

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA

ROZPRAWA DOKTORSKA

Dynamika i lokalizacja w łańcuchach
kwantowych z oddziaływaniami
wielociałowymi

Autor:

Bartosz KRAJEWSKI

Promotor:

prof. dr hab. Marcin
MIERZEJEWSKI

*Rozprawa doktorska złożona w celu uzyskania stopnia doktora
w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, w dyscyplinie nauki fizyczne*

w

Instytucie Fizyki Teoretycznej
Wydział Podstawowych Problemów Techniki

Wrocław 2026

Dla mojej Mamy

„Gdybym miał powiedzieć, co cenię w życiu najbardziej, powiedziałbym, że ludzi. Ludzi, którzy podali mi pomocną dłoń, kiedy sobie nie radziłem, kiedy byłem sam, i co ciekawe, to właśnie przypadkowe spotkania wpływają na nasze życie. Chodzi o to, że kiedy wyznaje się pewne wartości, nawet pozornie uniwersalne, bywa, że nie znajduje się zrozumienia, które by tak rzec, które pomaga się nam rozwijać.”

Otis

Podziękowania

Chciałbym podziękować mojemu promotorowi, Marcinowi Mierzejewskiemu, za ponad 7 lat owocnej współpracy, nieocenione wsparcie, cierpliwość oraz merytoryczne prowadzenie na każdym etapie mojej drogi akademickiej. Twoja wyjątkowa pasja, entuzjazm oraz poczucie humoru były dla mnie ogromną inspiracją i miały znaczący wpływ zarówno na mnie jako początkującego badacza, jak i na moje spojrzenie na świat. Dziękuję Ci za to, że zawsze potrafiłeś znaleźć dla mnie czas, za godziny dyskusji o fizyce i nie tylko, oraz za atmosferę, która pozwalała mi rozwijać się naukowo.

I would like to express my gratitude to my collaborators Janez Bonča and Lev Vidmar at the Jožef Stefan Institute, with whom I had the privilege of working on the papers that constitute the core of this PhD thesis.

Szczególne podziękowania kieruję do Macieja Maški i Jacka Herbrycha, z którymi codzienne rozmowy przy kawie i lunchu były stałym elementem mojej doktoranckiej rutyny i zawsze potrafiły zaciekawić i poprawić humor, nawet w gorsze dni, oraz do Maksa – za niezliczone godziny spędzone razem w biurze od rana do nocy na rozmowach o fizyce, liczne godziny na siłowni i za to, że zawsze mogłem na Ciebie liczyć.

Z wdzięcznością dziękuję Robertowi Zaleśnemu za wprowadzenie mnie w świat badań naukowych oraz cierpliwe wsparcie na początku mojej kariery. Dziękuję Karolinie, bez której ten doktorat by się w ogóle nie wydarzył, oraz Stasiowi, który – choć nieświadomie – znacząco wydłużył drogę do jego ukończenia.

Chciałbym podziękować także moim Rodzicom – Joannie i Dariuszowi – za ogromne wsparcie i motywację do działania, jakie otrzymywałem od nich przez całe życie.

Na koniec pragnę z całego serca podziękować mojej narzeczonej, Marcie, za nieustanne wsparcie, wyrozumiałość i motywację w trakcie całego doktoratu. Dziękuję za cierpliwość w trudniejszych momentach, wiarę we mnie oraz codzienną obecność, która dodawała mi sił i pomagała zachować równowagę między pracą naukową i zawodową a życiem osobistym.



Badania przedstawione w niniejszej rozprawie były finansowane przez Narodowe Centrum Nauki (NCN) w ramach projektu 2020/37/B/ST3/00020. Znaczna część obliczeń numerycznych została przeprowadzona z wykorzystaniem zasobów udostępnionych przez Wrocławskie Centrum Sieciowo-Superkomputerowe.

POLITECHNIKA WROCLAWSKA

Streszczenie

Instytut Fizyki Teoretycznej
Wydział Podstawowych Problemów Techniki

Rozprawa Doktorska

Dynamika i lokalizacja w łańcuchach kwantowych z oddziaływaniami wielociałowymi

Bartosz KRAJEWSKI

Lokalizacja wielociałowa jest od wielu lat przedmiotem intensywnych badań numerycznych. Pomimo dużej liczby uzyskanych rezultatów wciąż nie ma jednoznacznej odpowiedzi na pytanie, czy zjawisko to może występować w granicy termodynamicznej przy skończonym nieporządku.

