

# Autoreferat

## 1 Imię i nazwisko: Janusz Gajda

## 2 Posiadane dyplomy, stopnie naukowe lub artystyczne:

- 2014, dyplom doktora nauk matematycznych, Instytut Matematyki, Wydział Podstawowych Problemów Techniki, Politechnika Wroclawska. Temat rozprawy doktorskiej: *Modelowanie procesów anomalnej dyfuzji z wykorzystaniem rozkładów temperowanych stabilnych*. Promotor: prof. dr hab. Marcin Magdziarz
- 2011, dyplom magistra ekonomii matematycznej (economathematics), studia w języku angielskim w ramach European Consortium of Mathematics for Industry. Instytut Matematyki, Wydział Podstawowych Problemów Techniki, Politechnika Wroclawska. Temat pracy magisterskiej: *Statistical analysis of stock indices*. Promotor: prof. dr hab. Marcin Magdziarz
- 2010, ukończone podyplomowe studia pedagogiczne, Politechnika Wroclawska, promotor dr Magdalena Siuta
- 2009, dyplom magistra inżyniera matematyki, Instytut Matematyki, Wydział Podstawowych Problemów Techniki, Politechnika Wroclawska. Temat pracy magisterskiej: *Opcje koszykowe a lokaty strukturyzowane*. Promotor: prof. dr hab. Rafał Weron

## 3 Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych lub artystycznych:

- 2017-obecnie Uniwersytet Warszawski, Wydział Nauk Ekonomicznych, adiunkt
- 2015-2017 Politechnika Wroclawska, Wydział Matematyki, adiunkt<sup>1</sup>
- 2013-2015 Politechnika Wroclawska, Wydział Podstawowych Problemów Techniki, asystent
- 2010-2012 Starszy referent inżynierijno-techniczny w projekcie „Czujniki i sensory do pomiarów czynników stanowiących zagrożenia w środowisku -modelowanie i monitoring zagrożeń” nr: POIG.01.03.01-02-002/08, miejsce zatrudnienia: I-28, Politechnika Wroclawska, wymiar: 1/2 etatu

## 4 Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2021 r. poz. 478 z późn. zm.).

### (a) Cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych pod tytułem:

**Analiza własności wybranych procesów stochastycznych opartych o rozkłady gaussowskie, stabilne, temperowane  $\alpha$ -stabilne, ich subordynacja i rozszerzenia.**

### (b) Lista publikacji składających się na osiągnięcie naukowe:

- [H1] A. Kumar, N. S. Upadhye, A. Wyłomańska, J. Gajda, *Tempered Mittag-Leffler Lévy processes*, Communications in Statistics - Theory and Methods 48 (2) (2017) 396–411.
- [H2] J. Gajda, *Generalized Mittag-Leffler Lévy process and its connections to first passage times of Lévy subordinators*, Communications in Statistics - Theory and Methods (2020) 1–9.

<sup>1</sup>Zmiana miejsca zatrudnienia wynikała z przekształcenia się Instytutu Matematyki i Informatyki na Wydział Podstawowych Problemów Techniki w Wydział Matematyki Politechniki Wroclawskiej.

- [H3] J. Gajda, L. Beghin, *Prabhakar Lévy processes*, Statistics & Probability Letters 178 (2021) 109162.
- [H4] J. Gajda, A. Wyłomańska, A. Kumar, *Generalized fractional Laplace motion*, Statistics & Probability Letters 124 (2017) 101–109.
- [H5] J. Gajda, A. Wyłomańska, A. Kumar, *Fractional Lévy stable motion time-changed by gamma subordinator*, Communications in Statistics - Theory and Methods 48 (24) (2018) 5953–5968.
- [H6] J. Gajda, A. Kumar, A. Wyłomańska, *Stable Lévy process delayed by tempered stable subordinator*, Statistics & Probability Letters 145 (2019) 284–292.
- [H7] J. Gajda, *Explicit representation of characteristic function of tempered  $\alpha$ -stable Ornstein-Uhlenbeck process*, Mathematical Methods in the Applied Sciences (2021) 1–10.
- [H8] J. Gajda, A. Grzesiek, A. Wyłomańska, *Ornstein-Uhlenbeck process driven by  $\alpha$ -stable process and its Gamma subordination*, Methodology and Computing in Applied Probability, 25: 9 (2023) 1–17.
- [H9] J. Gajda, A. Wyłomańska, *Time-changed Ornstein-Uhlenbeck process*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 48 (13) (2015) 135004.
- [H10] A. Wyłomańska, J. Gajda, *Stable continuous-time autoregressive process driven by stable subordinator*, Physica A - Statistical Mechanics and its Applications 444 (2016) 1012–1026.
- [H11] J. Gajda, A. Wyłomańska, R. Zimroz, *Subordinated continuous-time AR processes and their application to modeling behavior of mechanical system*, Physica A - Statistical Mechanics and its Applications 464 (2016) 123–137.

**(c) Omówienie celu naukowego/artystycznego ww. pracy/prac i osiągniętych wyników:**

Procesy Lévy’ego, procesy gaussowskie oraz ich uogólnienia rozważane w ramach przedstawionego osiągnięcia naukowego stanowią klasę procesów stochastycznych ważną dla rachunku prawdopodobieństwa, statystyki matematycznej i ich zastosowań. Procesy te znane są już od wielu lat, jednak badaniem i uogólnianiem tych klas procesów zajmuje się wciąż wielu znakomitych naukowców. Dodatkowo znajdują one zastosowanie w nowych zagadnieniach praktycznych.

W szczególności wśród procesów gaussowskich możemy wymienić tutaj proces Wienera (zwany ruchem Browna) [1], ułamkowy ruch Browna [2], a wśród procesów Lévy’ego procesy  $\alpha$ -stabilne [3] oraz ich temperowane odpowiedniki [4]. Literatura poświęcona reprezentantom tych klas procesów jest bardzo obszerna, wspomnijmy tutaj jedynie kilka przykładów zastosowań w finansach [5], fizyce [6], biologii [7] czy choćby elektrotechnice [8]. Szczegółowa analiza probabilistyczna tych klas procesów prowadzi nie tylko do głębszego zrozumienia ich własności, ale również do opracowania bardziej efektywnych metod estymacji czy choćby rozszerzenia spektrum zastosowań i uogólnień poprzez odkrycia nowych charakterystyk, które odpowiadają zaobserwowanym zachowaniom w eksperymentach doświadczalnych.

Wyróżnionym osiągnięciem, które stanowi podstawę do wszczęcia postępowania habilitacyjnego jest cykl 11 prac, w których analizuje się własności probabilistyczne, często odwołując się również do teorii równań różniczkowych z pochodną dowolnego rzędu, procesów stochastycznych opartych o rozkłady gaussowskie,  $\alpha$ -stabilne i temperowane  $\alpha$ -stabilne. Ważnym elementem wspomnianego cyklu są również rozszerzenia i uogólnienia znanych procesów oraz zastosowania ich do modelowania zjawisk rzeczywistych. Prace te łączą się i przeplatają na wielu różnych płaszczyznach i w wielu kontekstach, jednak ich wspólnym mianownikiem jest opis własności probabilistycznych ze szczególnym uwzględnieniem miar zależności takich jak kowariancja czy kodyferencja (w przypadku procesów z nieskończonym drugim momentem) oraz wyznaczenie uogólnionych równań różniczkowych, które spełnia gęstość prawdopodobieństwa analizowanego procesu.

Głównym celem osiągnięcia naukowego było wyznaczenie jawnych charakterystyk takich jak np. funkcja charakterystyczna, czy własności trajektorii dla analizowanych procesów stochastycznych. Skupiono się również na wyznaczeniu miar zależności, a także znaleziono postaci uogólnionych równań różniczkowych, które spełnia funkcja gęstości prawdopodobieństwa.

W cyklu prac analizujemy procesy, w których fizyczny czas zostaje zamieniony na pewien ściśle rosnący proces stochastyczny. Nasza analiza przebiega według pewnego schematu i ma formę konkretnego programu badań, mianowicie zaczynamy od procesów o rosnących trajektoriach, następnie przechodzimy do konkretnych procesów o wartościach w całym zbiorze liczb rzeczywistych (możemy tutaj myśleć o uogólnieniach ruchu Browna), a kończymy analizą procesu Ornsteina-Uhlenbecka (OU). W szeregu artykułów naukowych konstruujemy nowe procesy stochastyczne względem procesów  $\alpha$ -stabilnych, temperowanych  $\alpha$ -stabilnych oraz procesów gaussowskich ze szczególnym uwzględnieniem ułamkowego ruchu Browna  $n$ -tego rzędu. W pracach koncentrujemy się również na wyznaczeniu podstawowych własności, które w szczególności mogą być pomocne w estymacji i dopasowaniu nowych rozkładów do danych empirycznych. Wszystkie analizowane rodzaje procesów łączą nietrywialne własności, jak np. długo- i krótko-zasięgowe korelacje [9], potęgowe bądź wykładniczo-potęgowe zachowanie ogona dystrybuanty [3], czy choćby ich szerokie zastosowanie w opisie procesów anomalnej dyfuzji [6]. Ten ostatni wątek był głównym przedmiotem zainteresowania habilitanta we wcześniejszych badaniach, stąd dalsza kontynuacja badań w tym kierunku. W omawianych zagadnieniach opisujemy własności i konstruujemy uogólnienia wspomnianych klas procesów poprzez zastosowanie metody subordynacji, czyli zamiany fizycznego czasu procesu na odpowiedni nieujemny i rosnący (zwykle ściśle rosnący) proces stochastyczny zwany subordynatorem [10]. Mimo iż to podejście jest znane od wielu lat [11], obecnie obserwujemy wzmożone zainteresowanie tym sposobem konstrukcji procesów stochastycznych (np. w kontekście procesów tzw. anomalnej dyfuzji [6]).

W dalszej części autoreferatu w sposób usystematyzowany opiszemy wyniki składające się na osiągnięcie naukowe. Wskażemy związek naszych wyników z istniejącą wiedzą oraz ich możliwości aplikacyjne. Autoreferat zakończymy omówieniem artykułów, które nie zostały włączone do osiągnięcia oraz informacjami o wykazywaniu się istotną działalnością naukową i o osiągnięciach dydaktycznych.

## Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Podstawowe pojęcia i definicje</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Szczegółowy opis wyników prac</b>	<b>6</b>
3.1	Subordynacyjne uogólnienia procesów ML [H1-H3]	6
3.2	Subordynowane procesy ułamkowe i ich uogólnienia [H4-H6]	14
3.3	Procesy Ornsteina-Uhlenbecka ich uogólnienia i subordynacje [H7-H11]	20
<b>4</b>	<b>Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych</b>	<b>26</b>
4.1	Metody matematyczne w fizyce, prace [P1-P7]	29
4.2	Szeregi czasowe i zastosowania przemysłowe, prace [P8-P10]	32
4.3	Metody matematyczne w aplikacjach finansowych, prace [P11-P12]	34
4.4	Modelowanie matematyczne w medycynie i naukach o zdrowiu, prace [P13-P17]	34
4.5	Procesy stochastyczne ich własności i uogólnienia, prace [P18-P22]	35
<b>5</b>	<b>Opis wkładu habilitanta w osiągnięcie naukowe</b>	<b>36</b>
<b>6</b>	<b>Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej</b>	<b>38</b>
<b>7</b>	<b>Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę</b>	<b>39</b>
7.1	Międzynarodowe i krajowe nagrody za działalność naukową albo artystyczną	39
7.2	Doświadczenie dydaktyczne	39

7.3	Opieka naukowa nad studentami . . . . .	40
7.4	Członkostwo w redakcjach artykułów naukowych . . . . .	40
7.5	Działalność popularyzatorska . . . . .	40

# 1 Wstęp

Opis wielu zjawisk rzeczywistych wymaga często elastyczności i odpowiedniego dostosowania aparatu matematycznego, aby móc odwzorować zachowania i własności procesów zachodzących w naturze. Jednak uogólnienia i rozwój coraz to nowych modeli i podejść to nie tylko wpływ aktualnych potrzeb, ale często okazuje się, że wyprowadzone kiedyś formuły znajdują zastosowanie obecnie do opisu wielu zjawisk bądź mogą być wykorzystane do lepszego zrozumienia współczesnych technik. Jako przykłady można tutaj wymienić rachunek różniczkowy z pochodną dowolnego rzędu (z ang. *fractional calculus*) [12], czy wartości Shapleya pojęcie znane z teorii gier obecnie wykorzystywane do wyjaśniania skomplikowanych modeli uczenia maszynowego [13].

Przedmiotem osiągnięcia naukowego jest analiza własności i konstrukcja nowych procesów opartych o procesy  $\alpha$ -stabilne, temperowane  $\alpha$ -stabilne, a także procesy gaussowskie ze szczególnym uwzględnieniem ułamkowego ruchu Browna oraz ułamkowego ruchu Browna  $n$ -tego rzędu. W szczególności wyznaczamy jawne reprezentacje miar zależności analizowanych procesów takich jak autokowariancja czy autokodyferencja (dla procesów o nieskończonej wariancji). Dodatkowo wyznaczamy postacie uogólnionych równań różniczkowych, jakie spełnia gęstość prawdopodobieństwa wybranych procesów. Pozwala to na połączenie teorii prawdopodobieństwa i teorii równań różniczkowych. Prace te mogą stanowić cykl ukierunkowany na rozwijanie pewnych specyficznych metod, gdyż możemy uporządkować je od analizy procesów stochastycznych o rosnących (ściśle rosnących) trajektoriach do badania własności procesów o wartościach w całym zbiorze liczb rzeczywistych i będących w szczególności rozwiązaniem stochastycznego równania różniczkowego procesu OU. Prace starano się pogrupować w mniejsze bloki według problematyki, a nie według chronologii powstawania bądź pochodzenia przedstawianych w nich rezultatów.

W pracach [H1-H3] rozważamy uogólnione procesy Mittag-Lefflera (ML), które konstruujemy na trzy różne sposoby oraz analizujemy ich własności probabilistyczne. Prace [H1, H2] łączy podejście subordynacyjne. Proces ML był już rozważany we wcześniejszych opracowaniach, gdzie choćby w [14] pokazano, że rozkłady typu ML są nieskończenie podzielne, a w [15] podano rozkłady prawdopodobieństwa i postać gęstości miary Lévy’ego takiego procesu. Jednak kluczowe jest zaobserwowanie, że taki proces może zostać otrzymany poprzez subordynację  $\alpha$ -stabilnego subordynatora procesem gamma. Ta obserwacja pozwala nam kolejno na wprowadzenie temperowanego  $\alpha$ -stabilnego procesu ML (TMLLP) stosując jako zewnętrzny proces temperowany  $\alpha$ -stabilny [H1], później rozszerzenie tych rezultatów poprzez zastosowanie jako proces zewnętrzny dowolnego nieskończenie podzielnego subordynatora [H2], a na końcu wprowadzenie nowego procesu poprzez modyfikację jego gęstości miary Lévy’ego wykorzystując uogólnioną funkcję ML (zwaną również funkcją Prabhakara) [H3]. Ta ostatnia metoda pozwala nam również na konstrukcję nowych klas subordynatorów, a samo podejście zostało później wykorzystane w publikacji [P18].

Kolejne prace z cyklu rozwijają się w dwóch nurtach. W pracach [H4-H6] badamy własności procesów subordynowanych procesem gamma, jak to miało miejsce w przypadku procesu ML, natomiast prace [H7-H11] to rozważania nad własnościami, ze szczególnym uwzględnieniem miar zależności, procesów OU względem dwustronnego temperowanego procesu  $\alpha$ -stabilnego [H7], gamma subordynowanych procesów OU względem procesu Wienera i procesu  $\alpha$ -stabilnego [H8] oraz subordynowanego procesu  $\alpha$ -stabilnego [H10-H11] i ruchu Browna [H9]. Miary zależności, jakimi się posługujemy to w przypadku procesów o skończonej wariancji to kowariancja natomiast w przeciwnym przypadku bazujemy na kodyferencji [16]. Badania zapoczątkowane w pracach [H10-H11] dla procesu OU (szczególny przypadek procesu CARMA) zostały później rozszerzone np. w [17].

Proces gamma jako subordynator został również wykorzystany w przypadku dwóch rozszerzeń ułamkowego ruchu Browna. Punktem wyjścia jest praca [18], w której autorzy rozważają ułamkowy

proces Laplace'a. Zmotywowani tym przykładem uogólniamy te wyniki w dwóch kierunkach, mianowicie badamy własności subordynowanego ruchu Browna  $n$ -tego rzędu [H4], ułamkowego  $\alpha$ -stabilnego procesu Lévy'ego [H5] oraz przypadku specjalnego, czyli procesu  $\alpha$ -stabilnego [H6].

Podsumowując poniżej prezentujemy najważniejsze rezultaty uzyskane w pracach wchodzących w skład osiągnięcia naukowego.

- W pracy [H1] konstruujemy uogólniony temperowany  $\alpha$ -stabilny proces Lévy'ego typu ML wykorzystując podejście subordynacyjne. Następnie podajemy szereg własności takiego procesu.
- Praca [H2] kontynuuje podejście subordynacyjne do konstrukcji, tym razem uogólnionego procesu typu ML, w którym procesem zewnętrznym jest dowolny nieskończenie podzielny i ściśle rosnący subordynator. Podajemy szereg własności takiego procesu, m.in. jawną postać momentów, autokorelacji oraz formułę uogólnionego równania różniczkowego opisującego gęstość prawdopodobieństwa takiego procesu w punkcie  $t > 0$ .
- W artykule [H3] prezentujemy inne podejście do konstrukcji procesów typu ML, tym razem definiujemy taki proces poprzez specjalną postać jego miary Lévy'ego, którą reprezentujemy poprzez funkcję Prabhakara (funkcję ML z trzema parametrami). Podajemy własności takiego procesu, w szczególności jego funkcję charakterystyczną oraz znajdujemy jego reprezentację subordynacyjną dając tym samym początek badaniom nad uogólnionymi procesami  $\alpha$ -stabilnymi [P18].
- W pracy [H4] rozszerzamy definicję ułamkowego procesu Laplace'a zdefiniowanego poprzez subordynację ułamkowego procesu Browna subordynatorem gamma, wprowadzając jako proces zewnętrzny ułamkowy ruch Browna  $n$ -tego rzędu. Otrzymujemy serię wyników charakteryzujących nowy proces, wspomnijmy tutaj o jego momentach, funkcji kowariancji czy odpowiednim równaniu różniczkowym opisującym jego gęstość.
- Artykuł [H5] omawia kolejne rozszerzenie ułamkowego procesu Laplace'a poprzez zastosowanie jako procesu zewnętrznego ułamkowego procesu  $\alpha$ -stabilnego. Ze względu na to, iż proces zewnętrzny ma nieskończone momenty, również proces subordynowany charakteryzuje się tą własnością, zatem nie możemy opisać jego momentów. Otrzymujemy jednak szereg rezultatów podających postać funkcji charakterystycznej oraz alternatywnej miary zależności, kodyferencji dla tak zdefiniowanego procesu.
- W [H6] omawiamy własności subordynowanego procesu  $\alpha$ -stabilnego (za subordynator przyjmujemy tutaj proces temperowany  $\alpha$ -stabilny). Podajemy m.in. postać równania różniczkowego jakie spełnia gęstość prawdopodobieństwa takiego procesu.
- Rezultaty pracy [H7] skoncentrowane są na analizie procesu OU względem dwustronnego procesu temperowanego  $\alpha$ -stabilnego, głównymi wynikami pracy są jawne reprezentacje funkcji charakterystycznej takiego procesu, które uzyskujemy na dwa sposoby.
- W artykule [H8] podajemy szereg własności procesów OU względem procesu Wienera i procesu  $\alpha$ -stabilnego subordynowanych procesem gamma. W szczególności wyznaczamy jawne reprezentacje na funkcję autokowariancji (w przypadku gaussowskim).
- W pracy [H9] zajmujemy się analizą procesu OU względem procesu Wienera, którego czas fizyczny zostaje zamieniony na proces odwrotny do nieskończenie podzielnego subordynatora. Główny wynik pracy to analiza zależności dla takiego procesu.
- Wyniki pracy [H10] to dalsze rozwinięcie pracy [H8], w której wyznaczamy kodyferencję dla procesu OU (jego stacjonarnej wersji, w pracy nazywamy ten proces procesem CAR(1) z ang. *continuous autoregression*) względem procesu  $\alpha$ -stabilnego. Czas w tym przypadku modelowany jest odwrotnym  $\alpha$ -stabilnym subordynatorem. Pokazujemy zgodność naszych teoretycznych wyników z symulacjami numerycznymi.

- W [H11] (rozszerzając [H10]) podajemy jawną reprezentację kodyferencji (alternatywnej dla kowariancji miary zależności) dla subordynowanego procesu OU względem procesu  $\alpha$ -stabilnego. Tym razem subordynator to proces odwrotny do nieskończonego podzielnego subordynatora. Dyskutujemy również możliwości zastosowań naszego procesu.

W pierwszej części rozprawy przedstawimy podstawowe definicje i wzory, które były wykorzystywane w omawianych pracach, a także związek naszych wyników z istniejącą wiedzą. Bardziej kompletne opracowania można znaleźć m.in. w książkach [10, 3, 9, 19]. Autoreferat zakończymy omówieniem prac, które nie zostały włączone do osiągnięcia oraz przedstawieniem informacji o wykazywaniu się przez habilitanta istotną aktywnością naukową i jego osiągnięciach dydaktycznych.

## 2 Podstawowe pojęcia i definicje

We wstępie podamy definicje głównych klas procesów rozważanych w całej rozprawie i pojawiających się w omawianych artykułach. W każdym kolejnym rozdziale będziemy uszczegóławiać prezentowane zagadnienia oraz wprowadzać nowe definicje w razie potrzeby.

Wszystkie wyniki rozprawy dotyczą własności procesów  $\alpha$ -stabilnych [3], procesów temperowanych  $\alpha$ -stabilnych [4], ułamkowego ruchu Browna oraz jego uogólnień. Ponadto, konstruujemy procesy OU względem wspomnianych klas procesów. Rozważamy również procesy, w których czas fizyczny zostaje zamieniony na rosnący (niezależny od procesu zewnętrznego) subordynator bądź odwrotny subordynator.

Bardziej szczegółowo możemy powiedzieć, że dla pewnego procesu stochastycznego  $(X(t))_{t \geq 0}$  i pewnego niezależnego od niego procesu  $(S(t))_{t \geq 0}$  o rosnących i nieujemnych trajektoriach, analizujemy proces subordynowany (często w literaturze mówi się o takich procesach jako procesach podporządkowanych w rozprawie jednak będziemy trzymać się terminologii subordynowane), czyli  $(X(S(t)))_{t \geq 0}$ . Zaczniemy więc od wprowadzenia definicji subordynatora oraz kilku jego szczególnych przypadków.

**Definicja 2.1** ([10]). *Jednowymiarowy proces Lévy'ego  $(S(t))_{t \geq 0}$  nazywamy subordynatorem, gdy*

- $S(t) \geq 0$  z prawdopodobieństwem 1 dla każdego  $t > 0$ ,
- $S(t_1) \leq S(t_2)$  z prawdopodobieństwem 1, gdy  $t_1 \leq t_2$ .

Transformata Laplace'a (TL) subordynatora  $(S(t))_{t \geq 0}$  ma postać

$$\mathbb{E}(e^{-uS(t)}) = e^{-t\Psi(u)}, \quad (2.0.1)$$

gdzie  $\Psi(u)$  jest wykładnikiem (Laplace'a) subordynatora. Prawdziwe jest następujące twierdzenie [20, 10].

**Twierdzenie 2.1** ([10]). *(i) Jeśli  $\Psi$  jest wykładnikiem subordynatora  $(S(t))_{t \geq 0}$ , to istnieje jednoznacznie zdefiniowana para nieujemnych liczb rzeczywistych  $(a, b)$  oraz jednoznacznie zdefiniowana miara (zwana miarą Lévy'ego)  $\nu$  na  $(0, \infty)$  o własności  $\int_0^\infty (1 \wedge x)\nu(dx) < \infty$  takie, że dla każdego  $\xi \geq 0$  zachodzi*

$$\Psi(\xi) = a + b\xi + \int_0^\infty (1 - e^{-\xi x})\nu(dx). \quad (2.0.2)$$

*(ii) Każda funkcja  $\Psi$ , która może zostać przedstawiona w formie (2.0.2) jest wykładnikiem transformaty Laplace'a pewnego subordynatora.*

Wprowadźmy również definicję odwrotnego subordynatora.

