac{1}{z \log(z)}\, dz \right| \leqslant \frac{c}{\log(1/r)}\,.$$

W konsekwencji, dla $r \in (0,1]$ oraz $x, y \in \mathbb{R}$

$$|b_r^x| \leqslant c\, \varphi(r) \leqslant c\, r h(r)\,,$$

$$|b_r^x - b_r^y| = |a(x) - a(y)|\, \varphi(r) \leqslant c(|x-y|^{1/2} \wedge 1)\, r h(r)\,.$$

Podsumowując, ($\mathbf{A}^*$) jest spełnione z $\sigma = N_0 = 1$ oraz $\epsilon_1 = \beta$, $s_1 = 1$. Co więcej, z [H5, Corollary 2.8] oraz [H1, Corollary 5.10], dla wszystkich $t \in (0, 1/h(1)]$, $x, y \in \mathbb{R}$

$$p(t,x,y) \leqslant c\Upsilon_t(y-x)\,.$$

W [H5, Example 3] pokazujemy, że korzystanie z sumy po prawej stronie wyrażeń (31) oraz (31*) zapewnia elastyczność, która może być kluczowa podczas weryfikacji warunków na parametry w ($\mathbf{A}$) lub ($\mathbf{A}^*$).

W ostatnim przykładzie proponujemy inny interesujący operator, który może być rozważany, aby poddać nasze założenia i wyniki próbie. Pomysł konstruowania oscylujących symboli (w naszym kontekście związanych i porównywalnych z funkcją $h$) można odnaleźć w [20, Example 1.1.15].

**Przykład 28** (Example 7 w [H5])**.** Niech $\nu(|z|) = |z|^{-d-1}\varphi(|z|)$, gdzie

$$\varphi(r) := \begin{cases} c_k\, r^{-1/4}\,, & r \in [((2k+1)!)^{-1}, ((2k)!)^{-1}]\,, \\ c_k \sqrt{(2k+1)!}\, r^{1/4}\,, & r \in [((2k+2)!)^{-1}, ((2k+1)!)^{-1}] \end{cases}$$

oraz $c_k = ((2k)!!)^{-1/2}$. Kładziemy $\varphi(r) = 0$ dla $r > 1$. Wtedy $h(r)$ jest porównywalne z $r^{-1}\varphi(r)$ dla $r \in (0,1]$. Mamy również, że (11) jest spełnione z $\alpha_h = 3/4$, ale nie zachodzi dla żadnej $\alpha_h > 3/4$, jednocześnie (12) jest spełnione z $\beta_h = 5/4$, ale nie zachodzi dla żadnej $\beta_h < 5/4$. Rząd odpowiadającego operatora waha się od 3/4 do 5/4. Co ciekawe, tutaj $\liminf_{r \to 0^+} \varphi(r) = 0$ i $\limsup_{r \to 0^+} \varphi(r) = \infty$.

Przypomnijmy, że w artykule [H5] omawiamy konstrukcję parametrysy w ogólnym funkcjonalno-analitycznym kontekście, opartym o założenia (S1) oraz (S2) i o hipotezy (H0) – (H4). W rozdziale 3.1 pracy [H5], po skonstruowaniu niezbędnych obiektów, podajemy następujący lemat, który umożliwia dalszą analizę tzw. *przybliżonego rozwiązania*. Dla $\tau \in [0,1]$ definiujemy

$$\Omega_{[\tau,1]} := \{(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^2 \colon \; t \in [\tau,1], \; \varepsilon \geqslant 0 \quad \text{oraz} \quad t+\varepsilon \leqslant 1\} .$$

**Lemat 29.** *Załóżmy* (S1) *oraz* (S2)*. Przypuścimy, że* (H0) – (H4) *zachodzą. Wtedu dla każdej $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ poniższe odwzorowania są jednostajnie ciągłe w $(C_0(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$:*

1. $t \longmapsto P_t^0 f$ *na* $[0,1]$,
2. $(t,\varepsilon) \longmapsto \int_0^t P^0_{t-s+\varepsilon} Q_s f\, ds$ *na* $\Omega_{[0,1]}$,
3. $t \longmapsto Q_t^0 f$ *na* $[\tau,1]$ *dla każdego* $\tau \in (0,1]$,
4. $(t,\varepsilon) \longmapsto \int_0^t Q^0_{t-s+\varepsilon} Q_s f\, ds$ *na* $\Omega_{[\tau,1]}$ *dla każdego* $\tau \in (0,1]$,
5. $(t,\varepsilon) \longmapsto P^0_\varepsilon Q_t f$ *na* $[\tau,1]\times[0,1]$ *dla każdego* $\tau \in (0,1]$.