Celem niniejszej rozprawy doktorskiej jest identyfikacja źródeł trudności w interpretacji rezultatów numerycznych dotyczących stabilności lokalizacji wielociałowej w oddziaływających układach jednowymiarowych.

W rozprawie wprowadzono fenomenologiczną koncepcję, wyjaśniającą specyficzną dynamikę oddziaływających nieuporządkowanych układów bez konieczności istnienia fazy zlokalizowanej. Kluczowym założeniem jest „bliskość” modelu oddziaływającego do jego nieoddziaływającego odpowiednika, co pozwala poprawnie odtworzyć wyniki numeryczne.

Analiza ta stała się motywacją do szczegółowego zbadania struktury oddziaływania. Wykazano, że jedynie niewielka jego część stanowi rzeczywiste zaburzenie modelu nieoddziaływającego. W skończonych układach, głęboko w reżimie zlokalizowanym, zaburzenie to jest zbyt słabe, aby mogło być wiarygodnie uchwycone metodami numerycznymi. W konsekwencji większy wpływ na własności układu ma wybór rodzaju oddziaływania niż jego siła.

Zaproponowano również alternatywne modele do badania lokalizacji wielociałowej, wykorzystujące oddziaływania, przy których powyższy problem nie występuje. Modele te wykazują znacznie mniejsze tendencje do lokalizacji lub jej brak.

WROCLAW UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

Abstract

Institute of Theoretical Physics
Faculty of Fundamental Problems of Technology

Doctoral Thesis

Dynamics and localization in quantum chains with many-body interactions

by Bartosz KRAJEWSKI

Many-body localization has been the subject of intensive numerical research for many years. Despite a large number of obtained results, there is still no unambiguous answer to the question of whether this phenomenon can persist in the thermodynamic limit at finite disorder.

The aim of this doctoral thesis is to identify the sources of difficulties in interpreting numerical results concerning the stability of many-body localization in interacting one-dimensional systems.

The dissertation introduces a phenomenological concept that explains the specific dynamics of interacting disordered systems without the necessity of assuming the existence of a localized phase. The key assumption is the "proximity" of the interacting model to its non-interacting counterpart, which allows one to correctly reproduce numerical results.

This analysis motivated a detailed investigation of the structure of the interaction. It is demonstrated that only a small part of it represents a true perturbation to the non-interacting model. In finite systems, deep in the localized regime, this perturbation is too weak to be reliably captured by numerical methods. As a consequence, the choice of the type of interaction has a greater impact on the properties of the system than its strength.

Alternative models for studying many-body localization are also proposed, employing interactions for which the above problem does not occur. These models exhibit significantly weaker tendencies toward localization or none at all.

Spis treści

Podziękowania	vii
Streszczenie	ix
Abstract	xi
Lista publikacji	xv
I Wstęp	1
1 Wstęp	3
1.1 Cel rozprawy	4
1.2 Struktura rozprawy	5
2 Ergodyczność i termalizacja	7
2.1 Klasyczna termalizacja	7
2.2 Kwantowa termalizacja	8
2.3 <i>Eigenstate Thermalization Hypothesis</i>	10
2.4 Indykatory ergodyczności	11
2.5 Układy nieergodyczne	15
3 Lokalizacja wielociałowa	19
3.1 Lokalizacja Andersona	19
3.1.1 Wpływ wymiarowości	20
3.1.2 Realizacja w eksperymencie	23
3.2 Lokalizacja wielociałowa	23
3.2.1 Własności lokalizacji wielociałowej	26
3.2.2 Lokalizacja wielociałowa w modelach bez nieporządku	32
3.2.3 Realizacja w eksperymencie	32