**Definicja 2.2.** Niech  $(S(t))_{t \geq 0}$  będzie subordynatorem. Odwrotnym subordynatorem nazywamy proces  $(U(t))_{t \geq 0}$  zdefiniowany następująco

$$U(t) = \inf\{\tau > 0 : S(\tau) > t\}. \quad (2.0.3)$$

Proces  $(U(t))_{t \geq 0}$  nazywany jest w literaturze czasem pierwszego przejścia procesu  $(S(\tau))_{\tau \geq 0}$ . W teorii prawdopodobieństwa odwrotne subordynatory znalazły wiele zastosowań, warto wspomnieć między innymi ich związek z czasami lokalnymi pewnych procesów markowskich [20] czy z teorią odnowy [21].

W rozprawie będziemy rozważać dość ogólną reprezentację subordynatora z dowolną miarą Lévy'ego (zob. (2.0.1)) spełniającą jednak pewne techniczne warunki zapewniające nam np. własność ściśle rosnących trajektorii. Głównie jednak będziemy posługiwać się trzema klasami subordynatorów i procesów do nich odwrotnych, będą to subordynatory  $\alpha$ -stabilne, temperowane  $\alpha$ -stabilne oraz gamma. Zdefiniować możemy je poprzez ich TL.

**Definicja 2.3.** Proces  $(S_\alpha(\tau))_{\tau \geq 0}$ , gdzie  $0 < \alpha < 1$ , nazywamy  $\alpha$ -stabilnym subordynatorem, gdy  $S_\alpha(\tau)$  ma TL postaci

$$\mathbb{E} [e^{-kS_\alpha(\tau)}] = e^{\tau k^\alpha}, \quad k \geq 0. \quad (2.0.4)$$

**Definicja 2.4.** Proces  $(S_{\alpha,\lambda}(\tau))_{\tau \geq 0}$ , gdzie  $0 < \alpha < 1, \lambda > 0$ , nazywamy temperowanym  $\alpha$ -stabilnym subordynatorem, gdy  $S_{\alpha,\lambda}(\tau)$  ma TL postaci

$$\mathbb{E} [e^{-kS_{\alpha,\lambda}(\tau)}] = e^{\tau((k+\lambda)^\alpha - \lambda^\alpha)}, \quad k \geq 0. \quad (2.0.5)$$

**Definicja 2.5.** Proces  $(G_{\lambda,\beta}(\tau))_{\tau \geq 0}$ , gdzie  $\beta > 0, \lambda > 0$ , nazywamy subordynatorem gamma, gdy  $G_{\lambda,\beta}(\tau)$  ma TL postaci

$$\mathbb{E} (e^{-kG_{\lambda,\beta}(t)}) = \left( \frac{\lambda}{\lambda + k} \right)^{\beta t}, \quad k \geq 0. \quad (2.0.6)$$

W pracach [H1-H2] rozważamy subordynację procesem gamma, stosując kolejno jako proces zewnętrzny temperowany  $\alpha$ -stabilny subordynator i uogólniając dalej na dowolny subordynator z TL (2.0.1). Definiujemy w ten sposób i badamy własności nowych procesów, które stanowią uogólnienie znanego procesu Lévy'ego typu ML. Praca [H3] stanowi uogólnienie procesu ML poprzez wprowadzenie odpowiedniej formy miary Lévy'ego, dodatkowo pokazujemy reprezentację stochastyczną takiego procesu poprzez subordynację. Dzięki czemu wprowadzamy nowe klasy subordynatorów z miarą Lévy'ego tym razem zdefiniowaną poprzez wykorzystanie funkcji ML.

Wprowadźmy definicję procesów przyjmujących wartości rzeczywiste, które będziemy rozważać w kolejnych pracach z cyklu.

Subordynatory  $\alpha$ -stabilne są szczególnym przypadkiem szerszej klasy procesów. Klasa procesów  $\alpha$ -stabilnych zdefiniowana jest za pomocą czterech parametrów. Niech zmienna losowa  $X$  ma rozkład  $\alpha$ -stabilny, co będziemy oznaczać  $X \sim S(\alpha, \gamma, \mu, \sigma)$ , gdzie parametr  $\alpha \in (0, 2]$  nazywany jest indeksem stabilności,  $\gamma \in [-1, 1]$  oznacza parametr skośności,  $\mu \in \mathbb{R}$  jest parametrem położenia, a  $\sigma > 0$  to parametr spłaszczenia (kształtu).

**Definicja 2.6** ([3]). Mówimy, że zmienna losowa  $X$  ma rozkład  $S(\alpha, \gamma, \mu, \sigma)$  gdy jej funkcja charakterystyczna ma następującą postać

$$\ln \psi_X(z) = \ln \mathbb{E} (e^{iXz}) = \begin{cases} -\sigma^\alpha |u|^\alpha [1 - i\gamma \operatorname{sign}(u) \tan(\frac{\pi\alpha}{2})] + i\mu u, & \text{if } \alpha \neq 1 \\ -\sigma |u| [1 + i\gamma \operatorname{sign}(u) \frac{2}{\pi} \ln |u|] + i\mu u, & \text{if } \alpha = 1. \end{cases} \quad (2.0.7)$$

**Definicja 2.7** ([22, 3]). Proces stochastyczny  $(X(t))_{t \geq 0}$  będziemy nazywać  $\alpha$ -stabilnym procesem Lévy'ego ( $\alpha$ -stabilnym ruchem Lévy'ego), gdy

1.  $X(0) = 0$  z prawdopodobieństwem 1.

2.  $X$  jest procesem o niezależnych i stacjonarnych przyrostach.

3.  $X(t) - X(s) \sim S(\alpha, (t-s)^{1/\alpha}, \gamma, 0)$  dla każdych  $0 \leq s < t < \infty$ .

W przypadku, gdy  $\alpha = 2$  otrzymujemy przeskalowany ruch Browna. Co więcej  $(X(t))_{t \geq 0}$  jest procesem  $1/\alpha$  samopodobnym to znaczy, że dla każdego  $c > 0$  procesy  $\{X(ct) : t \geq 0\}$  i  $\{c^{1/\alpha}X(t) : t \geq 0\}$  mają te same rozkłady skończenie wymiarowe (patrz również Definicja 2.9). Gdy  $X(t)$  ma rozkład  $S(\alpha, 0, 0, t^{1/\alpha})$ , to proces stabilny jest symetryczny. W przypadku gdy  $X(t)$  ma rozkład  $S(\alpha, (t-s)^{1/\alpha}, \gamma, 0)$ ,  $z 0 < \alpha < 1$ , wtedy jest on procesem o niemalejących trajektoriach i nazywamy go skośnym ruchem Lévy'ego.

Istotne uogólnienie procesów  $\alpha$ -stabilnych stanowią procesy temperowane  $\alpha$ -stabilne. W pełnej ogólności wprowadzone w [4], gdzie idea tego uogólnienie polega na odpowiednim przekształceniu miary Lévy'ego procesu  $\alpha$ -stabilnego poprzez wykorzystanie funkcji kompletnie monotonicznych [23]. W niniejszej rozprawie będziemy korzystać z konkretnej reprezentacji procesów temperowanych  $\alpha$ -stabilnych [24], zatem wprowadzimy jedynie tę reprezentację. W pełnej ogólności dyskusję o procesach temperowanych można znaleźć w [4, 25].

**Definicja 2.8** ([24]). *Proces temperowany  $\alpha$ -stabilny  $(T(t))_{t \geq 0}$  definiujemy poprzez funkcję charakterystyczną*

$$\psi_{T(t)}(z) = \exp[-t(\Gamma(-\alpha)((\lambda + iz)^\alpha + (\lambda - iz)^\alpha - 2\lambda^\alpha))],$$

gdzie  $\alpha \in (0, 2) \setminus \{1\}$  oraz  $\lambda > 0$ .

Zauważmy, że gdy  $\lambda = 0$ , otrzymujemy funkcję charakterystyczną odpowiednio przeskalowanego procesu  $\alpha$ -stabilnego [3].

**Definicja 2.9** ([26]). *Proces  $(X(t))_{t \geq 0}$ , nazywamy procesem samopodobnym z wykładnikiem Hursta  $H > 0$  (w skrócie procesem  $H$ -samopodobnym), gdy dla każdej liczby  $a > 0$  zachodzi*

$$\{X(at) : t \geq 0\} \stackrel{d}{=} \{a^H X(t) : t \geq 0\}, \quad (2.0.8)$$

gdzie symbol  $\stackrel{d}{=}$  oznacza równość według rozkładu.

W rozprawie poruszamy również zagadnienia związane z procesami gaussowskimi, a w szczególności z ułamkowym ruchem Browna i jego uogólnieniami, takimi jak ułamkowy ruch Browna  $n$ -tego rzędu czy ułamkowy proces  $\alpha$ -stabilny.

Ułamkowy ruch Browna (z ang. *fractional Brownian Motion* w skrócie FBM) jest naturalnym uogólnieniem klasycznego ruchu Browna [2]. FBM  $(B_H(t))_{t \geq 0}$  z parametrem Hursta  $H \in (0, 1)$  jest scentrowanym procesem gaussowskim o funkcji kowariancji

$$\mathbb{E}(B_H(t)B_H(s)) = \frac{\sigma^2}{2} [t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}], \quad t, s > 0, \quad (2.0.9)$$

gdzie  $\sigma^2 = \text{Var}(B_H(1)) = \Gamma(1-2H)\frac{\cos \pi H}{\pi H}$ . Zauważmy również, że  $B_H(t) \sim N(0, \sigma^2 t^{2H})$ ,  $t > 0$ . Tutaj  $N(a, b)$  oznacza rozkład normalny ze średnią  $a \in \mathbb{R}$  oraz wariancją  $b > 0$ . Dla takiego procesu możemy podać również jego jawną reprezentację jako całkę względem procesu Wienera  $(B(t))_{t \geq 0}$  [2]

$$B_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left\{ \int_{-\infty}^0 [(t-u)^{H-1/2} - (-u)^{H-1/2}] dB(u) + \int_0^t (t-u)^{H-1/2} dB(u) \right\}. \quad (2.0.10)$$

Przyrostem pierwszego rzędu procesu  $(B_H(t))_{t \geq 0}$  określimy proces  $X(k) = B_H(k+1) - B_H(k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , który będziemy nazywać ułamkowym szumem gaussowskim (z ang. *fractional Gaussian noise*, FGN). FGN jest procesem dyskretnym z tzw. własnością długiej pamięci dla  $1/2 < H < 1$ , którą możemy określić dla procesów stacjonarnych o skończonej wariancji warunkiem braku sumowalności szeregu autokowariancji [19], tj.  $\sum_{k=0}^{\infty} \text{Cov}(X(t), X(t+k)) = \infty$ .

Jednym z możliwych kierunków rozszerzenia definicji FBM jest rozważenie szerszej przestrzeni parametrów  $H$ . Takie podejście zastosowano w [27], gdzie parametr  $H$  może przyjąć każdą z wartości w przedziale  $(n-1, n)$  dla odpowiedniego  $n = 1, 2, 3, \dots$

**Definicja 2.10** ([27]). *Ułamkowym ruchem Browna rzędu  $n$  ( $n$ -FBM) nazywamy proces*

$$B_H^n(t) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left\{ \int_{-\infty}^0 \left[ (t-u)^{H-1/2} - (-u)^{H-1/2} - \left(H - \frac{1}{2}\right) (-u)^{H-3/2} t - \dots \right. \right. \\ \left. \left. - \left(H - \frac{1}{2}\right) \dots \left(H - \frac{2n-3}{2}\right) (-u)^{H-n+1/2} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right] dB(u) \right. \\ \left. + \int_0^t (t-u)^{H-1/2} dB(u) \right\}. \quad (2.0.11)$$

Zauważmy, że  $n$ -FBM jest procesem gaussowskim o średniej zero oraz wariancji  $Var(B_H^n(t)) = c_H^n \binom{2H-1}{n-1} t^{2H}$ , gdzie

$$c_H^n = \frac{1}{\Gamma(2H+1) |\sin(\pi H)|} \quad \text{i} \quad \binom{n}{j} = \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{j!}.$$

Podobnie jak FBM,  $n$ -FBM jest procesem samopodobnym z indeksem samopodobieństwa  $H \in (n-1, n)$ . Ponadto kowariancja procesu  $n$ -FBM wynosi [27]

$$\mathbb{E}(B_H^n(s)B_H^n(t)) = (-1)^n \frac{c_H^n}{2} \left\{ |t-s|^{2H} - \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{2H}{j} \left[ \left(\frac{t}{s}\right)^j s^{2H} + \left(\frac{s}{t}\right)^j t^{2H} \right] \right\}, \quad s, t > 0. \quad (2.0.12)$$

Powyższa struktura autokowariancji implikuje brak stacjonarności  $n$ -FBM.

Kolejne rozszerzenie to odpowiednia modyfikacja funkcji podcałkowej w reprezentacji (2.0.10) i całkowanie względem procesu  $\alpha$ -stabilnego. Otrzymujemy zatem.

**Definicja 2.11** ([3]). *Ułamkowym procesem  $\alpha$ -stabilnym (z ang. fractional Lévy stable motion w skrócie FLSM) z parametrem Hursta  $0 < H < 1$  oraz indeksem stabilności  $0 < \alpha \leq 2$  nazywamy proces*

$$Z_H^\alpha(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( (t-u)_+^{H-1/\alpha} - (-u)_+^{H-1/\alpha} \right) dL_\alpha(u), \quad t \geq 0, \quad (2.0.13)$$

gdzie  $L_\alpha(t)$  jest symetrycznym  $\alpha$ -stabilnym ruchem Lévy'ego z parametrem  $\alpha \in (0, 2]$  oraz transformatą Fouriera  $\mathbb{E}e^{izL_\alpha(t)} = e^{-t|z|^\alpha}$ .

Wspomnijmy, że FLSM podobnie jak FBM czy  $n$ -FBM jest procesem samopodobnym z indeksem samopodobieństwa  $H = \frac{1}{\alpha}$ .

### 3 Szczegółowy opis wyników prac

Przechodzimy teraz do szczegółowych opisów prac wchodzących w skład osiągnięcia naukowego. W każdej z sekcji stosować będziemy notacje z odpowiadające artykułom [H1-H11]. Mamy nadzieję w ten sposób ułatwić czytelnikowi porównanie opisów z samymi artykułami, na przykład w kontekście zastosowań i estymacji parametrów opisywanych procesów.

#### 3.1 Subordynacyjne uogólnienia procesów ML [H1-H3]

W pracach [H1-H3] rozważamy uogólnienie procesu ML. Rozkład ML uogólnia rozkład wykładniczy szeroko stosowany w wielu zagadnieniach począwszy od modelowania rozkładów czasu życia urzędzeń elektronicznych, po czasy oczekiwania w procesach Poissona i rozkłady czasu obsługi w

teorii kolejek [28]. Czasy oczekiwania ML prowadzą do ułamkowej wersji procesu Poissona, analogicznie do tradycyjnych wykładniczych czasów oczekiwania, które prowadzą do klasycznego procesu Poissona [29].

Niech  $X$  będzie zmienną losową o rozkładzie ML z parametrami  $0 < \alpha \leq 1$  i  $\lambda > 0$ . Wtedy TL  $X$  jest dana przez [14, 30]

$$\mathbb{E}(e^{-uX}) = \frac{\lambda}{\lambda + u^\alpha}. \quad (3.1.1)$$

Dla parametrów  $\alpha \in (0, 1)$  rozkłady ML są ciężkoogonowe i należą do dziedziny przyciągania (z ang. *domain of attraction*) rozkładów stabilnych [28], co można rozumieć następująco. Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie (iid) w tym przypadku o rozkładzie ML z TL jak w (3.1.1). Wtedy TL przeskalowanej zmiennej losowej  $T_n = \lambda^{1/\alpha} n^{-1/\alpha} \sum_{i=1}^n X_i$

$$\mathbb{E}(e^{-uT_n}) = (1 + u^\alpha/n)^{-n} \rightarrow e^{-u^\alpha}, \text{ gdy } n \rightarrow \infty, \quad (3.1.2)$$

co jest TL dla zmiennej losowej  $S_\alpha(1)$ . W przypadku gdy  $\alpha = 1$ , rozkład ML sprowadza się do standardowego rozkładu wykładniczego. W pracy [14] pokazano szereg ciekawych własności tych rozkładów, a w szczególności, że rozkład ML jest nieskończenie podzielny (również geometrycznie nieskończenie podzielny).

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu ML może być zapisana w postaci funkcji ML jako  $f_X(x; \lambda, \alpha) = 1 - E_{\alpha, \lambda}(-x^\alpha)$ ,  $x > 0$ , gdzie  $E_{\alpha, \lambda}$  jest funkcją ML, która może być przedstawiona w postaci całki zespolonej

$$E_{\alpha, \lambda}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{t^{\alpha-\lambda} e^t}{t^\alpha - z} dt, \quad (3.1.3)$$

gdzie  $\mathcal{C}$  jest odpowiednio określoną pętlą całkowania, która zaczyna się i kończy w  $-\infty$  [31]. Funkcja  $E_{\alpha, \lambda}$  może również zostać zaprezentowana w postaci niekończonego szeregu

$$E_{\alpha, \lambda}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \lambda)}. \quad (3.1.4)$$

Korzystając zatem z szeregu własności rozkładów ML możemy rozważać również procesy stochastyczne z czasem ciągłym o tych właśnie rozkładach w danym czasie  $t > 0$ . Taki proces był już rozważany w literaturze [15] poprzez subordynację  $\alpha$ -stabilnego subordynatora procesem gamma.

**Definicja 3.1.** *Proces stochastyczny  $(M_{\alpha, \lambda}(t))_{t \geq 0}$  nazwiemy procesem Lévy'ego typu ML (MLLP) gdy jego TL ma postać*

$$\mathbb{E}(e^{-uM_{\alpha, \lambda}(t)}) = \left( \frac{\lambda}{\lambda + u^\alpha} \right)^t. \quad (3.1.5)$$

Rozszerzając nieco, ale wciąż opierając się na pracy [15], możemy określić MLLP o trzech parametrach poprzez

$$M_{\alpha, \beta, \lambda}(t) := S_\alpha(G_{\lambda, \beta}(t)), \quad t \geq 0. \quad (3.1.6)$$

Dla takiego procesu można pokazać szereg własności [15].

Łatwo więc zweryfikować, że

$$\mathbb{E}(e^{-uM_{\alpha, \beta, \lambda}(t)}) = \left( \frac{\lambda}{\lambda + u^\alpha} \right)^{\beta t} \quad (\text{używając (2.0.6)}),$$

co jest dokładnie TL dla oryginalnego procesu (3.1.5) dla  $\beta = 1$ . Podobnie (zobacz [15]) znajdujemy (poprzez odwrócenie TL) gęstość procesu

$$f_{M_{\alpha, \beta, \lambda}(t)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\lambda^{\beta t + k} \Gamma(\beta t + k)}{\Gamma(\beta t) \Gamma(k + 1)} \frac{x^{\alpha(\beta t + k) - 1}}{\Gamma(\alpha(\beta t + k))}, \quad x > 0. \quad (3.1.7)$$

Ponadto (zobacz [15]) miara Lévy'ego procesu ML ma postać

$$\pi(x) = \frac{\alpha\beta}{x} E_{\alpha,1}(-\lambda x^\alpha), \quad x > 0. \quad (3.1.8)$$

Powyższa idea opierająca się o podejście subordynacyjne zapoczątkowała szereg prac [H1-H3] w których definiujemy i analizujemy różne uogólnienia procesu MLLP.

Przejdziemy teraz do głównych wyników prac. Rozważamy tutaj subordynowany temperowany  $\alpha$ -stabilny subordynator  $(S_{\alpha,\mu}(t))_{t \geq 0}$  (TSS) z TL (2.0.5).

**Definicja 3.2.** *Temperowany  $\alpha$ -stabilny proces Lévy'ego typu ML (TMLLP) definiujemy poprzez subordynację TSS niezależnym od niego procesem gamma jako*

$$M_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(t) := S_{\alpha,\mu}(G_{\lambda,\beta}(t)), \quad \alpha \in (0, 1), \quad \lambda, \mu, \beta > 0, \quad t \geq 0. \quad (3.1.9)$$

Dla takiego procesu używając niezależności procesu zewnętrznego i wewnętrznego oraz warunkowania wartości oczekiwanej możemy łatwo wyznaczyć (korzystając z (2.0.5) oraz (2.0.6)) TL

$$\mathbb{E}(e^{-uM_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(t)}) = \left( \frac{\lambda}{\lambda - \mu^\alpha + (\mu + u)^\alpha} \right)^{\beta t}. \quad (3.1.10)$$

Kolejne wyniki dotyczą wyznaczenia jawnych postaci funkcji gęstości prawdopodobieństwa oraz gęstości miary Lévy'ego naszego pierwszego uogólnienia.

**Twierdzenie 3.1** (Proposition 3.1 w [H1]). *Gęstość prawdopodobieństwa procesu TMLLP, zdefiniowanej w (3.1.6), dana jest wzorem*

$$f_{M_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(t)}(x) = \lambda^{\beta t} e^{-\mu x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\lambda - \mu^\alpha)^k \frac{\Gamma(\beta t + k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\beta t)} \frac{x^{\alpha(\beta t + k) - 1}}{\Gamma(\alpha(\beta t + k))}, \quad \lambda > \mu^\alpha, \quad x > 0. \quad (3.1.11)$$

Dowód powyższego twierdzenia opiera się rozwinięciu w nieskończony szereg TL (3.1.10), aby później można było odwrócić wyraz po wyrazie każdy element tego szeregu używając faktu  $\mathcal{L}^{-1}(1/(u+\mu)^a) = e^{-\mu x} x^{a-1}/\Gamma(a)$ ,  $a > 0$  [32].

**Twierdzenie 3.2** (Proposition 3.2 w [H1]). *Gęstość miary Lévy'ego TMLLP dana jest następującym wzorem*

$$\pi(x) = \frac{\alpha\beta}{x} e^{-\mu x} E_{\alpha,1}((\mu^\alpha - \lambda)x^\alpha), \quad \lambda > \mu^\alpha, \quad x > 0. \quad (3.1.12)$$

Dowód tego twierdzenia może przebiegać na dwa sposoby, co pokazujemy w pracy. Pierwsze podejście polega wykorzystaniu wyniku pracy [33] dla procesów o rosnących i nieujemnych trajektoriach, który pozwala nam na zapisanie gęstości miary Lévy'ego w postaci

$$\pi_M(x) = \int_0^\infty f_{\alpha,\mu}(x, t) \pi_G(t) dt, \quad (3.1.13)$$

gdzie  $\pi_G(x) = \frac{\beta}{x} e^{-\lambda x}$  jest gęstością miary Lévy'ego wewnętrznego procesu gamma, natomiast  $f_{\alpha,\mu}(x, t)$  jest gęstością w chwili  $t > 0$  procesu zewnętrznego czyli TSS. Warto zauważyć, że dla procesu temperowanego jego gęstość prawdopodobieństwa można przedstawić poprzez gęstość prawdopodobieństwa procesu stabilnego  $f(x, t)$  przy użyciu szeregu nieskończonego [28]

$$f_{\alpha,\mu}(x, t) = e^{-\mu x + \mu^\alpha t} f(x, t) = \frac{e^{-\mu x + \mu^\alpha t}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(1 + \alpha k) \sin(\pi \alpha k) t^k}{k! x^{1 + \alpha k}}. \quad (3.1.14)$$

Kolejne etapy dowodu polegają na zastosowaniu powyższego faktu, wyznaczeniu całki danej w równaniu (3.1.13) dla każdego z elementów sumy, skorzystaniu z formuły Eulera dla funkcji gamma i zaobserwowaniu że szereg ten można przedstawić za pomocą funkcji ML. Kluczowa w dowodzie jest również obserwacja, że możemy zamienić kolejność całkowania i sumowania poprzez zastosowanie Twierdzenia Fubinię-Tonelliego [34].