Następnie korzystamy z dwóch kolejnych hipotez (H5) i (H6) w celu systematycznego udowodnienia własności skonstruowanych obiektów, które są sformułowane w (CoJ1)–(CoJ5). Przybliżone rozwiązanie jest również wykorzystane do udowodnienia jednoznaczności słabego rozwiązania fundamentalnego, unikając w ten sposób problemów związanych z brakiem regularności, zobacz rozdział 4.5 w [H5].

W naszych zastosowaniach ogólnego podejścia nie możemy uniknąć wewnętrznego dryfu, który pojawia się już w początkowym oszacowaniu, patrz [H5, Lemma C.1],

$$|\partial_x^{\mathbb{\beta}} p^{\mathfrak{K}_w}(t,x,y)| \leqslant c^{\,-|\mathbb{\beta}|} \Upsilon_t(y-x-tb^w_{r_t}) .$$

Potrzebujemy również nowych nierówności splotowych. Na przykład dla odpowiednio dobranych parametrów, patrz [H5, Lemma B.7],

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (t-s)^{1-\theta_1} \bar{H}^{\beta_1}_{\gamma_1}(t-s,x,z)\, s^{1-\theta_2} \bar{\bar{H}}^{\beta_2}_{\gamma_2}(s,z,y) dz ds \\
&\qquad \leqslant c\, t^{2-\theta_1-\theta_2} \left( \bar{\bar{H}}^{0}_{\gamma_1+\gamma_2+n_1} + \bar{\bar{H}}^{0}_{\gamma_1+\gamma_2+n_2} + \bar{\bar{H}}^{\beta_2}_{\gamma_1+\gamma_2+m_1} + \bar{\bar{H}}^{\beta_1}_{\gamma_1+\gamma_2+m_2} \right)(t,x,y) ,
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\bar{H}^\beta_\gamma(t,x,y) &:= [h^{-1}(1/t)]^\gamma \left(|y-x|^\beta \wedge 1\right) t^{-1} \Upsilon_t(y-x-tb^x_{r_t}) , \\
\bar{\bar{H}}^\beta_\gamma(t,x,y) &:= [h^{-1}(1/t)]^\gamma \left(|y-x|^\beta \wedge 1\right) t^{-1} \Upsilon_t(y-x-tb^y_{r_t}) .
\end{aligned}$$

## 4.4 Opis wkładu w publikacje

Poniżej opisuję mój wkład w powstanie artykułów stanowiących osiągnięcie.

[H5] Zaproponowałem koncepcję badawczą pracy. Jestem autorem dowodów lub pełniłem aktywną rolę w dowodzeniu większości wyników, nakierowując współautora, który jest doktorantem - wiele z nich było omawianych ze szczegółami podczas wspólnych spotkań na Zoomie w trakcie tzw. lock-down'u związanego z pandemią Covid-19.

[H4] Praca samodzielna.

[H3] Mój wkład dotyczy głównie rozdziału 4 (dolne oszacowania) i rozdziału 5 (górne oszacowania wykorzystane do badania operatorów o zmiennych współczynnikach).

[H2] Mój wkład dotyczy głównie wyników w rozdziałach 4 i 5 (o dekompozycji i dolnych oszacowaniach). Współautor zaproponował dowody równoważności (rozdział 3). Wszystkie wyniki były przedmiotem wspólnych inspirujących rozmów.

[H1] Jestem autorem większości dowodów pracy, w szczególności, kluczowych zmian w krokach pomocniczych, które doprowadziły do wzmocnienia końcowych wyników. Współautor uczestniczył głównie w dowodach dolnych oszacowań (rozdział 4.4).