Drugie podejście korzysta z faktu, iż dla nieujemnego subordynatora z gęstością  $f(x, t)$  jego gęstość miary Lévy'ego dana jest jako następująca granica [15]

$$\pi(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} f(x, t). \quad (3.1.15)$$

Używając zatem tego faktu i funkcji gęstości TMLLP otrzymujemy pożądaną wynik.

Dla pewnych szczególnych wartości parametrów możemy poczynić następujące obserwacje.

**Wniosek 3.1** ([H1]). *W przypadku gdy  $\alpha = 1, \beta = 1$  oraz  $\mu = 0$ , formuła (3.1.12) redukuje się do  $\pi(x) = x^{-1}e^{-\lambda x}$ , co jest gęstością miary Lévy'ego procesu gamma  $G_{\lambda,1}(t)$  [10]. Dodatkowo możemy zauważyć, że  $E_{\alpha,1}(-x^\alpha) \rightarrow 1$  gdy  $x \rightarrow 0$ , otrzymujemy  $\pi(x) \sim 1/x$  gdy  $x \rightarrow 0$ . Stąd  $\int_0^\infty \pi(x)dx = \infty$ . Zatem trajektorie procesu TMLLP są ściśle rosnące [35]. Podobnie jak w przypadku procesu gamma, miara Lévy'ego tego procesu jest skoncentrowana w zerze, stąd jego trajektorie charakteryzują nieskończoną liczbą głównie małych skoków.*

Kolejne twierdzenie będzie dotyczyło postaci uogólnionego równania różniczkowego, którego rozwiązaniem jest funkcja gęstości prawdopodobieństwa TMLLP w punkcie  $t > 0$ .

Wprowadźmy kilka oznaczeń. Niech  $(\mu + \frac{\partial}{\partial x})^\nu$  będzie tzw. przesuniętą pochodną ułamkową zdefiniowaną w [36] dla funkcji analitycznych  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  taką, że

$$\left(\mu + \frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\nu}{j} \mu^{\nu-j} \frac{d^j}{dx^j} f(x), \quad \nu > 0, \quad (3.1.16)$$

gdzie  $\binom{\nu}{j} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{j!\Gamma(\nu+1-j)}$ . Przypomnijmy również definicję tzw. operatora przesunięcia  $e^{-k\partial_t}$  dla  $k \in \mathbb{R}$  [36] zdefiniowanego jako

$$e^{-k\partial_t} f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k\partial_t)^n}{n!} f(t) = f(t - k), \quad k \in \mathbb{R}. \quad (3.1.17)$$

**Twierdzenie 3.3** (Proposition 3.3 w [H1]). *Gęstość prawdopodobieństwa procesu TMLLP jest rozwiązaniem następującego uogólnionego ułamkowego równania różniczkowego*

$$\lambda \left(1 - e^{-\frac{1}{\beta}\partial_t}\right) f_{M_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}}(t)(x) = \mu^\alpha f_{M_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}}(t)(x) - \left(\mu + \frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f_{M_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}}(t)(x), \quad (3.1.18)$$

z warunkiem początkowym  $f_{M_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}}(0)(x) = \delta(x)$ .

Dowód twierdzenia polega na zastosowaniu TL obustronnie względem zmiennej  $x$ , następnie wykorzystaniu operatora przesunięcia i zauważeniu, że lewa i prawa strona równania są jednakowe.

Wykorzystując postać gęstości TMLLP łatwo zauważyć, że

$$f_{\alpha,\mu}(x, t) = e^{-\mu x + \mu^\alpha t} f(x, t) \sim \frac{t}{\pi} \Gamma(1 + \alpha) \sin(\pi\alpha) \frac{1}{x^{1+\alpha}} e^{-\mu x + \mu^\alpha t}, \quad \text{gdy } x \rightarrow \infty, \quad (3.1.19)$$

co z kolei prowadzi do kolejnej obserwacji

$$\mathbb{P}(S_{\alpha,\mu}(t) > x) \sim \frac{t}{\alpha\pi} \Gamma(1 + \alpha) \sin(\pi\alpha) \frac{1}{x^\alpha} e^{-\mu x + \mu^\alpha t}, \quad \text{gdy } x \rightarrow \infty. \quad (3.1.20)$$

Wykorzystując oba fakty i niezależność procesów można sformułować następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 3.4** (Proposition 3.4 w [H1]). *Zachowanie ogona dystrybuanty TMLLP przy  $x \rightarrow \infty$  można przedstawić jako*

$$\mathbb{P}(M_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(t) > x) = \frac{\Gamma(1+\alpha) \sin(\pi\alpha)}{\alpha\pi} \frac{\beta t \lambda^{\beta t}}{(\lambda - \mu^\alpha)^{\beta t}} \frac{e^{-\mu x}}{x^\alpha}, \quad \lambda > \mu^\alpha, \quad \text{gdy } x \rightarrow \infty. \quad (3.1.21)$$

Ponadto,

$$f_{M_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(t)}(x) \sim \frac{\lambda^{\beta t}}{\Gamma(\alpha\beta t)} e^{-\mu x} x^{\alpha\beta t - 1}, \quad \text{gdy } x \rightarrow 0. \quad (3.1.22)$$

Dowód powyższego twierdzenia jest konsekwencją zachowania ogona dystrybuanty procesu temperowanego  $\alpha$ -stabilnego oraz niezależności obu procesów. Zauważmy, że ze względu na wykładniczy zanik ogona dystrybuanty (gdy  $x \rightarrow \infty$ ), proces TMLLP ma momenty wszystkich rzędów, co pozwala nam sformułować następujący fakt.

**Fakt 3.1** ([H7]). *Kowariancja procesu  $M_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(t)$ ,  $t \geq 0$  wynosi*

$$\text{Cov}(M_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(t), M_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(s)) = \left( \alpha(1-\alpha)\mu^{\alpha-2} \frac{\beta}{\lambda} + \alpha^2 \mu^{2(\alpha-1)} \frac{\beta}{\lambda^2} \right) \min(s, t). \quad (3.1.23)$$

Pierwsze uogólnienie TMLLP rozważane w pracy [H2] polega na zastosowaniu jako proces zewnętrzny dowolnego subordynatora  $(S_\psi(t))_{t \geq 0}$  (2.0.1). Zatem uogólniony proces Lévy'ego typu ML (dalej oznaczany jako GMLL) możemy zdefiniować jako

$$M_\psi(t) = S_\psi(G_{\lambda,\beta}(t)), \quad t \geq 0. \quad (3.1.24)$$

Jak poprzednio, przy odpowiednich założeniach, możemy wyznaczyć gęstość miary Lévy'ego dla takiego procesu.

**Twierdzenie 3.5** (Proposition 2.1 w [H2]). *Załóżmy, że subordynator ma ciągłą i ograniczoną gęstość prawdopodobieństwa, wtedy gęstość miary Lévy'ego procesu GMLL jest ciągła i ma postać*

$$\pi(x) = \beta \int_0^\infty f(x, v) v^{-1} e^{-\lambda v} dv, \quad x > 0. \quad (3.1.25)$$

Dowód twierdzenia jest konsekwencją zastosowania rozumowania z pracy [15] (patrz równanie (3.1.15)) oraz zastosowania twierdzenia o zbieżności ograniczonej. W granicy wykorzystujemy również fakt, iż  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t\Gamma(t)} = 1$ .

Również w tym ogólnym przypadku sformułujemy odpowiednik Twierdzenia Fokkera-Plancka opisującego gęstość prawdopodobieństwa procesu  $M_\psi(t)$ ,  $t \geq 0$ . Niech  $u$  będzie funkcją absolutnie ciągłą na przedziale  $(0, \infty)$ , a przez  $\bar{\nu}(s) = \int_s^\infty \nu(dz)$  oznaczymy funkcję ogona miary Lévy'ego. W pracy [37] zdefiniowano operator

$${}^\psi \mathcal{D}_x^{(0,\infty)} u(x) = \frac{d}{dx} \left[ \int_0^x u(x-s) \bar{\nu}(s) ds \right], \quad (3.1.26)$$

dla dowolnej funkcji Bernsteina  $\psi$  związanej z pewnym subordynatorem i jego miarą Lévy'ego  $\nu(dx)$ . Przed sformulowaniem kolejnego twierdzenia przypomnijmy również definicję operatora przesunięcia (3.1.17).

**Twierdzenie 3.6.** (Proposition 2.2 w [H2]) *W przypadku gdy GMLL posiada absolutnie ciągłą funkcję gęstości, a miara Lévy'ego subordynatora  $S_\psi(t)$ ,  $t \geq 0$  ma absolutnie ciągłą funkcję ogona miary Lévy'ego, wtedy funkcja gęstości procesu GMLL,  $m(x, t)$  spełnia następujące uogólnione ułamkowe równanie różniczkowe*

$$\lambda \left( 1 - e^{-\frac{1}{\beta} \partial_t} \right) m(x, t) = -{}^\psi \mathcal{D}_x^{(0,\infty)} m(x, t). \quad (3.1.27)$$

Dowód twierdzenia polega na obustronnym zastosowaniu TL oraz wykorzystaniu Lematu 2.2 z [37].

Gdy założymy, istnienie drugiego momentu procesu  $(S_\psi(t))_{t \geq 0}$  możemy sformułować wzór na funkcję korelacji procesu  $(M_\psi(t))_{t \geq 0}$ . Dodatkowo przy założeniu istnienia wartości oczekiwanej zewnętrznego subordynatora można znaleźć wzór na wartość oczekiwaną procesu GMLL. Zilustrujemy to w kolejnym twierdzeniu.

**Twierdzenie 3.7** (Proposition 2.3 w [H2]). *Niech  $S_\psi(t)$ ,  $t \geq 0$  będzie subordynatorem Lévy'ego, założymy, że  $\mathbb{E}(S_\psi(1))$  istnieje i jest skończona wtedy*

$$\mathbb{E}(M_\psi(t)) = \frac{\beta t}{\lambda} \mathbb{E}(S_\psi(1)). \quad (3.1.28)$$

Dodatkowo, gdy proces  $S_\psi(t)$ ,  $t \geq 0$  ma skończony drugi moment, to

$$\text{Var}(M_\psi(t)) = \frac{\beta}{\lambda} t \left( \mathbb{E}[S_\psi^2(1)] - \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \mathbb{E}[S_\psi(1)]^2 \right), \quad (3.1.29)$$

a kowariancja dana jest wzorem

$$\text{Cov}(M_\psi(t), M_\psi(s)) = \frac{\beta}{\lambda} \min(t, s) \left( \mathbb{E}[S_\psi^2(1)] - \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \mathbb{E}[S_\psi(1)]^2 \right). \quad (3.1.30)$$

Wynik ten otrzymuje się poprzez zastosowanie rezultatów pracy [38] (patrz Twierdzenie 2.1) gdzie autorzy rozważają podobne zagadnienie dla dowolnego zewnętrznego procesu Lévy'ego i dowolnego niemalejącego subordynatora. Idea tego ogólnego dowodu polega na różniczkowaniu funkcji charakterystycznej procesu subordynowanego w celu otrzymania konkretnych formuł na momenty.

Zatem przy założeniach Twierdzenia 3.7 można określić, czy proces posiada tzw. długą pamięć. Zagadnienie to krótko omawialiśmy we wstępie w przypadku procesów stacjonarnych. Dla procesów niestacjonarnych możemy sformułować podobną definicję (zob. [H4] w języku korelacji).

**Definicja 3.3.** *Niech  $s > 0$  oraz  $t > s$ . Mówimy, że proces  $Y(t)$ ,  $t \geq 0$  posiada własność długiej pamięci, gdy*

$$\text{Corr}(Y(s), Y(t)) \sim c(s)t^{-d}, \quad \text{gdy } t \rightarrow \infty, \quad (3.1.31)$$

gdzie  $d \in (0, 1)$  oraz  $c(s)$  jest pewną stałą zależną od  $s$ .

**Twierdzenie 3.8** (Proposition 2.4 w [H2]). *Niech  $S_\psi(t)$ ,  $t \geq 0$  będzie subordynatorem Lévy'ego, dla którego  $\mathbb{E}(S_\psi(1))^2 < \infty$ , wtedy proces  $M_\psi(t)$ ,  $t \geq 0$  zdefiniowany w równaniu (3.1.24) posiada tzw. własność długiej pamięci.*

Dowód tego twierdzenia wynika z zastosowania Twierdzenia 3.7, gdzie po bezpośrednim rachunku otrzymujemy  $d = 1/2$ .

W dalszej części zajmijmy się ściśle rosnącymi subordynatorami, których miara Lévy'ego spełnia  $\nu(0, \infty) = \infty$  i rozważmy teraz odwrotny subordynator  $(E_\psi(t))_{t \geq 0}$  taki, że

$$E_\psi(t) = \inf \{ \tau : S_\psi(\tau) > t \}. \quad (3.1.32)$$

Zdefiniujmy również funkcję

$$F(t) = 1 - \mathbb{E} [e^{-\lambda E_\psi(t)}] \quad t \geq 0. \quad (3.1.33)$$

Warto teraz zauważyć następujący prosty rezultat.

**Twierdzenie 3.9** (Proposition 3.1 w [H2]). *Funkcja zdefiniowana w równaniu (3.1.33) jest dobrze zdefiniowaną dystrybuantą.*

Aby pokazać powyższy rezultat wystarczy wskazać na własności funkcji  $F$ , które wprost wynikają z własności trajektorii procesu  $E_\psi(t)$ ,  $t \geq 0$  (ciągłości, niemalejących trajektorii startujących z punktu 0) [39].

Kolejno możemy powiązać z tak zdefiniowaną dystrybuantą rozkład prawdopodobieństwa. W tym celu wprowadźmy pojęcie rozkładu nieskończenie podzielnego zaczerpniętą z pracy [14].

**Definicja 3.4** ([14]). *Rozkład prawdopodobieństwa określony dystrybuantą  $F(x)$ ,  $x \geq 0$  jest nieskończenie podzielny gdy jego TL jest postaci  $e^{-g(s)}$ ,  $s \geq 0$  gdzie  $g(u)$  ma kompletnie monotoniczną pierwszą pochodną.*

Dokładne definicje wraz z własnościami dla funkcji kompletnie monotonicznych i funkcji Bernsteina można znaleźć w książce [23].

**Twierdzenie 3.10** (Proposition 3.2 w [H2]). *Rozkład prawdopodobieństwa zdefiniowany przez dystrybuantę (3.1.33) jest nieskończenie podzielny.*

Dowód twierdzenia przebiega w kilku krokach. Zauważmy, że TL naszego rozkładu możemy przedstawić jako  $g_\psi(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(dt) = e^{-\log(1 + \frac{\psi(s)}{\lambda})}$ . Czyli w naszym przypadku  $g'(s) = \left(\log\left(1 + \frac{\psi(s)}{\lambda}\right)\right)' = \frac{\psi'(s)}{\lambda + \psi(s)}$ . Zauważmy, że pierwsza pochodna funkcji Bernsteina  $\psi(s)$  jest funkcją kompletnie monotoniczną, również  $(\lambda + \psi(s))^{-1}$  jest funkcją kompletnie monotoniczną [23]. Zatem iloczyn również jest funkcją kompletnie monotoniczną [23].

Dystrybuantę zdefiniowaną w równaniu (3.1.33), a więc wyrażoną przez proces będący czasem pierwszego przejścia ściśle rosnącego subordynatora, można powiązać z dystrybuantą procesu GMLL w czasie  $t = 1$  i dla parametru  $\beta = 1$ . Możemy zatem mówić o pewnym związku pomiędzy tymi dwoma procesami tzn. procesem GMLL oraz odwrotnym subordynatorem.

**Twierdzenie 3.11** (Theorem 3.1 w [H2]). *Dystrybuanta  $F(x)$ ,  $x \geq 0$  zmiennej losowej  $M_\psi(t)$ , dla  $t = 1$ ,  $\beta = 1$ , wyraża się wzorem.  $F(x) = 1 - \mathbb{E}[e^{-\lambda E_\psi(x)}]$ ,  $x \geq 0$ .*

Dowód polega na porównaniu TL dystrybuanty procesu  $M_\psi(t)$ ,  $t \geq 0$  oraz TL dla funkcji  $F$ . Zauważmy, że w artykule [H2] brakło założenia  $t = 1$  co jest omyłką literacką autora publikacji.

W pracy [H3] kontynuujemy rozważania nad uogólnionymi procesami typu ML. W tym przypadku nowy proces skonstruujemy za pomocą odpowiedniego rozszerzenia miary Lévy'ego. Przypomnijmy, że miarę Lévy'ego procesu Lévy'ego typu ML można przedstawić przy użyciu dwuparametrowej funkcji ML (patrz równanie (3.1.8)). Nasza konstrukcja będzie polegała na wykorzystaniu bardziej ogólnej wersji funkcji ML, zwanej również funkcją Prabhakara, stąd proces ten będziemy nazywać procesem Lévy'ego typu Prabhakara (PL). Dla  $z \in \mathbb{C}$ , tę uogólnioną funkcję ML możemy przedstawić poprzez następujący nieskończony szereg

$$E_{\alpha,\beta}^\gamma(z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma + k) z^k}{k! \Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad z \in \mathbb{C}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}, \Re(\alpha) > 0. \quad (3.1.34)$$

Łatwo zauważyć, że dla parametru  $\gamma = 1$  powyższa postać redukuje się do dwu-parametrowej funkcji ML z równania (3.1.4).

**Definicja 3.5** ([H3]). *Niech  $\alpha \in (0, 1]$ ,  $\gamma > 0$  i  $\beta \in [1, 1 + \alpha\gamma)$  wtedy proces PL  $M_\alpha^{\beta,\gamma} = M_\alpha^{\beta,\gamma}(t)$ ,  $t \geq 0$  definiujemy jako proces Lévy'ego z trójką Lévy'ego  $(0, 0, t\pi_{M_\alpha^{\beta,\gamma}})$ , gdzie  $\pi_{M_\alpha^{\beta,\gamma}}(\cdot)$  jest gęstością miary Lévy'ego*

$$\pi_{M_\alpha^{\beta,\gamma}}(x) = \frac{\alpha \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma + \frac{1-\beta}{\alpha})} x^{\beta-2} E_{\alpha,\beta}^\gamma(-\lambda x^\alpha), \quad \lambda > 0, x \geq 0. \quad (3.1.35)$$

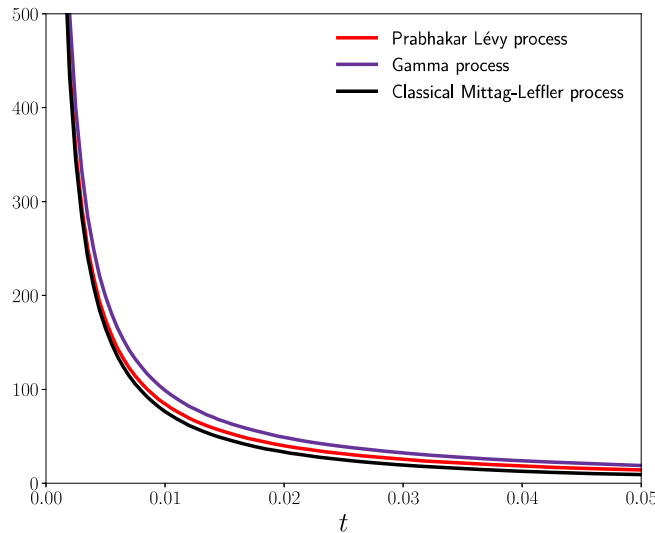
Dla tak zdefiniowanego procesu w kolejnym twierdzeniu pokazujemy, że jego gęstość miary Lévy'ego jest dobrze zdefiniowana.

**Twierdzenie 3.12** (Proposition 2.1 w [H3]). *Funkcja w równaniu (3.1.35) jest dobrze zdefiniowaną gęstością miary Lévy'ego.*

Dowód twierdzenia polega na sprawdzeniu klasycznego warunku [10]

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x} \pi_{M_{\alpha}^{\beta,\gamma}}(x) dx < +\infty.$$

W specjalnym przypadku, gdy  $\beta = \gamma = 1$ , formuła (3.1.35) redukuje się do dobrze znanej gęstości miary Lévy'ego procesu ML. Dodając kolejny warunek  $\alpha = 1$  otrzymujemy subordynator gamma. Na rysunku 1 porównujemy gęstości miary Lévy'ego dla procesu gamma, dla klasycznego procesu typu ML (z subordynatorem  $\alpha$ -stabilnym jako proces zewnętrzny) oraz procesu PL. Widzimy, że proces PL dla pewnych parametrów zajmuje miejsce pośrednie między procesami gamma i procesami ML.



Rysunek 1: Zachowanie gęstości miary Lévy'ego procesu PL (dla  $\alpha = 0.9, \beta = 1, \gamma = 0.4, \lambda = 10$ ), procesu ML (dla  $\alpha = 0.9, \beta = 1, \gamma = 1, \lambda = 10$ ) oraz procesu gamma (dla  $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1, \lambda = 10$ )

W kolejnym twierdzeniu podajemy postać wykładnika Laplace'a procesu PL

**Twierdzenie 3.13** (Theorem 2.1 w [H3]). *Wykładnik Laplace'a procesu PL ma postać*

$$\psi_{M_{\alpha}^{\beta,\gamma}}(u) = \frac{u^{\alpha\gamma-\beta+1}}{\Gamma(\gamma + \frac{1-\beta}{\alpha}) \lambda^{\gamma} {}_2\Psi_1 \left[ \begin{matrix} (\gamma,1) (\gamma + \frac{1-\beta}{\alpha}, 1) \\ (\gamma + \frac{1-\beta}{\alpha} + 1, 1) \end{matrix} \middle| -\frac{u^{\alpha}}{\lambda} \right]}, \quad u \geq 0, \quad (3.1.36)$$

gdzie  ${}_p\Psi_q$  jest funkcją Foxa-Wrighta (zob. [12]).

Dowód twierdzenia polega na bezpośrednim obliczeniu  $-\frac{1}{t} \log \left( \mathbb{E} \left( e^{-uM_{\alpha,\beta}^{\gamma}(t)} \right) \right)$ . Po drodze używamy własności funkcji specjalnych m.in. reprezentacji całkowej Eulera, gaussowskiej funkcji hipergeometrycznej (równanie (1.11.26) w [12]). Warto tutaj zauważyć, że gdy  $\gamma = \beta = 1$ , to wykładnik Laplace'a procesu PL redukuje się do wykładnika Laplace'a procesu ML (3.1.1)

$$\psi_{M_{\alpha}^{1,1}}(u) = \log \left( 1 + \frac{u^{\alpha}}{\lambda} \right).$$

**Twierdzenie 3.14** (Proposition 2.2 w [H3]). *Niech  $M_\alpha^{\beta,\gamma}$  będzie procesem PL dla  $\gamma < \beta/\alpha$ . Wówczas*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1+\alpha\gamma-\beta} P(M_\alpha^{\beta,\gamma}(t) > x) = \frac{t\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma + \frac{1-\beta}{\alpha} + 1)\Gamma(\beta - \alpha\gamma)\lambda^\gamma}. \quad (3.1.37)$$

*Dodatkowo proces PL ma skończony moment rzędu  $p$  wtedy i tylko wtedy gdy  $0 < p < 1 + \alpha\gamma - \beta$ .*

W dowodzie powyższego twierdzenia, stosując ograniczenie  $\gamma < \beta/\alpha$ , używamy Twierdzeń Tauberowskich otrzymując wskazany rezultat.

Wnioskując po zachowaniu asymptotycznym ogona dystrybuanty i wykorzystując  $EX^p = \int_0^\infty P(X^p > x)dx$ , otrzymujemy natychmiast drugi rezultat o skończoności momentów  $p$ -tego rzędu. Kolejny rezultat dotyczy zachowania trajektorii procesu PL. Korzystając z Twierdzenia 21.9 w [35] można pokazać, że  $M_\alpha^{\beta,\gamma}(t, \omega)$  ma z prawdopodobieństwem 1 trajektorie o skończonym wahanii na odcinku  $(0, t]$  dla każdego  $t \in (0, \infty)$ . Sformułujmy zatem odpowiednie twierdzenie.

**Twierdzenie 3.15** (Proposition 2.3 w [H3]). *Z prawdopodobieństwem 1 proces PL ma trajektorie o skończonym wahanii.*

Dowód twierdzenia polega na sprawdzeniu istnienia całki  $\int_0^1 x \pi_{M_\alpha^{\beta,\gamma}}(x) dx$  [10].

Istotnym wynikiem pracy jest wyznaczenie reprezentacji procesu PL poprzez subordynację. Wynik ten jest komplementarny do wyników przedstawionych w pracach [H1, H2] i zamyka tę część rozprawy habilitacyjnej.

**Twierdzenie 3.16** (Theorem 3.1 w [H3]). *Proces PL możemy zdefiniować również poprzez subordynację procesu  $\alpha$ -stabilnego następująco*

$$M_\alpha^{\beta,\gamma}(t) \stackrel{d}{=} S_\alpha \left( M_1^{1-(\frac{1-\beta}{\alpha}),\gamma}(t) \right), \quad (3.1.38)$$

gdzie  $\stackrel{d}{=}$  oznacza równość rozkładów skończenie wymiarowych ponadto zakładamy, że proces  $M_1^{1-(\frac{1-\beta}{\alpha}),\gamma}$  jest niezależny od  $S_\alpha$ .

Dowód twierdzenia polega na wykorzystaniu warunkowej wartości oczekiwanej, niezależności obu procesów oraz (2.0.4) i Twierdzenia 3.13.

Wspomnijmy na koniec, że poprzez uogólnienie procesu ML dochodzimy również do istotnego uogólnienia procesów  $\alpha$ -stabilnych, w związku z analogią, że klasyczny proces typu ML to subordynowany  $\alpha$ -stabilny subordynator.

## 3.2 Subordynowane procesy ułamkowe i ich uogólnienia [H4-H6]

Do tej pory zajmowaliśmy się analizą procesów subordynowanych, w których to proces zewnętrzny był również subordynatorem, a więc procesem o wartościach nieujemnych. Kolejne rezultaty będą dotyczyły subordynacji konkretnych klas procesów o wartościach rzeczywistych, które możemy nazwać procesami ułamkowymi.

Zacniemy od analizy procesu  $n$ -FBM, gdzie rozszerzamy wyniki zawarte w [18]. Rozważać będziemy proces subordynowany zdefiniowany następująco

$$X(t) = B_H^n(G(t)), \quad t \geq 0, \quad (3.2.1)$$

gdzie  $(G(t))_{t \geq 0}$  jest procesem gamma niezależnym od procesu  $n$ -FBM  $(B_H^n(t))_{t \geq 0}$ .

Zanim zaczniemy przedstawiać własności tego procesu, podajmy kilka wyników dla samego procesu zewnętrznego. Zauważmy najpierw, że  $n$ -FBM posiada tzw. własność długo-zasięgowych korelacji w myśl definicji 3.3. Poniższe twierdzenie jest wnioskiem z postaci funkcji kowariancji procesu  $n$ -FBM.

**Twierdzenie 3.17** (Proposition 2.1 w [H4]). *Proces  $n$ -FBM posiada własność długiej pamięci w myśl Definicji 3.3, dla każdego  $H \in (n-1, n)$ .*

Dowód tego twierdzenia wynika bezpośrednio z postaci funkcji autokowariancji (2.0.12).

Możemy również uogólnić równanie różniczkowe, które spełnia gęstość prawdopodobieństwa procesu  $(B_H^n(t))_{t \geq 0}$  w każdym punkcie  $t > 0$ .

**Twierdzenie 3.18** (Theorem 2.1 w [H4]). *Gęstość prawdopodobieństwa  $p_H^n(t, x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$  procesu  $n$ -FBM jest rozwiązaniem następującego równania różniczkowego*

$$\frac{\partial}{\partial t} p_H^n(t, x) = H c_H^n \binom{2H-1}{n-1} t^{2H-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} p_H^n(t, x) \quad (3.2.2)$$

z warunkiem początkowym  $p_H^n(0, x) = \delta(x)$ .

Dowód tego twierdzenia polega na bezpośrednim rachunku, wykorzystując fakt, że  $(B_H^n(t))_{t \geq 0}$  jest procesem gaussowskim i jego gęstość może być zapisana przy pomocy odwrotnej transformaty Fouriera

$$p_H^n(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} e^{-\frac{1}{2} u^2 c_H^n \binom{2H-1}{n-1} t^{2H}} du.$$

W pracy podajemy szereg rezultatów dotyczących momentów i gęstości prawdopodobieństwa procesu  $(X(t))_{t \geq 0}$ . Główne wyniki dotyczą jednak postaci równania różniczkowego, które spełnia gęstość prawdopodobieństwa  $X$  oraz jego kowariancji.

**Twierdzenie 3.19** (Theorem 3.1 w [H4]). *Gęstość prawdopodobieństwa  $p(t, x)$  procesu  $X(t)$ ,  $t > 0$  spełnia następujące uogólnione równanie różniczkowe*

$$-(1 - e^{-\partial t}) p(t, x) = H c_H^n \binom{2H-1}{n-1} t^{2H-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(t, x), \quad (3.2.3)$$

Z warunkami początkowymi i brzegowymi

$$\begin{cases} p(0, x) = \delta(x) \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} p(t, x) = 0 \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial x} p(t, x) = 0 \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Tutaj  $e^{-\partial t}$  jest operatorem przesunięcia zdefiniowanym w (3.1.17) dla  $k = 1$ .

Zauważmy, że warunki brzegowe (3.2.4) są spełnione dla gęstości  $n$ -FBM, stąd automatycznie przenoszą się na proces subordynowany. Dalsze kroki dowodu polegają na bezpośrednim przealkowaniu prawej strony równania (3.2.3) a następnie wykorzystania faktu, że gęstość subordynatora gamma spełnia odpowiednie równanie z operatorem przesunięcia [36].

Przejdziemy teraz do głównego wyniku pracy [H4], w którym wyznaczamy jawną reprezentację na funkcję autokowariancji procesu  $(X(t))_{t \geq 0}$  zdefiniowanego w równaniu (3.2.1).

**Twierdzenie 3.20** (Proposition 3.3 w [H4]). *Kowariancja procesu  $X(t)$ ,  $t \geq 0$  zdefiniowanego w równaniu (3.2.1) ma następującą postać.*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_H^n(G(t))B_H^n(G(s))) &= (-1)^n \frac{c_H^n}{2} \left\{ \frac{\Gamma((t-s)/\nu + 2H)}{\Gamma((t-s)/\nu)} - \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{2H}{j} \right. \\ &\quad \left. \times \left[ \frac{\Gamma(2H + t/\nu) \mathbf{B}\left(\frac{t-s}{\nu}, \frac{s}{\nu} + 2H - j\right)}{\Gamma(s/\nu) \Gamma\left(\frac{t-s}{\nu}\right)} + \frac{\Gamma(2H + t/\nu) \mathbf{B}\left(\frac{t-s}{\nu}, \frac{s}{\nu} + j\right)}{\Gamma(s/\nu) \Gamma\left(\frac{t-s}{\nu}\right)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Tutaj  $\mathbf{B}(\cdot, \cdot)$  to funkcja Beta zdefiniowana poprzez

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

Dowód tego twierdzenia jest dwuetapowy. Po pierwsze wykorzystujemy postać funkcji kowariancji procesu  $n$ -FBM dzięki użyciu warunkowej wartości oczekiwanej i niezależności procesów  $B_H^n(t)$ ,  $t \geq 0$  i  $G(t)$ ,  $t \geq 0$ . W kolejnym etapie kluczowa jest analiza wartości oczekiwanych  $\mathbb{E} \left( \left( \frac{G(t-s)}{G(s)} + 1 \right)^j G(s)^{2H} \right)$  oraz  $\mathbb{E} \left( \left( \frac{G(t-s)}{G(s)} + 1 \right)^{2H-j} G(s)^{2H} \right)$ . Każdą z nich możemy zapisać w podobny sposób wykorzystując jawną postać gęstości prawdopodobieństwa dla rozkładu gamma. W ostatnim kroku istotne jest zauważenie, że skomplikowana funkcja podcałkowa może przy odpowiedniej zmianie parametrów być iloczynem gęstości rozkładu Beta prime oraz rozkładu gamma. Ten element dowodu jest głównym i kluczowym etapem dzięki któremu dochodzimy do jawnych postaci skomplikowanych całek. Warto zauważyć, że otrzymany rezultat, gdy  $n = 1$  redukuje się automatycznie do wyniku z pracy [18].

Natychmiastową konsekwencją Twierdzenia 3.20 jest następujące twierdzenie, w którym wykazujemy, że proces  $n$ -FBM posiada tzw. własność długo zasięgowych korelacji.

**Twierdzenie 3.21** (Proposition 3.4 w [H4]). *Proces  $X(t)$ ,  $t \geq 0$  zdefiniowany przez (3.2.1), posiada własność długo-zasięgowych korelacji dla każdego  $H \in (n - 1, n)$ .*

Dowód powyższego twierdzenia jest techniczny i opiera się głównie na wyniku głównego Twierdzenia 3.20. W pierwszym kroku znajdujemy dominujący składnik w każdej z sum, a następnie korzystamy z asymptotyki funkcji gamma w nieskończoności.

Będąc nadal w świecie procesów nazywanych ułamkowymi, rozważamy ułamkowy  $\alpha$ -stabilny ruch Lévy'ego, będący podobnie jak  $n$ -FBM uogólnieniem klasycznego FBM, w którym zamiast całkować względem ruchu Browna całkujemy względem symetrycznego procesu  $\alpha$ -stabilnego zmieniając również odpowiednio funkcję podcałkową. Postać tego procesu podana jest w Definicji 2.11.

Podobnie jak poprzednio, zdefiniujemy proces subordynowany tym razem w sposób następujący.

**Definicja 3.6.** *Proces stochastyczny  $(X(t))_{t \geq 0}$  zdefiniowany następująco*

$$X(t) = Z_H^\alpha(G(t)), t \geq 0, \quad (3.2.6)$$

będziemy nazywać subordynowanym ułamkowym ruchem  $\alpha$ -stabilnym.  $G(t)$ ,  $t \geq 0$  jest tutaj procesem gamma z TL  $\mathbb{E}e^{-uG(t)} = e^{-\frac{t}{v} \log(1+u)}$ . Zakładamy również, że procesy  $Z_H^\alpha(t)$ ,  $t \geq 0$  oraz  $G(t)$ ,  $t \geq 0$  są niezależne.

Ponieważ dla procesów  $\alpha$ -stabilnych ze względu na fakt, iż ich wariancja jest nieskończona (dla  $\alpha \in (0, 2)$ ) wykorzystajmy alternatywną miarę zależności kodyferencję.

**Definicja 3.7** ([3, 16]). *Kodyferencję (autokodyferencję) procesu stochastycznego  $(Y(t))_{t \geq 0}$  definiujemy jako*

$$\text{CD}_Y(t) = \log \mathbb{E}e^{i(Y(t)-Y(0))} - \log \mathbb{E}e^{iY(t)} - \log \mathbb{E}e^{-iY(0)}, \quad t \geq 0. \quad (3.2.7)$$

Bazując na kodyferencji zdefiniujemy również w jej języku własność długozasięgowej zależności [40].

**Definicja 3.8** ([40]). *Mówimy, że stacjonarny  $\alpha$ -stabilny proces stochastyczny  $Y(t)$ ,  $t \geq 0$  posiada własność długozasięgowej zależności, gdy*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \text{CD}_Y(n) = \infty. \quad (3.2.8)$$

Kodyferencja procesu  $Z_H^\alpha(t)$ ,  $t \geq 0$  wynosi [16]

$$\text{CD}(Z_H^\alpha(t), Z_H^\alpha(s)) = k(H, \alpha) (t^{\alpha H} + s^{\alpha H} - |t - s|^{\alpha H}), \quad (3.2.9)$$

gdzie  $k(H, \alpha) = \int_0^\infty |(1+u)^{H-1/\alpha} - u^{H-1/\alpha}|^\alpha du + \frac{1}{H\alpha}$ . Dla pewnych ustalonych  $s$  oraz odpowiednio dużych wartości  $t$ , mamy  $\text{CD}(Z_H^\alpha(t), Z_H^\alpha(s)) \sim k(H, \alpha)\alpha H s t^{\alpha H-1}$ .

Rozważając przyrosty procesu FLSM, zwane ułamkowym  $\alpha$ -stabilnym szumem i zdefiniowane jako  $z_H^\alpha(n) = Z_H^\alpha(n+1) - Z_H^\alpha(n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , kodyferencja dla dużych  $n$  może być aproksymowana funkcją potęgową [41]. Dokładniej, jeśli  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $0 < H < 1$  lub  $1 < \alpha < 2$ ,  $1 - \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} < H < 1$ ,  $H \neq 1/\alpha$ , wtedy gdy  $n \rightarrow \infty$

$$\text{CD}_{z_H^\alpha}(n) \sim Cn^{\alpha H - \alpha}.$$

Gdy  $1 < \alpha < 2$  i  $0 < H < 1 - \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}$ , wtedy dla  $n \rightarrow \infty$

$$\text{CD}_{z_H^\alpha}(n) \sim Dn^{H-1/\alpha-1},$$

gdzie stałe  $C$  oraz  $D$  są niezależne od  $n$ . W konsekwencji proces przyrostów  $z_H^\alpha(n)$  charakteryzuje się długozasięgowymi zależnościami dla  $H > 1/\alpha$ .

Przed sformułowaniem kolejnego twierdzenia, w którym podajemy wzór na funkcję charakterystyczną subordynowanego FLSM, wprowadźmy następującą notację [42].

$$(1-z)^{-\gamma, q} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{qn}}{n!} z^n, \quad q \in (0, 1) \cup \mathbb{N}, \text{Re}(\gamma) > 0. \quad (3.2.10)$$

Gdzie  $(\gamma)_{qn} = \frac{\Gamma(\gamma+qn)}{\Gamma(\gamma)}$  jest tzw. uogólnionym symbolem Pochammera [42, 12]. Zauważmy, że gdy  $q = 1$  równanie (3.2.10) redukuje się do klasycznego rozwinięcia w szereg funkcji  $(1-z)^{-\gamma}$ .

**Twierdzenie 3.22** (Proposition 4.2 w [H5]). *Proces  $X(t)$ ,  $t \geq 0$  zdefiniowany w równaniu (3.2.6), dla  $\alpha H \in (0, 1)$ , ma następującą funkcję charakterystyczną*

$$\mathbb{E}(e^{iX(t)}) = e^{-\log\left(\frac{1}{(1+k(H,\alpha))^{-t/\nu,\alpha H}}\right)}, \quad (3.2.11)$$

gdzie  $(1+k(H,\alpha))^{-t/\nu,\alpha H}$  jest zdefiniowane w (3.2.10) a stała  $k(H,\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| (1-u)_+^{H-1/\alpha} - (-u)_+^{H-1/\alpha} \right|^\alpha du$ .

Dowód tego twierdzenia opiera się na wykorzystaniu niezależności procesów  $Z_H^\alpha(t)$ ,  $t \geq 0$  oraz  $G(t)$ ,  $t \geq 0$ , samopodobieństwa zewnętrznego procesu stabilnego, a także definicji funkcji gamma. Kluczowe jest również zauważenie, iż

$$\frac{1}{\Gamma(t/\nu)} \int_0^\infty e^{-x^{\alpha H} k(H,\alpha) - x} x^{\frac{t}{\nu}-1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(t/\nu)} \int_0^\infty e^{-x} \frac{(-k(H,\alpha))^n x^{\alpha H n}}{n!} x^{\frac{t}{\nu}-1} dx, \quad (3.2.12)$$

od którego dalej prowadzimy rozumowanie w kierunku otrzymania postaci szeregu podobnego do (3.2.10). Bezpośrednią konsekwencją powyższego twierdzenia jest postać funkcji autokodyferencji.

**Twierdzenie 3.23** (Proposition 4.3 w [H5]). *Kodyferencja procesu  $X(t)$ ,  $t \geq 0$ , dla  $\alpha H \in (0, 1)$ , wynosi*

$$\begin{aligned} \text{CD}(X(t), X(s)) &= \log\left((1+k(H,\alpha))^{-(t-s)/\nu,\alpha H}\right) \\ &\quad - \log\left((1+k(H,\alpha))^{-t/\nu,\alpha H}\right) - \log\left((1+k(H,\alpha))^{-s/\nu,\alpha H}\right). \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Zauważmy, że korzystając z formuły Stirlinga  $x^{-\beta}\Gamma(x+\beta)/\Gamma(x) \rightarrow 1$  gdy  $x \rightarrow \infty$ , możemy łatwo wywnioskować, że

$$(1+k(H,\alpha))^{-t/\nu,\alpha H} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k(H,\alpha))^n \Gamma(\alpha H n + t/\nu)}{\Gamma(t/\nu) n!} \sim e^{-k(H,\alpha)(t/\nu)^{\alpha H}}, \quad \text{gdy } t \rightarrow \infty. \quad (3.2.14)$$

Ta obserwacja może nam posłużyć do wyciągnięcia następującego wniosku, który możemy sformułować w postaci twierdzenia.

**Twierdzenie 3.24** (Proposition 4.4 w [H5]). *Niech  $\nu = 1$ , gdy  $t \rightarrow \infty$ ,  $s \rightarrow \infty$  a także  $|t - s| \rightarrow \infty$ , wtedy kodyferencja subordynowanego FLSM zachowuje się asymptotycznie jak kodyferencja procesu FLSM tzn.  $\text{CD}(X(t), X(s)) \sim \text{CD}(Z_H^\alpha(t), Z_H^\alpha(s))$ .*

Dowód powyższego twierdzenia jest konsekwencją monotoniczności funkcji logarytmicznej oraz naszych wcześniejszych rozważań z równania (3.2.14). W artykule [H5] rozważamy również inne reprezentacje funkcji charakterystycznej procesu  $X(t)$ ,  $t \geq 0$ , które wyrażamy w postaci funkcji Focha-Wrighta [12]. Habilitant chciałby zaznaczyć, iż we wzorze na funkcję charakterystyczną (w konsekwencji również na kodyferencję) wyznaczoną w pracy [H5] w Proposition 4.5 (dla kodyferencji Proposition 4.6), nie wspomnianym w rozprawie habilitacyjnej brakuje przeskalowania wartości przez czynnik  $1/\Gamma(t/\nu)$ . Wykorzystujemy własności całkowania funkcji specjalnych oraz obserwację, że zmienna losowa  $G^{\alpha H}(t)$  ma uogólniony rozkład gamma [43] otrzymujemy odpowiedniki Twierdzeń 3.22, 3.23.

W pracy [H5] podajemy również oszacowania prawdopodobieństwa supremum dla procesu  $X(t)$ ,  $t \geq 0$ .

**Twierdzenie 3.25** (Proposition 4.9 w [H5]). *Niech  $\alpha \in (1, 2)$  oraz  $1 > H > 1/\alpha$  wtedy istnieją skończone i dodatnie stałe  $c = c(\alpha, H)$  i  $\theta > 0$ , takie, że dla każdego  $0 < \epsilon < e^{-1}$ , zachodzi.*

$$\mathbb{E} \left( e^{-cG(T) \log(\frac{1}{\epsilon} G(T)^H)} \right) \leq \mathbb{P} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} |X(t)| \leq \epsilon \right) \leq (1 - c^{-1} \epsilon^{-1/H})^{-T/\nu}. \quad (3.2.15)$$

Dowód Twierdzenia 3.25 wynika bezpośrednio z wyników pracy [44] oraz warunkowania względem procesu wewnętrznego.

Rozważając subordynowany FLSM, gdzie całkujemy względem symetrycznego  $\alpha$ -stabilnego procesu rozważać będziemy teraz ten ostatni proces z czasem zamienionym na temperowany  $\alpha$ -stabilny subordynator.

**Definicja 3.9.** *Niech  $S_\alpha(t)$ ,  $t \geq 0$  będzie symetrycznym procesem  $\alpha$ -stabilnym,  $0 < \alpha \leq 2$ , a  $T_{\lambda, \beta}(t)$ ,  $t \geq 0$  niezależnym od niego subordynatorem temperowanym  $\alpha$ -stabilnym. Wtedy proces subordynowany  $X_{\alpha, \lambda, \beta}(t)$ ,  $t \geq 0$  definiujemy następująco*

$$X_{\alpha, \lambda, \beta}(t) := S_\alpha(T_{\lambda, \beta}(t)), t \geq 0. \quad (3.2.16)$$

Taka konstrukcja pozwala nam na przytoczenie wielu interesujących własności takiego procesu, warto wspomnieć tutaj o transformacie Fouriera, którą można wyznaczyć wprost.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{iuX_{\alpha, \lambda, \beta}(t)}) &= \mathbb{E}(e^{iuS_\alpha(T_{\lambda, \beta}(t))}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(e^{iuS_\alpha(T_{\lambda, \beta}(t))} | T_{\lambda, \beta}(t))) \\ &= \mathbb{E}(e^{-T_{\lambda, \beta}(t)|u|^\alpha}) = e^{-t((|u|^\alpha + \lambda)^\beta - \lambda^\beta)} \quad (\text{patrz (2.0.5)}). \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Jednak jednym z głównych wyników, które domykają tę część rozprawy, będzie wyznaczenie odpowiednika równania różniczkowego, jakie spełnia gęstość prawdopodobieństwa procesu  $X_{\alpha, \lambda, \beta}(t)$ ,  $t \geq 0$  oraz zachowania jego miary Lévy'ego. Okazuje się, że również w tym przypadku spotykamy się z wprowadzoną już wcześniej tzw. przesuniętą pochodną ułamkową.

**Twierdzenie 3.26** (Theorem 3.1 w [H6]). *Niech  $X_{\alpha, \lambda, \beta}(t)$ ,  $t \geq 0$  będzie procesem stochastycznym zdefiniowanym w (3.2.16), wtedy jego gęstość prawdopodobieństwa  $h_{\alpha, \lambda, \beta}(x, t)$  jest rozwiązaniem następującego ułamkowego równania Fokkera-Plancka-Kolmogorova*

$$\left( \lambda^\beta - \frac{\partial}{\partial t} \right)^{1/\beta} h_{\alpha, \lambda, \beta}(x, t) = \lambda h_{\alpha, \lambda, \beta}(x, t) - (-\Delta)_x^{\alpha/2} h_{\alpha, \lambda, \beta}(x, t), \quad (3.2.18)$$

z warunkami początkowymi  $h_{\alpha, \lambda, \beta}(0, t) = 0$  oraz  $h_{\alpha, \lambda, \beta}(x, 0) = \delta(x)$ . Operator  $(-\Delta)^a$ ,  $a \in (0, 1)$  oznacza tutaj ułamkowy Laplasjan a  $(\lambda^\beta - \frac{\partial}{\partial t})^{1/\beta}$  jest tzw. przesuniętą ułamkową pochodną zdefiniowaną w (3.1.16).

Dowód twierdzenia, polega na bezpośrednim zastosowaniu przesuniętej pochodnej z lewej strony równania (3.2.18) na funkcji gęstości procesu  $X_{\alpha,\lambda,\beta}(t)$ ,  $t \geq 0$ , którą dzięki niezależności procesu zewnętrznego i wewnętrznego możemy zapisać jako

$$h_{\alpha,\lambda,\beta}(x,t) = \int_0^\infty f_\alpha(x,r)g_{\lambda,\beta}(r,t)dr, \quad (3.2.19)$$

gdzie  $f_\alpha(\cdot, \cdot)$  i  $g_{\lambda,\beta}(\cdot, \cdot)$  są gęstościami prawdopodobieństwa odpowiednio procesów  $\alpha$ -stabilnego i temperowanego  $\alpha$ -stabilnego. Dalej wykorzystujemy fakt, że gęstość procesu temperowanego spełnia odpowiednie równanie z przesuniętą pochodną ułamkową [36].

Warto zauważyć, że wynik ten w specjalnych przypadkach redukuje się do znanych rezultatów. Mamy więc następujący fakt.