# 5 Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową w więcej niż jednej uczelni, w szczególności zagranicznej.

Obok badań, których wyniki składają się na osiągnięcie, prowadziłem też inne, których pierwsze wyniki pojawiły się w pracy [6] i które kontynuowałem w latach 2014–2017 podczas pobytu na Universität Bielefeld. Dotyczyły one zaburzeń schrödingerowskich jąder ciepła, z pewnym naciskiem na zaburzenia jądro Gaussa-Weierstrassa. W efekcie powstały prace [2], [27], [3] afiliowane do Universität Bielefeld, a później również praca [31] napisana na Politechnice Wrocławskiej. Tematyka ta związana jest z nierównościami 3G i 4G dla jąder ciepła i ich wpływem na istnienie *zwykłych* oraz *ostrych* oszacowań (gaussowskich) rozwiązań fundamentalnych równań parabolicznych $\partial_t u = Lu + Vu$, gdzie $V$ jest potencjałem. Gdy $L = \Delta$, to powszechnie znany jest związek między potencjałami $V$ z klasy Kato i zwykłymi oszacowaniami gaussowskimi. Z tego powodu w pracy [27] zostały bardzo dokładnie zbadane klasy Kato dla wszystkich procesów Lévy'ego. W pracach [3], [31] wykazano podobne związki między globalnymi i lokalnymi w czasie ostrymi oszacowaniami gaussowskimi a odpowiednio zdefiniowanymi klasami potencjałów $V$. Nielokalne operatory $L$ były badane w [2].

Podczas mojego pobytu w Bielefeld powstały także ważne fragmenty prac [H1], [H2] oraz [H3], co zosatło ujęte w tych pracach przez wskazanie finansowania przez German Science Foundation (SFB 701).

# 6 Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę.

**Osiągnięcia dydaktyczne:**

- Od momentu zatrudnienia, tzn. od 2010 roku (pracowałem nad materiałem do rozprawy doktorskiej będąc asystentem), poprowadziłem ponad sto kursów (łącznie ćwiczń i wykładów)
  - kursy ogólnouczelniane:
    Matematyka (studia magisterskie), Analiza matematyczna 1 oraz 2, Algebra (różne wersje), Mathematical analysis I (po Angielsku), Math - Analysis 1 (po Angielsku);
  - kursy na kierunkach matematycznych:
    Analiza rzeczywista i zespolona (studia magisterskie), Analiza funkcjonalna, Analiza funkcjonalna i topologia (studia magisterskie), Równania różniczkowe zwyczajne, Analiza matematyczna M1, Analiza matematyczna M2, Wstęp do logiki i teorii zbiorów, Uczenie maszynowe (laboratoria).
- Prowadziłem ćwiczenia podczas do kursu podczas Potential Theory Workshop: Intersections in Harmonic Analysis, Partial Differential Equations and Probability, Guanajuato, Meksyk, X 2023
- Jestem promotorem pomocniczym doktoratu Jakuba Mineckiego.
- Byłem promotorem pomocniczym doktoratu Łukasza Leżaja (2021).
- Byłem promotorem pracy licencjackiej Witolda Barcza (2022).

- Byłem promotorem pracy magisterskiej Jakuba Mineckiego (2020).

**Osiągnięcia organizacyjne:**

- W czerwcu 2020 roku, wspólnie z Damirem Kinzebulatovem (Laval University), założyłem i nadal prowadzę seminarium ***Non-local operators, probability and singularities***. W roku 2022 dołączył do nas Stéphan Menozzi (Université d'Évry Val d'Essonne). Seminarium ma zasięg międzynarodowy, a w jego ramach odbyło się już około 90 wykładów, z których większość została zarejestrowana w formie nagrania wideo, co stanowi dużą wartość edukacyjną i dokumentalną. Spotkania seminarium wciąż odbywają się regularnie pozwalając na utrzymanie naukowych kontaktów społeczności zajmującej się operatorami nielokalnymi. Strona seminarium: https://researchseminars.org/seminar/NonLocalOperators

- Byłem członkiem komitetu organizacyjnego następujących konferencji międzynarodowych: *Probability and Analysis* (Będlewo 2017), *Joint meeting of UMI-SIMAI-PTM* (Wrocław 2018), *Nonlocal Operators and Markov Processes III* (Będlewo 2023), *Probability and Analysis* (Będlewo 2024).