**Fakt 3.2** ([H6]). *Dla  $\beta = 1/2$ , gęstość prawdopodobieństwa  $h := h_{\alpha,\lambda,1/2}(x,t)$  spełnia równanie procesu  $\alpha$ -stabilnego z odwrotnym gaussowskim subordynatorem (z ang. normal inverse Gaussian, NIG) [45]*

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - 2\sqrt{\lambda} \frac{\partial h}{\partial t} = (-\Delta)_x^{\alpha/2} h. \quad (3.2.20)$$

Dla  $\alpha = 2$  równanie (3.2.20) staje się równaniem, które spełnia proces odwrotny gaussowski [45] Równanie to możemy zapisać jako  $\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - 2\sqrt{\lambda} \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$  które ma podobną postać jak równanie telegrafistów, jednak nim nie jest, ponieważ współczynniki pochodnej czasowej pierwszego rzędu i pochodnej po przestrzeni drugiego rzędu są ujemne. Dla  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1/2$  oraz  $\lambda = 0$ ,  $h$  staje się gęstością symetrycznego procesu Cauchy'ego i spełnia równanie  $\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ .

Przed przystąpieniem do zaprezentowania kolejnego rezultatu wprowadźmy definicję zmodyfikowanej funkcji Bessela trzeciego rodzaju  $K_\nu(\omega)$ .

$$K_\nu(\omega) = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-\frac{1}{2}\omega(x+x^{-1})} dx, \quad \omega > 0. \quad (3.2.21)$$

Sformułujmy teraz twierdzenie podające w przypadku specjalnym ( $\alpha = 2$ , czyli gdy mamy do czynienia z przeskalowanym ruchem Browna) postać gęstości miary Lévy'ego, natomiast w innych przypadkach jej asymptotyczne zachowanie.

**Twierdzenie 3.27** (Proposition 3.2 w [H6]). *Gęstość miary Lévy'ego procesu  $X_{\alpha,\lambda,\beta}(t)$ ,  $t \geq 0$  możemy przedstawić jako*

$$\nu(y) \begin{cases} = \frac{c_\beta}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{|y|}{\sqrt{2\lambda}}\right)^{-\beta-1/2} K_{-\beta-1/2}(|y|\sqrt{2\lambda}), & \text{dla } \alpha = 2 \\ \sim \alpha c_\beta C_\alpha \Gamma(-\beta) \frac{\lambda^\beta}{y^{1+\alpha}}, & \text{dla } 0 < \alpha < 2, \end{cases} \quad (3.2.22)$$

gdzie  $c_\beta = \beta/\Gamma(1-\beta)$ .

Dowód tego twierdzenia polega na zastosowaniu podejścia [33] (zob. również równość (3.1.13)). W przypadku gaussowskim korzystając z (3.1.13) możemy wykorzystać postać funkcji gęstości prawdopodobieństwa dla ruchu Browna. Natomiast gdy  $0 < \alpha < 2$  korzystamy z asymptotycznego zachowania dystrybuanty procesów  $\alpha$ -stabilnych [3], tj.

$$\mathbb{P}(S_\alpha(t) > x) \sim C_\alpha t x^{-\alpha}, \quad (3.2.23)$$

gdzie

$$C_\alpha = \begin{cases} \frac{(1-\alpha)}{2\Gamma(2-\alpha)\cos(\frac{\pi\alpha}{2})}, & \text{gdy } \alpha \neq 1 \\ \frac{1}{\pi}, & \text{gdy } \alpha = 1. \end{cases} \quad (3.2.24)$$

W kolejnym twierdzeniu pokazujemy jak asymptotycznie zachowuje się tzw. ogon dystrybuanty procesu  $X_{\alpha,\lambda,\beta}(t)$ ,  $t \geq 0$ . Wykorzystamy w tym celu asymptotykę ogona dystrybuanty dla temperowanego  $\alpha$ -stabilnego subordynatora wyznaczoną w [H6], która jest postaci

$$\mathbb{P}(T_{\lambda,\beta}(t) > x) \sim d(\beta, \lambda, t) \frac{e^{-\lambda x}}{x^\beta}, \quad \text{gdy } x \rightarrow \infty, \quad (3.2.25)$$

gdzie  $d(\beta, \lambda, t) = \frac{t}{\beta\pi} \Gamma(1+\beta) \sin(\pi\beta) e^{\lambda\beta t}$ . Dzięki powyższemu łatwo jest pokazać kolejne twierdzenie.

**Twierdzenie 3.28** (Proposition 3.1 w [H6]). *Niech  $X_{\alpha,\lambda,\beta}(t)$  będzie procesem zdefiniowanym w (3.2.16), wtedy gdy  $x \rightarrow \infty$*

$$\mathbb{P}(X_{\alpha,\lambda,\beta}(t) > x) \sim \begin{cases} C_\alpha \beta \lambda^{\beta-1} t x^{-\alpha}, & \text{dla } \alpha \in (0, 2), \\ \frac{d(\beta,\lambda,t)}{2} (2\lambda)^{\beta/2} \frac{e^{-x\sqrt{2\lambda}}}{x^\beta}, & \text{dla } \alpha = 2, \end{cases} \quad (3.2.26)$$

gdzie stałe  $C_\alpha$  oraz  $d(\beta, \lambda, t)$  są zdefiniowane odpowiednio w (3.2.24) i (3.2.25).

### 3.3 Procesy Ornsteina-Uhlenbecka ich uogólnienia i subordynacje [H7-H11]

W poprzednich rozdziałach przeszliśmy od rozpatrywania procesów o wartościach nieujemnych do procesów o wartościach w całym zbiorze liczb rzeczywistych. Domknięciem cyklu prac będzie rozpatrywanie własności procesów, które są rozwiązaniem stochastycznego równania różniczkowego opisującego proces OU. Procesy OU będziemy rozważać zarówno w wersji stacjonarnej i niestacjonarnej.

W dalszej części rozprawy rozważać będziemy procesy OU. Zaczniemy od procesu OU względem dwustronnego procesu temperowanego  $\alpha$ -stabilnego zdefiniowanego w Definicji 2.8

$$dU(t) = -\mu U(t)dt + dT(t),$$

gdzie  $\mu > 0$  oraz  $U(0) = u_0 \in \mathbb{R}$ .

Korzystając z Lematu Itô rozwiązaniem powyższego równania jest

$$U(t) = e^{-\mu t} u_0 + \int_0^t e^{\mu(z-t)} dT(z). \quad (3.3.1)$$

W celu pełnego scharakteryzowania rozkładu takiego procesu wyprowadzimy postać funkcji charakterystycznej. W pracy pokazujemy dwa równoważne wzory, które równocześnie prezentują interesującą zależność pomiędzy pewnymi hipergeometrycznymi funkcjami specjalnymi [12]. Zanim przedstawimy główne rezultaty wprowadzimy definicję funkcji hipergeometrycznej, która może być określona poprzez nieskończony szereg [12]

$${}_pF_q \left( \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}; z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \dots (a_p)_k}{(b_1)_k \dots (b_q)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad (3.3.2)$$

gdzie  $a_i, b_j \in \mathbb{C}$ ,  $b_j \neq 0, -1, -2, \dots$ , ( $i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, q$ ). Symbol  $(z)_n$  jest zdefiniowanym wcześniej symbolem Pochhammera dla  $z \in \mathbb{Z}$  oraz nieujemnych liczb naturalnych  $n \in \mathbb{N}_0$  [42, 12]. Zauważmy, że powyższy szereg jest absolutnie zbieżny dla wszystkich  $z \in \mathbb{C}$  jeśli  $p \leq q$ . W szczególnym przypadku  $p = 2, q = 1$  szereg ten definiuje funkcję hipergeometryczną Gaussa [12].

Funkcja hipergeometryczna będzie nam potrzebna w przypadku kolejnego twierdzenia, w którym wyznaczymy jawną postać funkcji charakterystycznej procesu OU względem procesu temperowanego.

**Twierdzenie 3.29** (Theorem 1 w [H7]). *Temperowany proces OU  $U(t)$ ,  $t \geq 0$  zdefiniowany w równaniu (3.3.1) ma następującą funkcję charakterystyczną.*

$$\begin{aligned} \psi_{U(t)}(u) = \exp \left[ e^{-\mu t} i u u_0 + \Gamma(-\alpha) \left\{ \frac{1}{\alpha \mu} \left\{ \left[ (\lambda + i u)^\alpha {}_2F_1 \left( \begin{matrix} 1, -\alpha \\ -\alpha + 1 \end{matrix}; \frac{\lambda}{\lambda + i u} \right) - (\lambda + i u e^{-\mu t})^\alpha {}_2F_1 \left( \begin{matrix} 1, -\alpha \\ -\alpha + 1 \end{matrix}; \frac{\lambda}{\lambda + i u e^{-\mu t}} \right) \right] \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \left[ (\lambda - i u)^\alpha {}_2F_1 \left( \begin{matrix} 1, -\alpha \\ -\alpha + 1 \end{matrix}; \frac{\lambda}{\lambda - i u} \right) - (\lambda - i u e^{-\mu t})^\alpha {}_2F_1 \left( \begin{matrix} 1, -\alpha \\ -\alpha + 1 \end{matrix}; \frac{\lambda}{\lambda - i u e^{-\mu t}} \right) \right] \right\} - 2\lambda^\alpha t \right\} \right]. \quad (3.3.3) \end{aligned}$$

Dowód twierdzenia opiera się na wyniku z pracy [46], gdzie dla procesu Lévy'ego  $L(t)$ ,  $t \geq 0$  ze skończonymi wykładniczymi momentami zachodzi

$$E \left[ \exp \left( \int_0^t f(s) dL(s) \right) \right] = \exp \left( \int_0^t \vartheta(f(s)) ds \right), \quad (3.3.4)$$

gdzie  $f$  jest pewną ograniczoną funkcją z  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  taką, że  $|\Re(f)| < M$  oraz

$$\vartheta(u) = \log [E(\exp(uL_1))]$$

W naszym przypadku widać, iż

$$\vartheta(u) = \Gamma(-\alpha) \{[(\lambda + u)^\alpha - \lambda^\alpha] + [(\lambda - u)^\alpha - \lambda^\alpha]\}. \quad (3.3.5)$$

Co w połączeniu z (3.3.4) pozwala nam napisać

$$E[\exp(iuU(t))] = \exp \left[ \int_0^t \Gamma(-\alpha) \left[ (\lambda + iue^{-\mu(t-s)})^\alpha - \lambda^\alpha \right] + \left[ (\lambda - iue^{-\mu(t-s)})^\alpha - \lambda^\alpha \right] ds \right]. \quad (3.3.6)$$

Dalej dowód prowadzimy całkując funkcję  $\vartheta$ , gdzie głównym pomysłem było rozwinięcie w szereg funkcji podcałkowej i wykorzystanie definicji funkcji hipergeometrycznej.

W pracy [H7] udało się otrzymać również równoważną postać funkcji charakterystycznej sformułowaną w poniższym twierdzeniu.

**Twierdzenie 3.30** (Theorem 2 w [H7]). *Funkcja charakterystyczna temperowanego procesu OU  $U(t)$ ,  $t \geq 0$  zdefiniowanego w (3.3.1) ma następującą postać*

$$\begin{aligned} \psi_{U(t)}(u) = \exp \left[ e^{-\mu t} uu_0 + \frac{\lambda^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{4\mu} \left[ \left( \frac{i u}{\lambda} \right)^2 {}_4F_3 \left( \begin{matrix} 2, 2, 1, 2-\alpha \\ 3, 3, 2 \end{matrix}; \frac{i u}{\lambda} \right) - \left( \frac{i u e^{-\mu t}}{\lambda} \right)^2 {}_4F_3 \left( \begin{matrix} 2, 2, 1, 2-\alpha \\ 3, 3, 2 \end{matrix}; \frac{i u e^{-\mu t}}{\lambda} \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{\lambda^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{4\mu} \left[ \left( \frac{-i u}{\lambda} \right)^2 {}_4F_3 \left( \begin{matrix} 2, 2, 1, 2-\alpha \\ 3, 3, 2 \end{matrix}; \frac{-i u}{\lambda} \right) - \left( \frac{-i u e^{-\mu t}}{\lambda} \right)^2 {}_4F_3 \left( \begin{matrix} 2, 2, 1, 2-\alpha \\ 3, 3, 2 \end{matrix}; \frac{-i u e^{-\mu t}}{\lambda} \right) \right] \right]. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Dowód twierdzenia oparty jest na obserwacjach

$$\int_0^\infty \left( e^{i u x e^{\mu(s-t)}} - 1 - i u x e^{\mu(s-t)} \right) e^{-\lambda x} \frac{dx}{x^{1+\alpha}} = \Gamma(-\alpha) \left[ (\lambda - i u x e^{\mu(s-t)})^\alpha - \lambda^\alpha \right] \quad (3.3.8)$$

oraz

$$\int_0^\infty \left( e^{-i u x e^{\mu(s-t)}} - 1 + i u x e^{\mu(s-t)} \right) e^{-\lambda x} \frac{dx}{x^{1+\alpha}} = \Gamma(-\alpha) \left[ (\lambda + i u x e^{\mu(s-t)})^\alpha - \lambda^\alpha \right], \quad (3.3.9)$$

które wynikają z ogólnego Twierdzenia 17.1 z [35] sformułowanego dla szerokiej klasy procesów Lévy'ego. Dalej dowód prowadzimy podobnie jak poprzednio rozwijając w szereg nieskończony funkcję podcałkową.

Sformułujmy kolejny wynik, w którym podobnie jak w poprzednich pracach analizujemy strukturę zależności temperowanego procesu OU.

**Twierdzenie 3.31** (Theorem 4 w [H7]). *Kowariancja temperowanego  $\alpha$ -stabilnego procesu OU zdefiniowanego w (3.3.1) wynosi*

$$\text{Cov}(U(t), U(s)) = \frac{\Gamma(2-\alpha)\lambda^{\alpha-2}}{\mu} (e^{-\mu|t-s|} - e^{-\mu(t+s)}). \quad (3.3.10)$$

Dowód twierdzenia opiera się na obserwacji, iż proces  $T(t)$ ,  $t \geq 0$  będąc procesem Lévy'ego jest scentrowanym martyngałem [10] o wariacji kwadratowej równej  $\langle T \rangle(t) = E(T^2(t)) = t2\Gamma(2-\alpha)\lambda^{\alpha-2}$ . Dalej kroki dowodu przebiegają analogicznie do przypadku gaussowskiego, gdzie w szczególności wykorzystujemy

$$e^{-\mu(t+s)} E \left( \left( \int_0^{\min(t,s)} e^{\mu w} dT(w) \right)^2 \right) = e^{-\mu(t+s)} E \left( \int_0^{\min(t,s)} e^{2\mu w} d\langle T \rangle(w) \right).$$

Podamy teraz własności subordynowanego procesu OU względem procesu Wienera  $W(t)$ ,  $t \geq 0$

$$dU_G(t) = -\lambda U_G(t)dt + \sigma dW(t), \quad U_G(0) = u_0 \quad (3.3.11)$$

gdzie w równaniu (3.3.11)  $\lambda > 0$ ,  $u_0 \in \mathbb{R}$  oraz względem dwustronnego procesu  $\alpha$ -stabilnego  $S(t)$ ,  $t \geq 0$  (patrz Definicja 2.6)

$$dU_S(t) = -\lambda U_S(t)dt + dS(t), \quad U_S(0) = u_0. \quad (3.3.12)$$

Subordynatorem w obu przypadkach będzie proces gamma zdefiniowany w równaniu (2.0.6) gdzie przyjmiemy oznaczenie  $\lambda = \eta$  oraz założymy, że  $\beta = 1$ . W artykule [H8] omawiamy również zagadnienia dla procesu  $U_S(t)$ ,  $t \geq 0$  bez subordynatora, skupimy się jednak na wynikach dla procesów subordynowanych. Zaczniemy od przypadku subordynowanego procesu gaussowskiego

$$X_G(t) = U_G(G_\eta(t)), \quad t \geq 0, \quad (3.3.13)$$

gdzie  $G_\eta(t)$  jest procesem gamma.

Funkcję specjalną Kummera, możemy przedstawić w formie szeregu nieskończonego

$$M(a; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(c)z^k}{\Gamma(c+k)\Gamma(a)k!}, \quad z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-, \quad (3.3.14)$$

**Twierdzenie 3.32** (Proposition 3.3 w [H8]). *Funkcję charakterystyczną procesu  $\{X_G(t)\}_{t \geq 0}$  zdefiniowanego w równaniu (3.3.13), w czasie  $t = 1$  możemy przedstawić jako*

$$E(e^{izX_G(1)}) = e^{-\frac{z^2\sigma^2}{4\lambda}} \frac{\eta^2}{2\lambda(\eta+2\lambda)} M\left(\frac{\eta}{2\lambda}; \frac{\eta}{2\lambda} + 1; \frac{(z\sigma)^2}{(4\lambda)}\right), \quad (3.3.15)$$

gdzie  $M(a; b; z)$  jest funkcją Kummera określoną w równaniu (3.3.14).

Idea dowodu twierdzenia opiera się na rozwinięciu w szereg  $E(e^{izX_G(1)}) = E\left(e^{-\frac{z^2\sigma^2}{4\lambda}(1-e^{-2\lambda G_\eta(1)})}\right)$ , a następnie policzeniu wartości oczekiwanej każdego składnika szeregu i reprezentacji rezultatu w formie funkcji Kummera.

Zwartą formę funkcji charakterystycznej w postaci funkcji Kummera uzyskujemy w przypadku  $t = 1$ , niemniej jednak możemy funkcję charakterystyczną zapisać dla dowolnego  $t > 0$ .

**Fakt 3.3** (Remark 1 w [H8]). *Funkcja charakterystyczna procesu  $\{X_G(t)\}_{t \geq 0}$  zdefiniowanego w równaniu (3.3.13), dla dowolnego  $t > 0$  może zostać wyrażona w postaci następującego szeregu*

$$E(e^{izX_G(t)}) = e^{-\frac{z^2\sigma^2}{4\lambda}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{(\sigma z)^{2k}}{(4\lambda)^k} \left(\frac{\eta}{\eta+2\lambda k}\right)^t. \quad (3.3.16)$$

Przejdźmy teraz do wyznaczenia autokowariancji procesu  $\{X_G(t)\}_{t \geq 0}$ .

**Twierdzenie 3.33** (Proposition 3.4 w [H8]). *Autokowariancja subordynowanego gaussowskiego procesu OU zdefiniowanego (3.3.13) z warunkiem początkowym  $u_0 = 0$  ma postać*

$$\text{Cov}(X_G(t), X_G(s)) = \frac{\sigma^2}{2\lambda} \left( \left( \frac{\eta}{\eta + \lambda} \right)^{t-s} - \left( \frac{\eta}{\eta + \lambda} \right)^{t+s} \right), \quad (3.3.17)$$

dla  $t > s > 0$ .

Idea dowodu polega na warunkowaniu wartości oczekiwanej względem dwuwymiarowej zmiennej losowej  $(G_\eta(s), G_\eta(t))$ , w której komponenty mają rozkład gamma.

Przejdziemy teraz do analizy subordynowanego  $\alpha$ -stabilnego procesu OU

$$X_S(t) = U_S(G_\eta(t)), \quad t \geq 0. \quad (3.3.18)$$

**Twierdzenie 3.34** (Proposition 3.6 w [H8]). *Ułamkowy moment bezwzględny  $m^\Gamma = E[|X_S(t)|^\Gamma]$ , dla  $-\infty < \Gamma < \alpha$  ma następującą postać*

$$m^\Gamma = \frac{2^\Gamma \Gamma \left(\frac{1+\Gamma}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{\Gamma}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{\Gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} (\alpha\lambda)^{-\frac{\Gamma}{\alpha}} \sigma^\Gamma \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{\Gamma}{\alpha}}{k} (-1)^k \left( \frac{\eta}{\eta + \alpha\lambda k} \right)^t. \quad (3.3.19)$$

Dowód twierdzenia polega na wykorzystaniu udowodnionej w pracy (Proposition 2.1) formuły na ułamkowy moment procesu  $U_S(t)$ ,  $t \geq 0$  oraz ułamkowej wersji rozwinięcia dwumianowego

$$E\left(1 - e^{-\alpha\lambda G_\eta(t)}\right)^{\frac{\Gamma}{\alpha}}. \quad (3.3.20)$$

Przejdźmy teraz do sformułowania wyniku opisującego funkcję charakterystyczną procesu  $X_S(t)$ ,  $t \geq 0$ . Podobnie jak w przypadku gaussowskim zwartą formułę jesteśmy w stanie przedstawić jedynie dla czasu  $t = 1$ .

**Twierdzenie 3.35** (Theorem 3.7 w [H8]). *Funkcja charakterystyczna subordynowanego procesu  $\{X_S(t)\}_{t \geq 0}$  zdefiniowanego w równaniu (3.3.18), w chwili  $t = 1$  ma następującą postać*

$$E\left(e^{izX_S(1)}\right) = e^{-\frac{|z|^\alpha}{\alpha\lambda}} \frac{\eta^2}{\alpha\lambda(\eta + \alpha\lambda)} M\left(\frac{\eta}{\alpha\lambda}; \frac{\eta}{\alpha\lambda} + 1; \frac{|z|^\alpha}{(\alpha\lambda)}\right), \quad (3.3.21)$$

gdzie  $M(a; b; z)$  jest specjalną funkcją Kummera określoną w równaniu (3.3.14).

W tym przypadku dowód przebiega analogicznie jak w Twierdzeniu 3.32. Podobnie jak poprzednio również w każdej chwili  $t > 0$  wyrazimy funkcję charakterystyczną w postaci nieskończonego szeregu.

**Fakt 3.4** (Remark 2 w [H8]). *Funkcja charakterystyczna procesu  $\{X_S(t)\}_{t \geq 0}$  zdefiniowanego w równaniu (3.3.18), w dowolnej chwili  $t > 0$  ma następującą postać*

$$E\left(e^{izX_S(t)}\right) = e^{-\frac{|z|^\alpha}{\alpha\lambda}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{|z|^{\alpha k}}{(\alpha\lambda)^k} \left( \frac{\eta}{\eta + \alpha\lambda k} \right)^t. \quad (3.3.22)$$

Kolejne wyniki, aż do końca rozprawy, będą dotyczyć procesów OU z czasem modelowanym przez odwrotny subordynator. Oprócz faktu, że czas zostaje zamieniony na proces który sam w sobie stanowi wyzwanie w analizie zauważmy, że brak tutaj takich własności jak np. stacjonarność przyrostów. Ponadto proces Lévy'ego subordynowany odwrotnym subordynatorem nie jest już dalej procesem Lévy'ego.

W kolejnym etapie będziemy analizować stacjonarne wersje procesu OU. Dla przykładu stacjonarnym odpowiednikiem procesu OU będącego rozwiązaniem stochastycznego równania różniczkowego względem ruchu Browna

$$dU(t) = -\lambda U(t)dt + dB(t), \quad U_0 = 0, \quad \lambda > 0, \quad (3.3.23)$$

będzie proces

$$U(t) = e^{-\lambda t} \int_{-\infty}^t e^{\lambda s} dB(s). \quad (3.3.24)$$

Tutaj ( $B(t), t < 0$ ) określamy biorąc niezależną kopię procesu ( $-B(t), t > 0$ ). Kolejne rezultaty będą dotyczyć tak zdefiniowanego procesu jak w równaniu (3.3.24), kolejno względem ruchu Browna [H9] oraz symetrycznego procesu  $\alpha$ -stabilnego [H10-H11].

Będziemy w dowodach wykorzystywać następujący wzór na całkowanie przez części dla funkcji dwóch zmiennych (Lemat 2.2 w [47])

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b G(u, v) H(du, dv) &= \int_0^a \int_0^b H([u, a] \times [v, b]) G(du, dv) \\ &+ \int_0^a H([u, a] \times (0, b]) G(du, 0) \\ &+ \int_0^b H((0, a] \times [v, b]) G(0, dv) \\ &+ H(0, 0) G((0, a] \times (0, b]). \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

W naszym przypadku  $G(u, v)$  będzie pewną funkcją kowariancji/kodyferencji natomiast  $H(u, v) = \mathbb{P}(S(t) \leq u, S(s) \leq v)$  będzie dwuwymiarową dystrybuantą odwrotnego subordynatora  $S(t), t \geq 0$ . Powyższy wzór jest przez nas wykorzystywany w wyznaczeniu kolejnych rezultatów, w których badamy podobnie jak poprzednio, strukturę zależności procesów OU wyrażoną bądź w postaci kowariancji bądź kodyferencji, jeśli rozpatrujemy procesy o nieskończonych momentach.

Zacznijmy od subordynowanego procesu OU względem procesu Wienera zdefiniowanego następująco

$$V(t) = U(S_\Psi(t)), \quad t \geq 0, \quad (3.3.26)$$

gdzie  $(S_\Psi(t))_{t \geq 0}$  jest odwrotnym subordynatorem (zob. (2.0.1)).

Zauważmy na samym początku, że możemy wyznaczyć kowariancję procesu zewnętrznego jako

$$\text{cov}[U(t), U(s)] = \frac{1}{2\lambda} (e^{-\lambda(t-s)} - e^{-\lambda(t+s)}) \mathbb{I}_{t \geq s} + \frac{1}{2\lambda} (e^{-\lambda(s-t)} - e^{-\lambda(t+s)}) \mathbb{I}_{s > t}. \quad (3.3.27)$$

Widzimy zatem, że wyznaczenie kowariancji procesu subordynowanego będzie związane z warunkowaniem (całkowaniem) funkcji kowariancji względem dwuwymiarowego rozkładu prawdopodobieństwa procesu  $(S_\Psi(t), S_\Psi(s))$  dla  $t \geq 0$  i  $s \geq 0$ . Sformułujmy zatem następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 3.36** (Theorem 2 w [H9]). *Niech  $U(t), t \geq 0$  będzie procesem OU którego funkcja autokowariancji wynosi (3.3.27). Funkcja autokowariancji procesu OU z czasem zamienionym na odwrotny subordynator, czyli procesu  $V(t) = U(S_\Psi(t))$ , gdzie  $S_\Psi(t), t \geq 0$  jest niezależnym odwrotnym subordynatorem względem pewnego subordynatora  $T_\Psi(v), v \geq 0$  z TL (2.0.1) dana jest wzorem*

$$\text{cov}[V(t), V(s)] = \frac{1}{2} \int_{y=0}^s m(y) \eta_\lambda(t-y) dy - \frac{1}{4\lambda} \int_{y=0}^s \frac{d}{dy} \eta_{2\lambda}(y) \eta_\lambda(t-y) dy, \quad (3.3.28)$$

tutaj  $\eta_u(t)$  jest TL odwrotnego subordynatora  $S_\Psi(t), t \geq 0$ , a  $m(y) = \int_{v=0}^\infty g(v, y) dv$ , gdzie  $g(v, y)$  jest gęstością prawdopodobieństwa procesu  $T_\Psi(v), v \geq 0$ .

Idea dowodu opiera się znacząco na formule całkowania przez części (3.3.25), a sam dowód jest techniczny i dość długi. W wyznaczeniu głównego wyniku kluczowe jest również wyznaczenie TL odwrotnego subordynatora zarówno względem czasu jak i przestrzeni.

Podejście zainicjowane w Twierdzeniu (3.36) kontynuujemy w pracach [H10-H11], kolejno rozpatrując subordynację odwrotnym  $\alpha$ -stabilnym subordynatorem i odwrotnym subordynatorem względem pewnego nieskończonego podzielonego procesu.

Dalej analizujemy proces

$$X(t) = \int_{-\infty}^t e^{\lambda(s-t)} dL^*(s), \quad (3.3.29)$$

$L^*(t)$  zdefiniowany jest podobnie jak w przypadku ruchu Browna jako

$$L^*(t) = \begin{cases} L(t), & \text{gdy } t \geq 0, \\ L(-t), & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases} \quad (3.3.30)$$

Natomiast  $L(t)$ ,  $t \geq 0$  jest symetrycznym  $\alpha$ -stabilnym procesem Lévy'ego (patrz Definicja 2.7) Zauważmy teraz, że dla procesu  $X(t)$ ,  $t \geq 0$  możemy wyznaczyć kodyferencję jako

$$CD(X(t), X(s)) = -\frac{2}{\alpha\lambda} + \frac{1}{\alpha\lambda} ((1 - e^{-\lambda(t-s)})^\alpha + (1 - e^{-\lambda\alpha(t-s)})). \quad (3.3.31)$$

Wykorzystując powyższą postać kodyferencji i wzór na całkowanie przez części sformułujmy kolejne twierdzenie.

**Twierdzenie 3.37** (Theorem 1 w [H10]). *Niech  $X(t)$ ,  $t \geq 0$  będzie procesem OU względem  $\alpha$ -stabilnego procesu Lévy'ego z  $1 < \alpha \leq 2$  i zdefiniowanego w (3.3.29) oraz takiego, że jego funkcja kodyferencji zdefiniowana jest wzorem (3.3.31). Wtedy funkcja kodyferencji procesu  $Y(t) = X(S(t))$ , gdzie  $S(t)$ ,  $t \geq 0$  jest niezależnym od  $X(t)$ ,  $t \geq 0$  odwrotnym  $\alpha$ -stabilnym subordynatorem, względem  $\alpha$ -stabilnego subordynatora z TL (2.0.4), wynosi*

$$\begin{aligned} CD(Y(t), Y(s)) &= -\frac{2}{\alpha\lambda} + \frac{1}{\alpha\lambda} (-E_\beta(-\alpha\lambda t^\beta) - E_\beta(-\alpha\lambda s^\beta)) \\ &+ \frac{1}{\alpha\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} (-1)^j E_\beta(-j\lambda t^\beta) \\ &- \mathbb{E}(S(s)) - E_\beta(-\lambda\alpha s^\beta) + \lambda\alpha t^{2\beta} E_{\beta, 2\beta+1}(-\lambda\alpha t^\beta) \\ &+ \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{j} (-1)^j t^{2\beta} E_{\beta, 2\beta+1}(-(j\lambda + \lambda)t^\beta) \\ &- (\alpha-1)\lambda \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha-2}{j} (-1)^j t^{2\beta} E_{\beta, 2\beta+1}(-(j\lambda + 2\lambda)t^\beta) \\ &- \int_{w=0}^{t-s} h(t-w) K(\lambda, w) dw. \end{aligned}$$

we wzorze powyżej funkcja  $K(\lambda, x)$  dana jest jako

$$\begin{aligned} K(\lambda, x) &= \lambda\alpha x^\beta E_{\beta, \beta+1}(-\lambda\alpha x) \\ &+ \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{j} (-1)^j x^\beta E_{\beta, \beta+1}(-(j\lambda + \lambda)x^\beta) \\ &- (\alpha-1)\lambda \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha-2}{j} (-1)^j x^\beta E_{\beta, \beta+1}(-(j\lambda + 2\lambda)x^\beta). \end{aligned}$$

Dowód twierdzenia jest techniczny i polega na wykorzystaniu wzoru na całkowanie przez części (3.3.25). Kroki dowodu przebiegają podobnie jak dowód Twierdzenia 3.36, kluczowe są jednak jawne postacie pewnych funkcji.

Kolejny rezultat opisuje kodyferencję procesu OU względem symetrycznego procesu  $\alpha$ -stabilnego z ogólniejszą wersją odwrotnego subordynatora. Po raz trzeci dowód tego twierdzenia opiera się na całkowaniu przez części (3.3.25).

**Twierdzenie 3.38** (Theorem 1 w [H11]). *Niech  $X(t), t \geq 0$  będzie  $\alpha$ -stabilnym procesem OU z  $1 < \alpha \leq 2$ , zdefiniowanym w (3.3.29). Funkcja kodyferencji CD dla procesu z zamienionym czasem  $Y(t) = X(S_\Psi(t))$ , gdzie  $S_\Psi(t), t \geq 0$  jest niezależnym od  $X(t), t \geq 0$  odwrotnym (względem odpowiedniego nieskończenie podzielonego subordynatora) subordynatorem dana jest następującym wzorem*

$$\begin{aligned} CD(Y(t), Y(s)) &= -\frac{1}{\alpha\lambda} - \frac{1}{\alpha\lambda} \Phi_{(\alpha\lambda)}(t) \\ &+ \frac{1}{\alpha\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} (-1)^j \Phi_{(j\lambda)}(t) - \mathbb{E}(S_\Psi(s)) \\ &+ \int_{y=0}^s h(y) K(\lambda, t-y) dy - \int_{y=0}^s h(y) K(\lambda, 0) dy. \end{aligned} \quad (3.3.32)$$

Powyżej funkcja  $K(\lambda, x)$  reprezentowana jest jako

$$\begin{aligned} K(\lambda, x) &= \lambda\alpha (-\Phi_{\lambda\alpha}(x)) \\ &+ \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{j} (-1)^j \frac{1}{j\lambda + \lambda} (-\Phi_{j\lambda+\lambda}(x)) \\ &- (\alpha-1)\lambda \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha-2}{j} (-1)^j \frac{1}{j\lambda + 2\lambda} (-\Phi_{j\lambda+2\lambda}(x)), \end{aligned}$$

a funkcja  $\Phi_\theta(x)$  jest TL odwrotnego subordynatora

$$\Phi_\theta(t) = \int_0^\infty e^{-\theta u} f(t, u) du$$

dla pewnego  $\theta > 0$  oraz  $f(t, u)$  oznacza tutaj gęstość prawdopodobieństwa procesu  $S_\Psi(t), t \geq 0$ .

Warto zauważyć, że w przypadku odwrotnego  $\alpha$ -stabilnego subordynatora funkcja  $\Phi_\theta$  ma reprezentację

$$\Phi_\theta(t) = E_\beta(-\theta t^\beta) \quad (3.3.33)$$

a

$$h(y) = \frac{y^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}. \quad (3.3.34)$$

Zatem w celu uzyskania formuł dla odwrotnego  $\alpha$ -stabilnego subordynatora z pracy [H10] trzeba również wykorzystać własność

$$-\frac{1}{\theta} \frac{d}{dx} (E_\beta(-\theta t^\beta)) = t^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(-\theta t^\beta),$$

której dowód przeprowadzamy poprzez porównanie TL lewej i prawej strony.

## 4 Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

Poza pracami stanowiącymi cykl publikacji opublikowałem po doktoracie 22 artykuły, co łącznie razem z artykułami przed doktoratem stanowi 44 artykuły. Moje prace zostały opublikowane we

współautorstwie z wieloma autorami z różnych ośrodków badawczych w kraju i za granicą oraz reprezentującymi różne dziedziny.

W kolejnych sekcjach opiszemy nieco dokładniej tematykę pozostałych artykułów opublikowanych po uzyskaniu stopnia naukowego doktora. Dodatkowo mój dorobek naukowy dopełniają jeszcze poniższe publikacje, opublikowane przed uzyskaniem stopnia doktora, które nie będą tutaj omawiane, a jedynie wymienione.

- [D1] J. Gajda, M. Magdziarz, *Fractional Fokker-Planck equation with tempered  $\alpha$ -stable waiting times: Langevin picture and computer simulation*, Physical Review E 82 (2010) 011117.
- [D2] J. Gajda, M. Magdziarz, *Kramers' escape problem for fractional Klein-Kramers equation with tempered  $\alpha$ -stable waiting times*, Physical Review E 84 (2011) 021137.
- [D3] K. Burnecki, J. Gajda, G. Sikora, *Stability and lack of memory of the returns of the Hang Seng index*, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 390 (2011) 3136-3146.
- [D4] M. Magdziarz, J. Gajda, *Anomalous dynamics of Black-Scholes model time-changed by inverse subordinators*, Acta Physica Polonica B 43 (2012) 1093.
- [D5] J. Gajda, A. Wyłomańska, *Geometric Brownian motion with tempered stable waiting times*, Journal of Statistical Physics 148 (2012) 296–305.
- [D6] J. Gajda, *Modeling of short term interest rate based on tempered fractional Langevin equation*, Acta Physica Polonica B 43 (2012) 961.
- [D7] J. Gajda, *Fractional Fokker-Planck equation with space dependent drift and diffusion: the case of tempered  $\alpha$ -stable waiting-times*, Acta Physica Polonica B 44 (2013) 1149.
- [D8] J. Gajda, G. Sikora, and A. Wyłomańska, *Regime variance testing — a quantile approach*, Acta Physica Polonica B 44 (2013) 1015.
- [D9] M. Magdziarz, J. Gajda, T. Żórawik, *Comment on Fractional Fokker-Planck Equation with Space and Time Dependent Drift and Diffusion*, Journal of Statistical Physics 154 (2014) 1241–1250.
- [D10] J. Gajda, A. Wyłomańska, *Tempered stable Lévy motion driven by stable subordinator*, Physica A - Statistical Mechanics and its Applications 392 (2013) 3168-3176.
- [D11] J. Gajda, M. Magdziarz, *Large deviations for subordinated Brownian motion and applications*, Statistics & Probability Letters 88 (2014) 149–156.

Artykuły po uzyskaniu stopnia doktora starano się grupować w stosunkowo jednotematyczne bloki dla bardziej przystępnej analizy. Wykaz prac po doktoracie:

- [P1] G. Sikora, M. Höll, J. Gajda, H. Kantz, A. Chechkin, A. Wyłomańska, *Probabilistic properties of detrended fluctuation analysis for Gaussian processes*, Physical Review E 101 (3) (2020) 032114.
- [P2] J. Gajda, A. Wyłomańska, H. Kantz, A.V. Chechkin, G. Sikora, *Large deviations of time-averaged statistics for Gaussian processes*, Statistics & Probability Letters 143 (2018) 47–55.
- [P3] G. Sikora, A. Wyłomańska, J. Gajda, L. Solé, E. J. Akin, M. M. Tamkun, D. Krapf, *Elucidating distinct ion channel populations on the surface of hippocampal neurons via single-particle tracking recurrence analysis*, Physical Review E 96 (6) (2017) 062404.
- [P4] A. Grzesiek, J. Gajda, A. Wyłomańska, S. Sundar, *Discriminating between scaled and fractional Brownian motion via  $p$ -variation statistics*, International Journal of Advances in Engineering Sciences and Applied Mathematics 10 (2018) 9–14.

- [P5] R. Połoczański, A. Wyłomańska, M. Maciejewska, A. Szczurek, J. Gajda, *Modified cumulative distribution function in application to waiting time analysis in the continuous time random walk scenario*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 50 (3) (2016) 034002.
- [P6] A. Wyłomańska, A. Chechkin, J. Gajda, I. M. Sokolov, *Codifference as a practical tool to measure interdependence*, Physica A - Statistical Mechanics and its Applications 421 (2015) 412–429.
- [P7] J. Gajda, W. Mydlarczyk, *Explicit form of the first-passage-time density for accelerating sub-diffusion*, Physica A - Statistical Mechanics and its Applications 447 (2016) 149–160.
- [P8] J. Gajda, G. Bartnicki, K. Burnecki, *Modeling of water usage by means of ARFIMA–GARCH processes*, Physica A - Statistical Mechanics and its Applications 512 (2018) 644–657.
- [P9] P. Kruczek, A. Wyłomańska, M. Teuerle, J. Gajda, *The modified Yule-Walker method for  $\alpha$ -stable time series models*, Physica A - Statistical Mechanics and its Applications 469 (2017) 588–603.
- [P10] G. Wieczorek, M. Chlebus, J. Gajda, K. Chyrowicz, K. Kontna, M. Korycki, A. Jegorowa, M. Kruk, *Multiclass image classification using GANs and CNN based on holes drilled in laminated chipboard*, Sensors 21 (2021) 8077.
- [P11] A. Battauz, M. D. Donno, J. Gajda, A. Sbuelz, *Optimal exercise of American put options near maturity: A new economic perspective*, Review of Derivatives Research 25 (2022) 23–46.
- [P12] R. Walasek, J. Gajda, *Fractional differentiation and its use in machine learning*, International Journal of Advances in Engineering Sciences and Applied Mathematics 13 (2-3) (2021) 270–277.
- [P13] P. Polaska, G. Jerzak-Wodzyńska, W. Śmigielski, J. Gajda, P. Rozentryt, J. Korewicki, M. Sobieszczańska-Malek, T. Zieliński, T. M. Rywik, *Long term outcome of heart failure patients disqualified from heart transplantation*, Acta Cardiologica 76 (5) (2021) 525–533.
- [P14] P. Polaska, G. Jerzak-Wodzyńska, P. Leszek, W. Śmigielski, J. Gajda, P. Rozentryt, J. Korewicki, T. Zieliński, and T. Rywik, *Can we predict what determines prognosis in patients disqualified from heart transplantation?*, European Heart Journal 39 (2018) no. suppl\_1.
- [P15] P. Polaska, G. Jerzak-Wodzyńska, P. Leszek, W. Śmigielski, J. Gajda, P. Rozentryt, J. Korewicki, T. Zieliński, and T. Rywik, *Prognosis and determinants of survival in patients with severe heart failure disqualified from heart transplantation due to contraindications*, European Journal of Heart Failure 20 (2018) 428.
- [P16] J. Gajda, W. Śmigielski, J. Śmigielski, E. Pakos, W. Drygas, *Longevity and cardiovascular mortality of polish elite football players*, Kardiologia Polska (Polish Heart Journal) 76 (12) (2018) 1705 – 1711.
- [P17] P. Tyczyński, Z. Chmielak, W. Rużyło, M. Demkow, M. Dąbrowski, M. Konka, J. Gajda, P. Stokłosa, A. Witkowski, *Percutaneous mitral balloon valvuloplasty: beyond classic indications*, Kardiologia Polska (Polish Heart Journal) 76 (5) (2018) 845 – 851.
- [P18] L. Beghin, J. Gajda, A. Maheshwari, *Integro-differential equations linked to compound birth processes with infinitely divisible addends*, Mathematical Methods in the Applied Sciences (2020) 1–17.
- [P19] L. Beghin, J. Gajda, *Tempered relaxation equation and related generalized stable processes*, Fractional Calculus and Applied Analysis 23 (5) (2020) 1248–1273.

- [P20] J. Gajda, A. Wyłomańska, *Fokker–Planck type equations associated with fractional Brownian motion controlled by infinitely divisible processes*, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 405 (2014) 104–113.
- [P21] A. Kumar, A. Wyłomańska, J. Gajda, *Stable Lévy motion with inverse Gaussian subordinator*, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 482 (2017) 486–500.
- [P22] J. Gajda, A. Wyłomańska, *Asymptotic behavior of dependence measures for Ornstein-Uhlenbeck model based on long memory processes*, International Journal of Advances in Engineering Sciences and Applied Mathematics volume 13 (2-3) (2021) 148–162.

Omówimy teraz wyniki uzyskane w pracach [P1-P22]. Dla przejrzystości cały opis zostanie podzielony na kilka części związanych z poszczególnymi zagadnieniami badawczymi, którymi się zajmuję.

## 4.1 Metody matematyczne w fizyce, prace [P1-P7]

Prace [P1-P7] dotyczą metod matematycznych oraz ich zastosowań w fizyce.

W pracy [P1] analizujemy statystykę DFA, jedną z najczęściej stosowanych metod do wykrywania tzw. korelacji dalekiego zasięgu w szeregach czasowych. Procedura wahań detrendowanych (ang. *detrended fluctuation*) składa się z kilku kroków, dokładną analizę można znaleźć w pracy [P1]. Przedstawimy część tej procedury. Rozważmy trajektorię  $\{X(1), X(2), \dots, X(N)\}$  zcentrowanego procesu gaussowskiego, z macierzą kowariancji  $\Sigma = \{E[X(i)X(j)] : i, j = 1, 2, \dots, N\}$ . Trajektorię procesu w punktach  $1, 2, \dots, N$ , dzielimy na  $K$  segmentów o długości  $s$ ,  $K = \lfloor N/s \rfloor$ . Dla każdego segmentu  $v$ ,  $v = 1, 2, \dots, K$  wyznaczamy wariancję

$$f^2(v, s) = \frac{1}{s} \sum_{t=1+d_v}^{s+d_v} [X(t) - p_v(t)]^2 = \frac{1}{s} \sum_{t=1}^s [X(t+d_v) - p_v(t+d_v)]^2,$$

gdzie  $d_v = (v-1)s$  a  $p_v(t) = \hat{a} - \hat{b}t$  jest lokalnym dopasowaniem liniowym (minimalizując różnicę kwadratów) na zbiorze punktów  $\{(t+d_v, X(t+d_v)) : t = 1, \dots, s\}$ . Współczynniki dopasowania liniowego mogą być wyznaczone bezpośrednio z układu równań

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_v \\ \hat{b}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{0,v} & S_{1,v} \\ S_{1,v} & S_{2,v} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1+(v-1)s}^{vs} X(i) \\ \sum_{i=1+(v-1)s}^{vs} iX(i) \end{pmatrix}, \quad (4.1.1)$$

gdzie  $S_{j,v} = \sum_{i=1+(v-1)s}^{vs} i^j$ ,  $j = 0, 1, 2$ . Wreszcie, kwadrat funkcji fluktuacji DFA jest średnią wszystkich sum kwadratów błędów:

$$F^2(s) = \frac{1}{\lfloor N/s \rfloor} \sum_{v=1}^{\lfloor N/s \rfloor} f^2(v, s). \quad (4.1.2)$$

W pracy wyznaczamy wiele własności funkcji  $f^2(v, s)$ , a przez to również funkcji  $F^2(s)$  wykorzystując fakt, że zmienna losowa  $s^2 f^2(v, s)$  może zostać zapisana jako odpowiednia forma kwadratowa [48]. Warto wspomnieć, że dla procesów gaussowskich okazuje się, wykorzystując teorię form kwadratowych, że

$$sf^2(v, s) = \mathbb{Y}_v \mathbb{Y}_v^T \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^s \lambda_j(v) U_j, \quad (4.1.3)$$

gdzie  $U_j$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie  $\chi^2$  z jednym stopniem swobody, a wagi  $\lambda_j(v)$  są wartościami własnymi macierzy kowariancji  $\Sigma_{\mathbb{Y}_v} = \{E[Y_v(m)Y_v(n)] : m, n = 1, \dots, s\}$ , gdzie  $Y_v(t) = X(t+d_v) - p_v(t+d_v)$ ,  $v = 1, \dots, \lfloor N/s \rfloor$ ,  $t = 1, \dots, s$ . Zatem dla zmiennej losowej  $sf^2(v, s)$  możemy zapisać następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 4.1** (Proposition 2.1 w [P1]). *Dla ciągu zmiennych losowych o rozkładzie gaussowskim o średniej 0 (zcentrowanych)  $\{X(1), X(2), \dots, X(N)\}$  oraz  $v = 1, 2, \dots, [N/s]$ , zmienna losowa  $f^2(v, s)$*

a) *ma wartość oczekiwaną:*

$$E[f^2(v, s)] = \frac{1}{s} \text{tr}(\Sigma_{Y_v}) = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s E[Y_v^2(j)], \quad (4.1.4)$$

b) *oraz variancję:*

$$\text{Var}[f^2(v, s)] = \frac{2}{s^2} \text{tr}(\Sigma_{Y_v}^2) = \frac{2}{s^2} \sum_{i,j=1}^s (E[Y_v(i)Y_v(j)])^2,$$

Dowód tego twierdzenia wynika bezpośrednio z reprezentacji (4.1.3). W ten sposób wyznaczamy kolejno wartość oczekiwaną i wariancję. Relacja pozwala nam również na wyznaczenie funkcji charakterystycznej procesu  $f^2(v, s)$ , jego funkcję generującą momenty, a nawet gęstość prawdopodobieństwa (zob. Proposition 2.2 w [P1]). Kluczowa jest tutaj również obserwacja, że zmienna losowa  $\lambda_j(v)U_j \stackrel{d}{=} G(1/2, 2\lambda_j(v))$ . Kolejne wyniki pracy oprócz wyznaczenia własności funkcji  $F^2(s)$  skupiają się również na konkretnych procesach, dla których wyznaczamy konkretne charakterystyki.