- W latach 2012–2015 byłem członkiem Rady Wydziału Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej.

- W roku 2014 pomagałem w organizacji odbywających się we Wrocławiu finałów krajowych eliminacji do *Międzynarodowych Mistrzostw w Grach Matematycznych i Logicznych*, których zwycięzcy biorą udział w międzynarodowym finale w Paryżu.

- W roku 2009 byłem współzałożycielem działającego do dzisiaj studenckiego *Koła naukowego matematyki* Politechniki Wrocławskiej.

**Osiągnięcia popularyzujące naukę:**

- W roku 2023 wygłosiłem referat podczas *Pojedynków Matematycznych*, corocznych zawodach organizowanych przez *Koło naukowe matematyki* Politechniki Wrocławskiej.

- W dniach 4.12.2023 oraz 18.12.2023 poprowadziłem wykłady w Liceum Ogólnokształcącym nr 7 we Wrocławiu w ramach współpracy między liceami a Politechniką Wrocławską.

# 7 Inne ważne informacje dotyczące kariery zawodowej.

- W latach 2019 oraz 2021 otrzymałem Nagrody Rektora Politechniki Wrocławskiej za wybitny wkład w rozwój uczelni.

- W semestrze zimowym 2018-19 otrzymałem dotację od Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego dla młodych naukowców na realizację zadań badawczych.

- W roku 2010 zdobyłem I-szą nagrodę w XLIV ogólnopolskim Konkursie PTM na najlepsza pracę studencką z teorii prawdopodobieństwa i zastosowań matematyki.

- W roku akademickim 2009-10 otrzymywałem stypendium Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego za osiągnięcia w nauce.

# Bibliografia


[1] O. E. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch, and S. I. Resnick, editors. *Lévy processes*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2001. Theory and applications.

[2] K. Bogdan, Y. Butko, and K. Szczypkowski. Majorization, 4G theorem and Schrödinger perturbations. *J. Evol. Equ.*, 16(2):241–260, 2016.

[3] K. Bogdan, J. Dziubański, and K. Szczypkowski. Sharp Gaussian estimates for heat kernels of Schrödinger operators. *Integral Equations Operator Theory*, 91(1):Paper No. 3, 20, 2019.

[4] K. Bogdan, T. Grzywny, and M. Ryznar. Density and tails of unimodal convolution semigroups. *J. Funct. Anal.*, 266(6):3543–3571, 2014.

[5] K. Bogdan and T. Jakubowski. Estimates of heat kernel of fractional Laplacian perturbed by gradient operators. *Comm. Math. Phys.*, 271(1):179–198, 2007.

[6] K. Bogdan and K. Szczypkowski. Gaussian estimates for Schrödinger perturbations. *Studia Math.*, 221(2):151–173, 2014.

[7] K. Bogdan, P. Sztonyk, and V. Knopova. Heat kernel of anisotropic nonlocal operators. *Doc. Math.*, 25:1–54, 2020.

[8] B. Böttcher, R. Schilling, and J. Wang. *Lévy matters. III*, volume 2099 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Cham, 2013. Lévy-type processes: construction, approximation and sample path properties, With a short biography of Paul Lévy by Jean Jacod, Lévy Matters.

[9] A. V. Chechkin, V. Y. Gonchar, J. Klafter, and R. Metzler. Fundamentals of Lévy flight processes. In Coffey, WT and Kalmykov, YP, editor, *Fractals, diffusion, and relaxation in disordered complex systems, Part B*, volume 133 of *Advances in Chemical Physics*, pages 439–496. 2006.

[10] Z.-Q. Chen and X. Zhang. Heat kernels and analyticity of non-symmetric jump diffusion semigroups. *Probab. Theory Related Fields*, 165(1-2):267–312, 2016.

[11] Z.-Q. Chen and X. Zhang. Heat kernels for non-symmetric non-local operators. In *Recent developments in nonlocal theory*, pages 24–51. De Gruyter, Berlin, 2018.

[12] Z.-Q. Chen and X. Zhang. Heat kernels for time-dependent non-symmetric stable-like operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 465(1):1–21, 2018.

[13] Z.-Q. Chen and X. Zhang. Heat kernels for time-dependent non-symmetric mixed Lévy-type operators. *J. Funct. Anal.*, 285(2):Paper No. 109947, 58, 2023.

[14] F. G. Dressel. The fundamental solution of the parabolic equation. *Duke Math. J.*, 7:186–203, 1940.

[15] J. M. Drin. A fundamental solution of the Cauchy problem for a class of parabolic pseudodifferential equations. *Dokl. Akad. Nauk Ukrain. SSR Ser. A*, (3):198–203, 284, 1977.

[16] J. M. Drin and S. D. Eidelman. Construction and investigation of classical fundamental solutions to the Cauchy problem of uniformly parabolic pseudodifferential equations. *Mat. Issled.*, (63):18–33, 180–181, 1981. Boundary value problems for partial differential equations.

[17] K. Du and X. Zhang. Optimal gradient estimates of heat kernels of stable-like operators. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 147(8):3559–3565, 2019.

[18] S. D. Eidelman. *Parabolic systems.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969. Translated from the Russian by Scripta Technica, London.

[19] S. D. Eidelman, S. D. Ivasyshen, and A. N. Kochubei. *Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type*, volume 152 of *Operator Theory: Advances and Applications.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2004.

[20] W. Farkas, N. Jacob, and R. L. Schilling. Function spaces related to continuous negative definite functions: $\psi$-Bessel potential spaces. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, 393:62, 2001.

[21] W. Feller. Zur Theorie der stochastischen Prozesse. (Existenz- und Eindeutigkeitssätze). *Math. Ann.*, 113:113–160, 1936.

[22] A. Friedman. *Partial differential equations of parabolic type.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964.

[23] M. Fukushima, Y. Oshima, and M. Takeda. *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, volume 19 of *De Gruyter Studies in Mathematics.* Walter de Gruyter & Co., Berlin, extended edition, 2011.

[24] M. Gevrey. Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 152:428–431, 1911.

[25] T. Grzywny. On Harnack inequality and Hölder regularity for isotropic unimodal Lévy processes. *Potential Anal.*, 41(1):1–29, 2014.

[26] T. Grzywny, M. Ryznar, and B. Trojan. Asymptotic behaviour and estimates of slowly varying convolution semigroups. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (23):7193–7258, 2019.

[27] T. Grzywny and K. Szczypkowski. Kato classes for Lévy processes. *Potential Anal.*, 47(3):245–276, 2017.

[28] J. Hadamard. Sur la solution fondamentale des équations aux dérivées partielles du type parabolique. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 152:1148–1149, 1911.

[29] W. Hoh. A symbolic calculus for pseudo-differential operators generating Feller semigroups. *Osaka J. Math.*, 35(4):789–820, 1998.

[30] N. Jacob. *Pseudo differential operators and Markov processes. Vol. I.* Imperial College Press, London, 2001. Fourier analysis and semigroups.

[31] T. Jakubowski and K. Szczypkowski. Sharp and plain estimates for Schrödinger perturbation of Gaussian kernel. *Journal d'Analyse Mathématique*, 2023, DOI: 10.1007/s11854-023-0299-7.

[32] P. Jin. Heat kernel estimates for non-symmetric stable-like processes. preprint 2017, arXiv:1709.02836.

[33] K. Kaleta and P. Sztonyk. Estimates of transition densities and their derivatives for jump Lévy processes. *J. Math. Anal. Appl.*, 431(1):260–282, 2015.

[34] K. Kaleta and P. Sztonyk. Small-time sharp bounds for kernels of convolution semigroups. *J. Anal. Math.*, 132:355–394, 2017.

[35] P. Kim and J. Lee. Heat kernels of non-symmetric jump processes with exponentially decaying jumping kernel. *Stochastic Process. Appl.*, 129(6):2130–2173, 2019.

[36] P. Kim, R. Song, and Z. Vondraček. Heat Kernels of Non-symmetric Jump Processes: Beyond the Stable Case. *Potential Anal.*, 49(1):37–90, 2018.

[37] V. Knopova. Compound kernel estimates for the transition probability density of a Lévy process in $\mathbb{R}^n$. *Teor. Ĭmovīr. Mat. Stat.*, (89):51–63, 2013.