Analizę odpowiednich form kwadratowych dla procesów gaussowskich kontynuujemy w pracy [P2]. Rozważamy tutaj statystykę średniego kwadratowego przesunięcia (ang. *mean square displacement* (MSD))

$$M_N(\tau) = \frac{1}{N-\tau} \sum_{j=1}^{N-\tau} (X(j+\tau) - X(j))^2. \quad (4.1.5)$$

Podobnie jak poprzednio MSD można przedstawić przy pomocy odpowiedniej formy kwadratowej. W pracy jesteśmy zainteresowani uzyskaniem jak najlepszego oszacowania

$$P(|M_N(\tau) - E(M_N(\tau))| > \epsilon) \quad (4.1.6)$$

W tym celu kluczową rolę w pracy odgrywa zauważenie, że zmienna losowa  $(N-\tau)M_N(\tau) - E((N-\tau)M_N(\tau))$  ma rozkład sub-gamma, a więc możemy skorzystać z precyzyjnych oszacowań jej prawego ogona dystrybuanty (zob. kluczowy wynik w Proposition 3.1 wyznaczony przez habilitanta) [49].

Praca [P3] dotyczy m.in. identyfikacji subpopulacji w obrębie kanałów jonowych na powierzchni neuronów. W szczególności badamy dynamikę kanału  $K^+Kv1.4$  i kanału  $Na^+Nav1.6$  na powierzchni neuronów hipokampa na poziomie pojedynczych cząsteczek wykorzystując narzędzia statystyczne oparte np. o powtarzalność trajektorii. W szczególności dokonujemy klasyfikacji trajektorii (ruch cząsteczki obserwujemy w dwóch wymiarach) na te, które możemy nazwać ruchem swobodnym, to znaczy trajektoria takiego procesu jest mniej zwarta, a zatem obszar eksploracji cząsteczki jest szerszy, oraz na tzw. ruch zamknięty, gdzie obserwujemy niewielkie zmiany położenia cząsteczki, która poruszając się po niewielkim obszarze odwiedza te same miejsca w krótkich odstępach czasu. Określiśmy również różne klasy trajektorii ze względu na czas, jaki dana trajektoria pozostaje w danym obszarze. W celu klasyfikacji trajektorii do danej klasy użyliśmy algorytmu K-means. Streszczając proces analizy dla danej trajektorii  $i$  z  $m$  czasami przebywania w danym obszarze  $\tau_{ik}$ , definiujemy stosunek czasu przebywania w danym obszarze do całego czasu obserwacji  $T_i$  jako

$$\phi_i = \frac{1}{T_i} \sum_{k=1}^m \tau_{ik}. \quad (4.1.7)$$

Następnie wyznaczamy statystykę silhouette

$$s_c(i) = \frac{b(\phi_i) - a(\phi_i)}{\max\{a(\phi_i), b(\phi_i)\}},$$

gdzie  $a(\phi_i)$  jest średnią odległością wszystkich punktów w danej klasie, a  $b(\phi_i)$  jest odległością do najbliższej sąsiadującej klasy. Dla każdej liczby klas  $c$ , rozważane są wszystkie możliwe podziały na  $c$  klas a optymalny podział to ten, który maksymalizuje statystykę silhouette, która przyjmuje wartość

$$sil_c = \sum_{i=1}^M \frac{s_c(i)}{M},$$

Dysponując odpowiednią liczbą klas dla trajektorii, wykorzystujemy algorytm K-means do ich klasyfikacji. Następnie porównujemy różne charakterystyki trajektorii zakwalifikowanych do danej klasy, np. ich rozkłady przy pomocy statystyki Kolmogorowa-Smirnova [50]. Ponadto dokonujemy walidacji zaproponowanych metod symulacyjnych, poprzez generowanie ułamkowego ruchu Browna z różnymi parametrami  $H \in (0, 1)$ .

W artykule [P4] rozważamy tzw. skalowany ruch Browna

$$B_S(t) = B(t^\alpha), \quad 0 < \alpha < 2. \quad (4.1.8)$$

Proces ten może wydawać się podobny do FBM np. w przypadku gdy porównamy ich wariancje. Wariancja procesu jest obiektem zainteresowania w opisie wielu procesów fizycznych np. gdy rozważymy statystykę MSD (4.1.5). Stąd w pracy konstruujemy postać testu statystycznego bazującego na  $p$ -tej wariacji procesu, który pozwala na odróżnienie skalowanego ruchu Browna od FBM.

W pracy [P5] rozważamy zagadnienie estymacji funkcji dystrybuanty rozkładu czasów oczekiwania na kolejne zdarzenie dla spaceru losowego z czasem ciągłym, w którym czasy oczekiwania na zmianę stanu procesu są zaokrąglone bądź w pewien sposób zdyskretyzowane. Idea pracy polega na analizie zmodyfikowanej funkcji dystrybuanty prawdopodobieństwa np. w punktach obserwacji będących liczbami naturalnymi, tj.  $\tilde{F}(n) = \int_n^{n+1} F(x)dx$ , gdzie  $\tilde{F}(\cdot)$  to zmodyfikowana funkcja dystrybuanty, a  $F(\cdot)$  to prawdziwa dystrybuanta. Udowadniamy, że zmodyfikowana dystrybuanta jest dobrze zdefiniowaną funkcją dystrybuanty. Następnie, dla różnych rozkładów prawdopodobieństwa dla zmiennych losowych opisujących czasy oczekiwania pomiędzy kolejnymi skokami, przeprowadzamy symulacje Monte Carlo procesu

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad (4.1.9)$$

gdzie  $N(t)$  jest pewnym procesem liczącym zdefiniowanym jako

$$N(t) = \max \left\{ k \geq 0 : \sum_{i=1}^k T_i \leq t \right\}. \quad (4.1.10)$$

Tutaj  $T_i$   $i = 1, 2, \dots$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie i o wartościach nieujemnych, które możemy określić jako czasy oczekiwania pomiędzy kolejnymi skokami procesu  $X_i$ . Pokazujemy, że zmodyfikowana dystrybuanta pozwala na precyzyjniejsze wyznaczenie rozkładu zmiennej losowej opisującej czas oczekiwania. Po przetestowaniu zaproponowanej procedury wykorzystujemy metodę zmodyfikowanej dystrybuanty analizując dane rzeczywiste czujnika dwutlenku węgla rejestrującego jego poziom w interwałach 15 sekundowych.

Moje zainteresowania badawcze miarami zależności zostało zapoczątkowane m.in w pracy [P6]. Analizujemy tam przedstawioną wcześniej miarę kodyferencji, podając jej jawną reprezentację dla wielu klas procesów, np. procesów gaussowskich, ruchu Browna, procesu OU czy szerokiej klasy procesów ułamkowych w szczególności FBM, czy FLSM. Dla przykładu, łatwo zauważyć, że kodyferencja FBM ma postać

$$cov(B_H(t), B_H(s)) = -CD(B_H(t), B_H(s)) = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}).$$

W pracy stosujemy również metodę estymacji kodyferencji dla danych rzeczywistych fluktuacji prądu nasycenia jonów (w mA) w turbulentnej plazmie laboratoryjnej czy danych finansowych reprezentujących ceny zamknięcia holdingowej spółki inwestycyjnej Cosco Pacific Ltd.

W pracy [P7] rozwiązujemy w sposób analityczny ułamekowe równanie różniczkowe

$$\sum_{i=1}^n p_i \theta^{\alpha_i} {}_C\mathcal{D}_t^{\alpha_i} p(x, t) = \left[ -\frac{\partial}{\partial x} F(x) + K \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] p(x, t), \quad (4.1.11)$$

opisujące gęstość prawdopodobieństwa  $p(x, t)$  procesu stochastycznego  $X(t)$  charakteryzującego się nieliniową wariancją. Tutaj  $p_i > 0$  oraz  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ ,  $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq 1$ .  $F(x)$  jest pewną funkcją przyjmującą wartości rzeczywiste reprezentującą w scenariuszu fizycznym siłę zewnętrzną. Operator  ${}_C\mathcal{D}_t^{1-\alpha}$  jest pochodną ułamekową typu Caputo zdefiniowanym jako

$${}_C\mathcal{D}_t^{1-\alpha} f(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{1}{(t-t')^\alpha} \frac{\partial}{\partial t'} f(x, t') dt', \quad (4.1.12)$$

dla odpowiedniej funkcji  $f(x, t)$ . Wyniki habilitanta są związane z głównym celem pracy, którym jest rozwiązanie równania (4.1.11) w sposób analityczny dla procesu którego ewolucja skoncentrowana jest na półprostej  $(0, \infty)$  i dla różnej postaci funkcji  $F$ . Dodatkowo zakładamy pewne warunki początkowe, jakie spełnia gęstość procesu  $X(t)$ , tzn.

$$p(x, 0) = \delta(x - l). \quad (4.1.13)$$

Co oznacza, że proces startuje z pewnego punktu  $x = l > 0$ , a  $\delta$  oznacza deltę Diraca. Dodatkowo

$$p(0, t) = 0, \quad p(+\infty, t) = 0. \quad (4.1.14)$$

Dla przykładu, gdy rozważymy  $F(x) = K$ ,  $n = 2$ , a także warunki początkowe i brzegowe zdefiniowane powyżej. Interesuje nas analityczne rozwiązanie równania

$$p_1 \theta^{\alpha_1} {}_C\mathcal{D}_t^{\alpha_1} p(x, t) + p_2 \theta^{\alpha_2} {}_C\mathcal{D}_t^{\alpha_2} p(x, t) = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \nu + K \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] p(x, t), \quad x \in (0, \infty), \quad t > 0, \quad \nu \in R \quad (4.1.15)$$

Stosujemy tutaj metodę rozdzielania zmiennych, a znalezione gęstość możemy później wykorzystać do analizy czasów pierwszego przejścia procesu  $X(t)$ ,  $t > 0$ . Główną trudnością w pracy jest skomplikowana forma równania (4.1.15), gdzie w rozwiązaniu pojawiają się funkcje specjalne Mittag-Leffler i H-Foxa.

## 4.2 Szeregi czasowe i zastosowania przemysłowe, prace [P8-P10]

Kolejny cykl prac możemy określić jako prace dotyczące własności, metod estymacji i zastosowań klasycznych szeregów czasowych w przemyśle. Dodatkowo stosujemy również metody uczenia maszynowego w zagadnieniach związanych z przemysłem.

W pracy [P8] zajmujemy się szeregiem ARFIMA-GARCH, zdefiniujemy kolejno jego poszczególne składowe.

Szeregiem czasowy ARFIMA  $(p, d, q)$  (zob. [51, 52]) możemy nazwać stacjonarne rozwiązanie równania

$$\Phi_p(\nabla) \Delta^d X(n) = \Theta_q(\nabla) \epsilon_n, \quad (4.2.1)$$

gdzie  $n = 0, \pm 1, \dots$

Dla  $d < 1/2$  operator ułamekowego różnicowania  $\Delta^d$  ma następujące rozwinięcie w szereg nieskończony

$$\Delta^d = (1 - B)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j(d) B^j, \quad (4.2.2)$$

gdzie współczynniki  $\pi_j(d)$  określone są poprzez rozwinięcie w szereg Taylora funkcji  $f(z) = (1 - z)^d$  i mogą być przedstawione poprzez funkcję gamma  $\Gamma$  jako:

$$\pi_j(d) = \frac{\Gamma(j - d)}{\Gamma(-d)\Gamma(j + 1)}, \quad j = 0, 1, \dots \quad (4.2.3)$$

Co więcej, gdy wszystkie pierwiastki wielomianu  $\Phi_p$  leżą na zewnątrz koła jednostkowego szereg ARFIMA( $p, d, q$ ) zdefiniowany przez (4.2.1) jest stacjonarny i ma następujące rozwinięcie w postaci nieskończonego szeregu średniej ruchomej

$$X(n) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(d)\epsilon_{n-j}, \quad (4.2.4)$$

gdzie  $c_j(d)$  są zdefiniowane poprzez równanie [53]

$$\frac{\Theta_q(z)(1 - z)^{-d}}{\Phi_p(z)} = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(d)z^j, \quad |z| < 1, \quad (4.2.5)$$

W równaniu (4.2.1) zmienne losowe  $\epsilon_n$  modelujemy szeregiem GARCH. Szereg GARCH( $k, l$ ) zdefiniowany jest jako [54]

$$\epsilon_t = \sqrt{h_t}\eta_t, \quad (4.2.6)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^l \beta_j h_{t-j}, \quad (4.2.7)$$

gdzie  $\eta_t$  jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. Zwykle za rozkład zmiennych losowych  $\eta_t$  rozważa się rozkład standardowy normalny, czy rozkład  $t$  studenta. Również w większości zastosowań wystarczy rozważać model (1, 1) [55], czyli  $k = 1$  i  $l = 1$ . W artykule podajemy dokładnie, jak złożony model ARFIMA-GARCH można estymować, a także walidować jego dopasowanie do danych. Model ten stosujemy do danych empirycznych opisujących poziom ciepłej wody używanej w budynkach mieszkalnych. Dobór odpowiedniego modelu w tym przypadku jest istotny, gdyż pozwala na predykcję przyszłego zużycia, a przez to zoptymalizowanie poziomów ciepłej wody i systemów grzewczych, jakie są używane do podgrzewania wody.

W artykule [P9] omawiamy problem estymacji parametrów dla okresowych autoregresyjnych (PAR) szeregów czasowych z szumem losowym o rozkładzie  $\alpha$ -stabilnym. Model ten możemy zapisać jako

$$X_t - \phi_1(t)X_{t-1} - \dots - \phi_p(t)X_{t-p} = \xi_t, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (4.2.8)$$

Współczynniki  $\{\phi_i(t), i = 1, \dots, p\}$  są okresowe z pewnym okresem  $T$ , a  $\xi_t$  są zmiennymi losowymi o rozkładzie  $\alpha$ -stabilnym. Rozważane modele uogólniają popularne i powszechnie używane autoregresyjne (AR) szeregi czasowe. Głównym problemem w estymacji  $\alpha$ -stabilnych szeregów czasowych PAR jest brak autokowariancji szumu losowego co nie pozwala na zastosowanie dobrze znanej metody Yule-Walkera (Y-W). Praca zatem skupia się na rozszerzeniu tej metody poprzez zastąpienie autokorelacji funkcją autokowariancji. Miara autokowariancji zdefiniowana jest dla symetrycznych  $\alpha$ -stabilnych zmiennych losowych z parametrem  $\alpha > 1$  [3]. W pracy przy pomocy metod symulacyjnych porównujemy zaproponowaną metodę do klasycznej metody Y-W, a następnie stosujemy zaproponowaną metodologię do danych z rynku elektryczności, w których można zaobserwować okresowość.

W pracy [P10] rozważamy zagadnienia jakości wiertła na podstawie zdjęć otworów, jakie dane wiertło wykonuje. Celem badań było stworzenie modelu zdolnego do identyfikacji różnych poziomów jakości otworów, gdzie obniżona jakość służyłaby jako ostrzeżenie o zbliżającym się zużyciu wiertła. W pracy oprócz zastosowania najnowocześniejszych metod klasyfikacji obrazów opartych o sieci neuronowe GAN, habilitant zaproponował również technikę powielania danych (generowania nowych danych w oparciu o już zebrane), co może pozwolić nam na dokładniejsze dopasowanie modelu uczenia maszynowego. Dodatkowo wydajność zaprojektowanego modelu została porównana z predykcjami wygenerowanymi przez wytrenowaną na tych samych danych usługę Microsoft Custom Vision, którą potraktowano jako punkt odniesienia.

### 4.3 Metody matematyczne w aplikacjach finansowych, prace [P11-P12]

Kolejny cykl prac możemy określić jako metody matematyczne w aplikacjach finansowych.

W pracy [P11] rozważamy problem ceny krytycznej amerykańskiej opcji sprzedaży, a więc takiej wartości aktywa bazowego (np. akcji), którego poziom powoduje natychmiastowe optymalne wykonanie opcji. W szczególności rozpatrujemy ten problem w krótkim odstępie czasu przed czasem zapadalności opcji i w przypadku, gdy dywidenda opcji jest mniejsza bądź wyższa niż stopa procentowa. Pokazujemy między innymi, że cena krytyczna opcji sprzedaży oraz opcji sprzedaży zabezpieczonej poprzez zakupienie aktywa bazowego są sobie równe.

Artykuł [P12] jest próbą połączenia zastosowania operatora ułamkowego różnicowania (4.2.2) w modelowaniu za pomocą nowoczesnych metod *machine learnig*. W pracy poruszamy ważny problem stacjonarności szeregu czasowego, którą możemy zwykle otrzymać poprzez klasyczne zróżnicowanie szeregu (tzn. rozpatrzenie zamiast wartości szeregu jego odpowiedniego przyrostu np. zmiany o jedną jednostkę czasu czyli  $X_t - X_{t-1}$ ). W pracy rozważamy problem zastosowania operatora ułamkowego różnicowania, którego użycie pozwala na uzyskanie szeregu stacjonarnego, ale równocześnie nie prowadzi do usunięcia z szeregu jego długookresowych zależności. Metodę ułamkowego różnicowania stosujemy na danych z rynków finansowych, które w dalszym etapie po uzyskaniu stacjonarności modelujemy za pomocą sieci neuronowych. W takim podejściu porównujemy wyniki zastosowania operatora ułamkowego z klasycznym różnicowaniem.

### 4.4 Modelowanie matematyczne w medycynie i naukach o zdrowiu, prace [P13-P17]

Cykl prac [P13-P17] możemy określić jako zastosowania metod statystycznych w medycynie bądź naukach o zdrowiu. Prace powstały w wyniku współpracy habilitanta z naukowcami Instytutu Kardiologii w Warszawie. W diskutowanych pracach jednym z zadań habilitanta było zaproponowanie i przeprowadzenie odpowiedniej metody statystycznej.

Prace [P13-P15] dotyczą analizy statystycznej pacjentów niezakwalifikowanych do przeszczepu serca, a w szczególności ich dalszego czasu trwania życia. W pracy oprócz statystyk charakteryzujących dobraną próbkę losową, stosujemy model proporcjonalnych hazardów Coxa [56]. Model ten jest bardzo często stosowanym w analizach medycznych narzędziem, w którym wyjaśniamy czas przeżycia pacjentów (mierzony od jakiegoś zdarzenia np. włączenia pacjenta do obserwacji, czy wystąpienia jakiegoś czynnika zdrowotnego) przy pomocy zmiennych niezależnych. W pracy badamy również różnice w przeżywalności pacjentów np. chorzy z nadciśnieniem płucnym w stosunku do tych nie wykazywali tej dolegliwości. Analiza polegała na estymacji krzywych przeżycia metodą Kaplana-Meiera [57]. Wkład habilitanta polegał na estymacji i walidacji modelu Coxa, a także na przygotowaniu i interpretacji testów statystycznych dotyczących analiz przeżycia.

W pracy [P16] przeanalizowano dane dotyczące 455 najlepszych polskich piłkarzy, którzy zmarli w latach 1990-2015. Przyczynę zgonu ustalono na podstawie oficjalnych danych GUS. Grupę kontrolną stanowili mężczyźni z ogólnej populacji męskiej w Polsce, którzy zmarli w badanym okresie w wieku 25 lat lub więcej. Otrzymane wyniki stanowią, że średni wiek zgonu okazał się wyższy dla piłkarzy niż dla grupy kontrolnej (70.2 vs. 67.4 lat). Choroby układu krążenia były częstszą przyczyną zgonów wśród piłkarzy niż w ogólnej populacji mężczyzn, zarówno w podgrupie osób zmarłych poniżej 65 roku życia, jak i w grupie osób, które w chwili śmierci miały co najmniej 65 lat (odpowiednio 46.9% vs. 32.3% i 61.3% vs. 53.3%). Zadaniem habilitanta było m.in. pozyskanie danych przy pomocy metod *web scrapingu* oraz interpretacja wyników.

Praca [P17] dotyczy analizy wyników pacjentów ze zwężeniem zastawki mitralnej (MS), u których wykonano przeszskórną balonową walwuloplastykę mitralną (PMBV). Przeanalizowaliśmy wyniki 113 objawowych pacjentów, którzy przeszli PMBV z powierzchnią MS większą niż 1.5 cm<sup>2</sup> (grupa 1) i porównaliśmy ich z grupą kontrolną pacjentów z powierzchnią MS mniejszą bądź równą 1.5 cm<sup>2</sup> (grupa 2). Dobranie grupy kontrolnej dokonaliśmy za pomocą procedury *propensity score* [58], która pozwala do grupy pacjentów dobrać grupę pacjentów nie mających danego schorzenia ale charakte-

ryzujących się innymi cechami podobnymi względem badanej grupy. Przy pomocy takiego podejścia jesteśmy w stanie lepiej ocenić wpływ zastosowania danej procedury na grupie badanej. Porównania charakterystyk medycznych np. echokardiograficznych pomiędzy grupami przeprowadzono przy użyciu klasycznych testów statystycznych, między innymi takich jak test t-Studenta, test U Manna-Whiteneya czy dla zmiennych dyskretnych testu chi-kwadrat.

## 4.5 Procesy stochastyczne ich własności i uogólnienia, prace [P18-P22]

Prace [P18-P22] dotyczą uogólnień bądź własności znanych procesów stochastycznych.

W pracy [P18] analizujemy skumulowany proces liczący, w którym liczba sumowań reprezentowana jest poprzez liniowy proces urodzin (proces Yule'a) w odróżnieniu od klasycznego procesu liczącego znanego w szczególności w teorii ryzyka, gdzie liczba sumowań określona jest poprzez proces Poissona. Niech  $B := \{B(t), t \geq 0\}$ , będzie procesem urodzin w którym intensywność rozmnażania jest proporcjonalna od liczby elementów tj.  $\lambda_k = k\lambda$ , for  $k = 1, 2, \dots$ , i.e.

$$Y(t) = \sum_{j=1}^{B(t)} X_j, \quad t \geq 0, \quad (4.5.1)$$

Zakładamy również, że zmienne losowe  $X_j$  są zmiennymi i.i.d. o dodatnich wartościach, niezależnymi od  $B$ . W pracy analizujemy postać ułamkowego równania różniczkowego, jakie spełnia proces (4.5.1), w przypadku, gdy zmienne  $X_j$  mają rozkład wykładniczy. Główna część pracy dotyczy pewnej wersji procesu (4.5.1), dokładniej analizujemy proces

$$Y_g(t) = \sum_{j=1}^{B(t)} X_j^{(g)}, \quad t \geq 0. \quad (4.5.2)$$

Tutaj  $X^{(g)} \stackrel{d}{=} \mathcal{A}_g(X)$ , gdzie zmienna losowa  $X$  ma rozkład wykładniczy, a  $\mathcal{A}_g := \{\mathcal{A}_g(t), t \geq 0\}$ , jest pewnym subordynatorem o niemalejących trajektoriach.

Podajemy ułamkowe równanie różniczkowe które spełnia gęstość prawdopodobieństwa takiego procesu, ale również rozważamy szczególne przypadki tych równań dla konkretnych rozkładów zmiennych  $X^{(g)}$ , w szczególności gdy subordynator, r jaki rozpatrujemy ma rozkład temperowany  $\alpha$ -stabilny czy rozkład gamma. Wykorzystujemy konwolucyjne pochodne ułamkowe związane z rozkładami subordynatorów opisywane przez habilitanta. Rozważamy również reprezentację subordynacyjną procesu (4.5.2).