[38] V. Knopova and A. Kulik. Intrinsic small time estimates for distribution densities of Lévy processes. *Random Oper. Stoch. Equ.*, 21(4):321–344, 2013.

[39] V. Knopova and A. Kulik. Intrinsic compound kernel estimates for the transition probability density of Lévy-type processes and their applications. *Probab. Math. Statist.*, 37(1):53–100, 2017.

[40] V. Knopova and A. Kulik. Parametrix construction of the transition probability density of the solution to an SDE driven by $\alpha$-stable noise. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 54(1):100–140, 2018.

[41] V. Knopova, A. Kulik, and R. L. Schilling. Construction and heat kernel estimates of general stable-like Markov processes. *Dissertationes Math.*, 569:1–86, 2021.

[42] V. P. Knopova, A. N. Kochubei, and A. M. Kulik. Parametrix methods for equations with fractional Laplacians. In *Handbook of fractional calculus with applications. Vol. 2*, pages 267–297. De Gruyter, Berlin, 2019.

[43] A. N. Kochubei. Parabolic pseudodifferential equations, hypersingular integrals and Markov processes. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 52(5):909–934, 1118, 1988.

[44] A. Kohatsu-Higa and L. Li. Regularity of the density of a stable-like driven SDE with Hölder continuous coefficients. *Stoch. Anal. Appl.*, 34(6):979–1024, 2016.

[45] V. Kolokoltsov. Symmetric stable laws and stable-like jump-diffusions. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 80(3):725–768, 2000.

[46] F. Kühn. *Lévy matters. VI*, volume 2187 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Cham, 2017. Lévy-type processes: moments, construction and heat kernel estimates, With a short biography of Paul Lévy by Jean Jacod, Lévy Matters.

[47] F. Kühn. Transition probabilities of Lévy-type processes: parametrix construction. *Math. Nachr.*, 292(2):358–376, 2019.

[48] T. Kulczycki, A. Kulik, and M. Ryznar. On weak solution of SDE driven by inhomogeneous singular Lévy noise. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 375(7):4567–4618, 2022.

[49] T. Kulczycki and M. Ryznar. Semigroup properties of solutions of SDEs driven by Lévy processes with independent coordinates. *Stochastic Process. Appl.*, 130(12):7185–7217, 2020.

[50] T. Kulczycki, M. Ryznar, and P. Sztonyk. Strong feller property for SDEs driven by multiplicative cylindrical stable noise. *Potential Anal.*, 55(1):75–126, 2021.

[51] A. M. Kulik. On weak uniqueness and distributional properties of a solution to an SDE with $\alpha$-stable noise. *Stochastic Process. Appl.*, 129(2):473–506, 2019.

[52] E. E. Levi. Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 24:275–317, 1907.

[53] W. Liu, R. Song, and L. Xie. Gradient estimates for the fundamental solution of Lévy type operator. *Adv. Nonlinear Anal.*, 9(1):1453–1462, 2020.

[54] S. Menozzi and X. Zhang. Heat kernel of supercritical nonlocal operators with unbounded drifts. *J. Éc. polytech. Math.*, 9:537–579, 2022.

[55] J. Picard. Density in small time for Levy processes. *ESAIM Probab. Statist.*, 1:357–389, 1995/97.

[56] W. E. Pruitt. The growth of random walks and Lévy processes. *Ann. Probab.*, 9(6):948–956, 1981.

[57] K.-i. Sato. *Lévy processes and infinitely divisible distributions*, volume 68 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2013. Translated from the 1990 Japanese original, Revised edition of the 1999 English translation.

[58] R. L. Schilling, P. Sztonyk, and J. Wang. Coupling property and gradient estimates of Lévy processes via the symbol. *Bernoulli*, 18(4):1128–1149, 2012.

[59] K. Szczypkowski. Regularity of fundamental solutions for Lévy-type operators. *Bull. Pol. Acad. Sci. Math.*, 71(2):169–191, 2023.

[60] P. Sztonyk. Estimates of densities for Lévy processes with lower intensity of large jumps. *Math. Nachr.*, 290(1):120–141, 2017.

[61] L. Xie and X. Zhang. Heat kernel estimates for critical fractional diffusion operators. *Studia Math.*, 224(3):221–263, 2014.