W pracy [P19] rozważamy ułamkowe równanie relaksacji

$$\mathcal{D}_t^{\lambda, \rho} u(t) = -\lambda^\rho u(t), \quad (4.5.3)$$

z warunkiem początkowym  $u(0) = 1$ . Pokazujemy, że rozwiązanie powyższego równania wynosi

$$\varphi_{\lambda, \rho}(t) = \frac{\Gamma(\rho; \lambda t)}{\Gamma(\rho)}. \quad (4.5.4)$$

Tutaj  $\mathcal{D}_t^{\lambda, \rho}$  jest operatorem zdefiniowanym dla każdej funkcji absolutnie ciągłej  $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , takiej, że  $|u(t)| \leq ce^{kt}$ , i dla pewnych  $c, k > 0$  oraz  $t \geq 0$ , jako

$$\mathcal{D}_t^{\lambda, \rho} u(t) = \frac{\rho \lambda^\rho}{\Gamma(1 - \rho)} \int_0^t \frac{d}{dt} u(t - s) \Gamma(-\rho; \lambda s) ds, \quad \lambda > 0, \rho \in (0, 1], \quad (4.5.5)$$

Głównym wynikiem pracy jest również analiza nowej klasy procesów stochastycznych, które możemy zdefiniować poprzez  $n$ -krotną transformatę Laplace'a jako

$$\mathbb{E} e^{-\sum_{k=1}^n \eta_k \mathcal{X}_{\alpha, \rho}(t_k)} = \frac{\Gamma\left(\rho; \sum_{k=1}^n \Xi_{k, n}^\alpha(t_k - t_{k-1})\right)}{\Gamma(\rho)}, \quad \eta_1, \dots, \eta_n \geq 0, n \in \mathbb{N} \quad (4.5.6)$$

gdzie  $\Xi_{k,n}^\alpha := (\sum_{i=k}^n \eta_i)^\alpha$ ,  $0 < t_1 < \dots < t_n$ , dla  $\alpha \in (0, 1)$  i  $\rho \in (0, 1]$ . W przypadku jednowymiarowym (dla  $n = 1$ ), zauważamy, że transformata Laplace'a (4.5.6) jest równa  $\frac{\Gamma(\rho; \lambda t)}{\Gamma(\rho)}$ . Dla  $\lambda = \eta^\alpha$  i  $\rho = 1$  otrzymamy transformatę Laplace'a  $\alpha$ -stabilnego subordynatora. W pracy badamy własności nowej klasy procesów, którą określamy jako uogólnione procesy  $\alpha$ -stabilne.

W kolejnym artykule [P20] podajemy uogólnione ułamkowe równanie różniczkowe jakie spełnia gęstość prawdopodobieństwa procesu

$$Y_H(t) = X_H(S_\Psi(t)), \quad t \geq 0, \quad (4.5.7)$$

gdzie

$$dX_H(\tau) = \mu d\tau + \sigma dB_H(\tau), \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma \in \mathbb{R}_+.$$

Proces  $S_\Psi(t)$  jest odwrotnym subordynatorem względem pewnego nieskończonego podzielnego subordynatora. Oprócz tego udowadniamy istnienie i skończoność momentów  $Y_H(t)$ , a także podajemy ich postać w przypadku specjalnej postaci odwrotnego subordynatora.

Artykuł [P21] dotyczy własności procesu  $\alpha$ -stabilnego subordynowanego poprzez odwrotny gausowski subordynator. W szczególności podajemy jawne reprezentacje miary Lévy'ego, postać uogólnionego ułamkowego równania różniczkowego, które spełnia gęstość prawdopodobieństwa a także analizujemy zbieżność statystyki MSD dla przyrostów wprowadzanego procesu w metryce Skorohoda. W szczególności w przypadku zbieżności wykorzystujemy potęgowe zachowanie ogona dystrybuanaty analizowanego procesu, niezależność jego przyrostów i oraz używamy klasycznego Twierdzenia o zbieżności ograniczonej.

W pracy [P22] analizujemy tzw. własność długiej pamięci dla procesu OU względem ułamkowego procesu  $\alpha$  stabilnego, dokładniej analizujemy proces

$$dY(t) + aY(t)dt = bL_{\alpha,H}(t), \quad 0 < \alpha \leq 2, \quad 0 < H < 1, \quad (4.5.8)$$

gdzie  $\{L_{\alpha,H}(t), t \in \mathbb{R}\}$  jest ułamkowym procesem  $\alpha$ -stabilnym. W szeregu twierdzeń badamy asymptotyczne własności takich miar zależności jak kodyferencja, kowariacja czy miara Lévy correlation cascade dla procesu (4.5.8).

## 5 Opis wkładu habilitanta w osiągnięcie naukowe

Prace [H2] i [H7] są samodzielne.

Praca [H1]

- Zarówno sformułowania jak i dowody rezultatów podających jawne reprezentacje na funkcję gęstości prawdopodobieństwa (Proposition 3.1), gęstość miary Lévy'ego (Proposition 3.2), równania różniczkowego opisującego gęstość prawdopodobieństwa (Proposition 3.3), asymptotyczne zachowanie ogona dystrybuanaty (Proposition 3.4), stanowią indywidualny wkład habilitanta.
- Prace redakcyjne zostały wykonane wspólnie przez wszystkich autorów.

Praca [H3]

- Wyniki dotyczące poprawności definicji miary Lévy'ego (Proposition 2.1), reprezentacji wykładnika Laplace'a (Theorem 2.1), zachowania ogona dystrybuanaty (Proposition 2.2), ograniczonym wahaniu trajektorii (Proposition 2), reprezentacji poprzez subordynację (Theorem 3.1) stanowią indywidualny wkład habilitanta. Indywidualnym wkładem habilitanta są również symulacje numeryczne analizowanych procesów. Pozostałe stwierdzenia dotyczące szczególnych przypadków analizowanych procesów ( $\beta=1$ ) pochodzą od prof. L. Beghin.
- Większość pracy redakcyjnej została wykonana przez habilitanta.

Praca [H4]

- Sformułowanie definicji uogólnionego procesu Laplace'a jest wspólną pracą autorów. Indywidualny wkład habilitanta stanowi twierdzenie o postaci równania różniczkowego, jakie spełnia gęstość prawdopodobieństwa procesu  $n$ -FBM (Theorem 2.1), postaci gęstości prawdopodobieństwa uogólnionego procesu Laplace'a (Proposition 3.2) oraz podające formę równania różniczkowego (Theorem 3.1) które spełnia. Główne twierdzenie o postaci funkcji kowariancji (Proposition 3.3), twierdzenie o własności długo zasięgowej korelacji (Proposition 3.4). Część symulacji numerycznych została również przeprowadzona przez habilitanta. Twierdzenia (Proposition 2.1, 2.2, 2.3) pochodzą zasadniczo od prof. A. Kumara.
- Większość pracy redakcyjnej została wykonana przez habilitanta.

#### Praca [H5]

- Główne wyniki pracy, a więc twierdzenia opisujące funkcję charakterystyczną analizowanego procesu (Proposition 4.2, Proposition 4.5) oraz kodyferencji (Proposition 4.3, Proposition 4.6), pochodzą od habilitanta, podobnie jak asymptotyczne zachowanie kodyferencji (Proposition 4.4). Asymptotyka zachowania ogona dystrybuanty (Proposition 4.8) oraz oszacowanie prawdopodobieństwa supremum (Proposition 4.9) są także dziełem habilitanta. Część sekcji 4.5 dotycząca własności długiej zależności pochodzi od prof. A. Kumara (Proposition 4.7) część dotycząca analizy danych jest wspólną pracą habilitanta i prof. A. Wyłomańskiej.
- Prace redakcyjne zostały wykonane przez wszystkich współautorów pracy.

#### Praca [H6]

- Definicja analizowanego procesu jest wspólnym pomysłem współautorów. Propositions 3.1 i 3.2 są wspólnym dziełem habilitanta i prof. A. Kumara. Indywidualnym wkładem habilitanta są: twierdzenie o postaci równania różniczkowego (Theorem 3.1), które spełnia gęstość procesu, wyniki dotyczące kodyferencji (Remark 3.4). Twierdzenia w sekcji 4 pracy dotyczące subordynatora  $\alpha$ -stabilnego z czasem zamienionym na subordynator temperowany  $\alpha$ -stabilny, za wyjątkiem Theorem 4.1 będącego wkładem prof. A. Kumara, są wspólnym dziełem habilitanta i prof. A. Kumara i wkład obu autorów jest porównywalny.
- Prace redakcyjne zostały wykonane wspólnie przez współautorów.

#### Praca [H8]

- Definicja analizowanych procesów (subordynowanego gaussowskiego i  $\alpha$ -stabilnego procesu OU) oraz twierdzenia podające jawną postać ułamkowych momentów bezwzględnych (Proposition 2.1, Proposition 3.6), postaci kodyferencji (Proposition 2.2), postaci funkcji charakterystycznej (Proposition 3.3, Theorem 3.7), kowariancji (Proposition 3.4) oraz oszacowań ogona dystrybuanty (Proposition 3.5, przypadek gaussowski) i jego asymptotyki (Proposition 3.8, przypadek  $\alpha$ -stabilny) są indywidualnym wkładem habilitanta. Analizy numeryczne potwierdzające poprawność otrzymanych rezultatów zostały wykonane przez dr A. Grzesiek i prof. A. Wyłomańską.
- Prace redakcyjne zostały wykonane przez wszystkich współautorów pracy.

#### Praca [H9]

- Sformułowanie modelu oraz wyniki twierdzeń oraz lematów dotyczących wariancji analizowanego procesu (Proposition 1), postaci rozwiązania pewnego uogólnionego ułamkowego równania różniczkowego (Lemma 1), postaci uogólnionego równania Fokkera-Plancka, które spełnia gęstość prawdopodobieństwa analizowanego procesu (Theorem 1), struktury kowariancji (Theorem 2) oraz wyników pomocniczych (Proposition 2) są indywidualnym wkładem habilitanta. Symulacje numeryczne pokazane w pracy również pochodzą od habilitanta. Konkretnie przypadki przedstawione w sekcji 5 są wspólnym dziełem prof. A. Wyłomańskiej i habilitanta.

- Większość pracy redakcyjnej została wykonana przez habilitanta.

Praca [H10]

- Indywidualnym wkładem habilitanta jest sformułowanie i dowód głównego twierdzenia podającego jawną postać funkcji kodyferencji subordynowanego (przy pomocy odwrotnego  $\alpha$ -stabilnego subordynatora) procesu OU, dodatkowo symulacje numeryczne potwierdzające otrzymane rezultaty również pochodzą od habilitanta. Część dotycząca analizy danych rzeczywistych jest wspólną pracą habilitanta i prof. A. Wyłomańskiej i wkład obu autorów jest porównywalny.
- Redakcja pracy została wykonana wspólnie przez współautorów.

Praca [H11]

- Praca [H11] to kontynuacja pracy [H10], główne twierdzenie na postać kodyferencji subordynowanego procesu OU, gdzie tym razem subordynator to proces odwrotny do nieskończonego podzielonego subordynatora (Theorem 1) pochodzi od habilitanta. Dowód tego twierdzenia jest podobny do dowodu twierdzenia z pracy [H10] Ważnym elementem pracy jest analiza danych rzeczywistych z maszyn górniczych, otrzymanych od prof. R. Zimroza z Wydziału Górniczego Politechniki Wrocławskiej, która jest wspólnym rezultatem prac habilitanta i prof. A. Wyłomańskiej.
- Redakcja pracy została wykonana wspólnie przez wszystkich współautorów.

## 6 Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej

Do roku 2017 habilitant pracował na stanowisku adiunkta na Wydziale Matematyki Politechniki Wrocławskiej, począwszy od 01.10.2017 habilitant jest adiunktem Uniwersytetu Warszawskiego, Wydziału Nauk Ekonomicznych. W okresie 16.01.2017-30.09.2018 habilitant pracował w Instytucie kardiologii im. Prymasa Tysiąclecia Stefana Kardynała Wyszyńskiego, na stanowisku statystyka, gdzie współpracował z wieloma znakomitymi naukowcami z branży medycznej. Owocem tej współpracy są liczne publikacje [P13-P17]. Współpraca ta, z mniejszą intensywnością, wciąż jest kontynuowana.

Dodatkowo habilitant odbył następujące staże w zagranicznych i krajowych ośrodkach akademickich:

- 11.04-13.04.2019 - Sapienza University of Rome, Włochy. Współpraca z prof. L. Beghin,
- 01.11.2019-31.11.2019 - University of Nevada Reno, USA. Współpraca z prof. T. Kozubowskim i prof. A. Panorską.

Wyjazd (a) miał charakter zaproszonego (zaproszenie prof. L. Beghin) występu w ramach konferencji Nonlocal and Fractional Operators. Podczas tego wyjazdu omawiano również zagadnienia naukowe, czego efektem są wspólne prace z prof. L. Beghin. Wyjazd (b) miał charakter wyjazdu w ramach współpracy naukowej oraz Visiting Scientist, efektem tego wyjazdu są wspólne prace będące w trakcie realizacji. Współprace w ramach wyjazdów (a)–(b) mają charakter współpracy stałej.

## 7 Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę

### 7.1 Międzynarodowe i krajowe nagrody za działalność naukową albo artystyczną

- Stypendium dla młodych doktorów w ramach projektu „Młoda Kadra 2015 plus”, Politechnika Wroclawska,
- Nagroda Rektora Politechniki Wroclawskiej za osiągnięcia naukowe, 2014, Politechnika Wroclawska,
- Stypendium Grant Plus, 2012,
- Stypendium im. Hugona Steinhausa, przyznawane przez Wroclawskie Centrum Akademickie, 2012,
- Stypendium statutowe, 2012,
- Nagroda Rektora Politechniki Wroclawskiej za osiągnięcia naukowe, 2012,
- Nagroda Dziekana Wydziału Podstawowych Problemów Techniki, Politechniki Wroclawskiej za osiągnięcia naukowe, 2011.

### 7.2 Doświadczenie dydaktyczne

#### Politechnika Wroclawska, Wydział Matematyki

- Prowadzone wykłady: Zarządzanie ryzykiem w przemyśle, Metrologia z akwizycją danych.
- Prowadzone ćwiczenia i laboratoria (wybrane kursy): Modelowanie rynków finansowych, Symulacje komputerowe procesów stochastycznych, Algebra liniowa i geometria analityczna, Inżynieria finansowa, Stochastyczne modele kontraktów terminowych, Komputerowa analiza szeregów czasowych.
- Przygotowanie skryptu kursu oraz wdrożenie do programu zajęć dla przedmiotu Metrologia z akwizycją danych.

#### Politechnika Wroclawska, pozostałe wydziały

- Prowadzone wykłady: Statystyka i rachunek prawdopodobieństwa.
- Prowadzone ćwiczenia i laboratoria: Algebra z geometrią analityczną, Analiza matematyczna 1, Analiza matematyczna 2.

#### Uniwersytet Warszawski, Wydział Nauk Ekonomicznych

- Prowadzone wykłady: Metody aktuarialne w ubezpieczeniach na życie, Ubezpieczenia, Insurances (kurs w j. angielskim), Matematyka ubezpieczeniowa.
- Prowadzone ćwiczenia i laboratoria: Ekonometria, Programowanie narzędzi analitycznych, Mathematical statistics (kurs w j. angielskim), Statystyka matematyczna, Rachunek prawdopodobieństwa.

### 7.3 Opieka naukowa nad studentami

- Promotor czterech prac magisterskich i dziewięciu licencjackich na Wydziale Matematyki Politechniki Wrocławskiej.
- Promotor pomocniczy jednego planowanego przewodu doktorskiego (mgr Rafał Walasek) na Wydziale Nauk Ekonomicznych Uniwersytetu Warszawskiego.
- Recenzent jednego zagranicznego przewodu doktorskiego, Prashant Giri.

### 7.4 Członkostwo w redakcjach artykułów naukowych

- Edytor czasopisma *Matematyka Stosowana*, od 2023.
- Edytor Special Issue: *Time Series Modelling, Data Science and Statistical Learning*, czasopisma *International Journal of Advances in Engineering Sciences and Applied Mathematics*, 2021.

### 7.5 Działalność popularyzatorska

- Współorganizator ogólnopolskiego konkursu *Warsaw Econometric Challenge* w latach 2021, 2022. Wydział Nauk Ekonomicznych Uniwersytetu Warszawskiego. Konkurs ma na celu wyłonienie najlepszego rozwiązania problemu ekonometrycznego często związanego z konkretnym zagadnieniem biznesowym.
- „Mathematical modeling of financial data in many dimensions”, 19.07.2015-26.07.2015, Lizbona, Portugalia. Instruktor (wykłady), *ECMI Modelling Week 2015*.
- „Experimental data modeling”, 24.08.- 31.08.2014, Paderborn, Niemcy. Instruktor (wykłady), *ECMI Modelling Week 2014*.

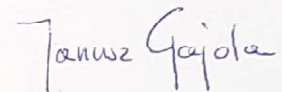
## Literatura

- [1] R. L. Schilling, L. Partzsch, *Brownian Motion*, DE GRUYTER, 2012.
- [2] B. B. Mandelbrot, J. W. V. Ness, *Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications*, *SIAM Review* 10 (4) (1968) 422–437.
- [3] G. Samorodnitsky, M. S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes*, Routledge, 2017.
- [4] J. Rosiński, *Tempering stable processes*, *Stochastic Processes and their Applications* 117 (6) (2007) 677–707.
- [5] P. Tankov, *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman and Hall/CRC, 2003.
- [6] Y. Meroz, I. M. Sokolov, *A toolbox for determining subdiffusive mechanisms*, *Physics Reports* 573 (2015) 1–29.
- [7] V. Zolotarev, *One-Dimensional Stable Distributions*, American Mathematical Society, 1986.
- [8] B. W. Stuck, B. Kleiner, *A statistical analysis of telephone noise*, *Bell System Technical Journal* 53 (7) (1974) 1263–1320.
- [9] J. Beran, Y. Feng, S. Ghosh, R. Kulik, *Long-Memory Processes*, Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [10] D. Applebaum, *Lévy Processes and Stochastic Calculus*, Cambridge University Press, 2009.

- [11] S. Bochner, *Harmonic Analysis and the Theory of Probability*, University of California Press, Berkeley, 1955.
- [12] A. A. Kilbas, *Theory and applications of fractional differential equations*, Elsevier, Amsterdam Boston, 2006.
- [13] E. Štrumbelj, I. Kononenko, Explaining prediction models and individual predictions with feature contributions, *Knowledge and Information Systems* 41 (3) (2013) 647–665.
- [14] R. N. Pillai, On Mittag-Leffler functions and related distributions, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 42 (1) (1990) 157–161.
- [15] O. E. Barndorff-Nielsen, *Probability densities and Lévy densities.*, Research 18, Aarhus Univ., Centre for Mathematical Physics and Stochastics (MaPhySto).
- [16] A. Wyłomańska, A. Chechkin, J. Gajda, I. M. Sokolov, Codifference as a practical tool to measure interdependence, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 421 (2015) 412–429.
- [17] N. N. Leonenko, I. Papić, Correlation properties of continuous-time autoregressive processes delayed by the inverse of the stable subordinator, *Communications in Statistics - Theory and Methods* 49 (20) (2019) 5091–5113.
- [18] T. J. Kozubowski, M. M. Meerschaert, K. Podgórski, Fractional Laplace motion, *Advances in Applied Probability* 38 (2) (2006) 451–464.
- [19] R. Cont, *Financial modelling with jump processes*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2004.
- [20] J. Bertoin, *Levy Processes*, Cambridge University Press, 2012.
- [21] A. N. Lagerås, A renewal-process-type expression for the moments of inverse subordinators, *Journal of Applied Probability* 42 (4) (2005) 1134–1144.
- [22] A. Janicki, A. Weron, *Simulation and Chaotic Behavior of  $\alpha$ -Stable Stochastic Processes*, CRC Press, 2021.
- [23] R. L. Schilling, R. Song, Z. Vondracek, *Bernstein Functions*, DE GRUYTER, 2012.
- [24] Y. S. Kim, S. T. Rachev, M. L. Bianchi, F. J. Fabozzi, Tempered stable and tempered infinitely divisible GARCH models, *Journal of Banking & Finance* 34 (9) (2010) 2096–2109.
- [25] U. Küchler, S. Tappe, Tempered stable distributions and processes, *Stochastic Processes and their Applications* 123 (12) (2013) 4256–4293.
- [26] P. Embrechts, M. Maejima, *Selfsimilar Processes*, Princeton University Press, 2002.
- [27] E. Perrin, R. Harba, C. Berzin-Joseph, I. Iribarren, A. Bonami, nth-order fractional brownian motion and fractional gaussian noises, *IEEE Transactions on Signal Processing* 49 (5) (2001) 1049–1059.
- [28] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, John Wiley & Sons, Inc., 1991.
- [29] N. Laskin, Fractional Poisson process, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 8 (3-4) (2003) 201–213.
- [30] D. O. Cahoy, V. V. Uchaikin, W. A. Woyczynski, Parameter estimation for fractional Poisson processes, *Journal of Statistical Planning and Inference* 140 (11) (2010) 3106–3120.

- [31] R. Gorenflo, A. A. Kilbas, F. Mainardi, S. V. Rogosin, Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications, Springer Berlin Heidelberg, 2014.
- [32] M. Abramowitz, I. A. Stegun (Eds.), Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, Dover Publications, Inc., 1965.
- [33] B. Huff, The strict subordination of differential processes, *Sankhya Series A* 31 (1969) 403–12.
- [34] A. Klenke, Probability Theory, Springer London, 2014.
- [35] K.-I. Sato, Levy Processes and Infinitely Divisible Distributions, Cambridge University Press, 2007.
- [36] L. Beghin, Geometric stable processes and related fractional differential equations, *Electronic Communications in Probability* 19 (2014) 1–14.
- [37] B. Toaldo, Convolution-type derivatives, hitting-times of subordinators and time-changed  $c$  0-semigroups, *Potential Analysis* 42 (1) (2014) 115–140.
- [38] N. N. Leonenko, M. M. Meerschaert, R. L. Schilling, A. Sikorskii, Correlation structure of time-changed Lévy processes, *Communications in Applied and Industrial Mathematics* 6.
- [39] K. Kobayashi, Stochastic calculus for a time-changed semimartingale and the associated stochastic differential equations, *Journal of Theoretical Probability* 24 (3) (2010) 789–820.
- [40] M. Magdziarz, Fractional Ornstein–Uhlenbeck processes. Joseph effect in models with infinite variance, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 387 (1) (2008) 123–133.
- [41] A. Astrauskas, J. B. Lévy, M. S. Taqqu, The asymptotic dependence structure of the linear fractional Lévy motion, *Lithuanian Mathematical Journal* 31 (1) (1992) 1–19.
- [42] J. C. Prajapati, A. K. Shukla, Decomposition of generalized Mittag-Leffler function and its properties, *Advances in Pure Mathematics* 02 (01) (2012) 8–14.
- [43] E. W. Stacy, A generalization of the gamma distribution, *The Annals of Mathematical Statistics* 33 (3) (1962) 1187–1192.
- [44] G. Samorodnitsky, Lower tails of self-similar stable processes, *Bernoulli* 4 (1) (1998) 127 – 142.
- [45] A. Kumar, M. M. Meerschaert, P. Vellaisamy, Fractional normal inverse Gaussian diffusion, *Statistics & Probability Letters* 81 (1) (2011) 146–152.
- [46] E. Eberlein, S. Raible, Term structure models driven by general Lévy processes, *Mathematical Finance* 9 (1) (1999) 31–53.
- [47] R. D. Gill, M. J. v. d. Laan, J. A. Wellner, Inefficient estimators of the bivariate survival function for three models, *Annales de l’I.H.P. Probabilités et statistiques* 31 (3) (1995) 545–597.
- [48] A. M. Mathai, S. Provost, Quadratic forms in random variables : theory and applications, Statistics, textbooks and monographs ; v. 126, M. Dekker, New York, 1992.
- [49] P. M. Stéphane Boucheron, Gabor Lugosi, Concentration Inequalities, Oxford University Press, 2016.
- [50] R. B. DAgostino, M. A. Stephens, Goodness-of-fit techniques, Statistics, textbooks and monographs ; vol. 68, M. Dekker, New York, 1986.
- [51] C. W. J. Granger, R. Joyeux, An introduction to long-memory time series models and fractional differencing, *Journal of Time Series Analysis* 1 (1) (1980) 15–29.

- [52] J. R. M. Hosking, Fractional differencing, *Biometrika* (1) (1981) 165–176.
- [53] P. S. Kokoszka, Prediction of infinite variance fractional arima, *Probability and Mathematical Statistics* 16 (1) (1995) 65–84.
- [54] T. Bollerslev, Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics* 31 (3) (1986) 307–327.
- [55] X. Lv, X. Shan, Modeling natural gas market volatility using GARCH with different distributions, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 392 (22) (2013) 5685–5699.
- [56] D. R. Cox, Regression models and life-tables, *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* 34 (2) (1972) 187–220.
- [57] D. F. Moore, *Applied Survival Analysis Using R*, Springer-Verlag GmbH, 2016.
- [58] P. R. Rosenbaum, D. B. Rubin, The central role of the propensity score in observational studies for causal effects, *Biometrika* 70 (1) (1983) 41–55.

  
Janusz Gajda