II	Rezultaty	35
4	<i>Phenomenology of Spectral Functions in Disordered Spin Chains at Infinite Temperature</i>	37
5	<i>Restoring Ergodicity in a Strongly Disordered Interacting Chain</i>	53
6	<i>Strongly disordered Anderson insulator chains with generic two-body interaction</i>	67
7	<i>Dependence of charge transport in tilted chains on the choice of two-body interaction</i>	77
8	Podsumowanie i wnioski	89
	Bibliografia	93

Lista publikacji

- [A1] L. Vidmar, B. Krajewski, J. Bonča, M. Mierzejewski, Phenomenology of Spectral Functions in Disordered Spin Chains at Infinite Temperature, *Phys. Rev. Lett.* **127**, 230603 (2021).
- [A2] B. Krajewski, L. Vidmar, J. Bonča, M. Mierzejewski, Restoring Ergodicity in a Strongly Disordered Interacting Chain, *Phys. Rev. Lett.* **129**, 260601 (2022).
- [A3] B. Krajewski, L. Vidmar, J. Bonča, M. Mierzejewski, Strongly disordered Anderson insulator chains with generic two-body interaction, *Phys. Rev. B* **108**, 064203 (2023).
- [A4] B. Krajewski, M. Mierzejewski, Dependence of charge transport in tilted chains on the choice of two-body interaction, *Phys. Rev. B* **111**, 075150 (2025).

Wkład autora

Autor tej rozprawy, pod kierunkiem promotora i przy wsparciu współautorów, dokonał kompleksowego przygotowania artykułów [A2–A4]: autor przeprowadził m.in. wszystkie obliczenia numeryczne, znaczną część obliczeń analitycznych, analizę wyników, wizualizację danych oraz miał znaczący wkład w prace koncepcyjne i planowanie prac, przygotowanie treści oraz tekstu manuskryptu.

W przypadku artykułu [A1] autor przeprowadził obliczenia numeryczne. Ponadto autor był odpowiedzialny za część obliczeń analitycznych, wizualizację wyników oraz był zaangażowany w prace nad treścią artykułu.

Część I

Wstęp

ROZDZIAŁ

1

Wstęp

Niniejsza rozprawa doktorska ma formę monografii obejmującej cztery publikacje [A1–A4], stanowiące integralną całość. Prace powstały pod kierunkiem prof. dr. hab. Marcina Mierzejewskiego, promotora rozprawy, we współpracy z dr. Lvem Vidmarem oraz dr. Janezem Bončą z Instytutu Jožefa Stefana w Lublanie (publikacje [A1–A3]). W tym rozdziale ogólnie zaprezentowana zostanie tematyka rozprawy, wraz z motywacją oraz jej celem. Bardziej rozwinięte wprowadzenie zostanie zawarte w kolejnych rozdziałach.



Znalezienie materiałów, w których ewolucja jest całkowicie zatrzymana, może pozwolić przezwyciężyć jedno z największych wyzwań na drodze do stworzenia skalowalnego komputera kwantowego, w którym informacja zapisana w kubicie nie może podlegać zjawisku dekoherencji i musi być dostępna do odczytu przez długi czas. Niestety, zdecydowana większość modeli fizycznych opisuje układy ergodyczne. Układy takie, w trakcie dynamiki unitarnej, ewoluują do stanu nierozróżnialnego od stanu przewidywanego przez równowagową fizykę statystyczną. Nie zależy on od stanu początkowego, o którym informacja zostaje bezpowrotnie utracona.

Znane są już układy, które nie podlegają termalizacji, takie jak na przykład układy całkowalne, które nie są ergodyczne z powodu obecności ekstensywnej liczby całek ruchu. Jednakże wszystkie całkowalne modele mają precyzyjnie dobrane parametry, których zmiany powodują złamanie całkowalności. Oznacza to, że te układy są trudnodostępne w badaniach eksperymentalnych, ponieważ całkowite wyeliminowanie zaburzeń łamiących całkowalność nie jest możliwe. W konsekwencji układy niemal

całkowalne podlegają powolnej ewolucji i ostatecznie osiągają stan Gibbsa zgodny z równowagą fizykalną.

Niniejsza rozprawa doktorska dotyczy układów nieuporządkowanych wykazujących lokalizację wielociałową. Różnią się one od innych nietermalizujących układów tym, że występowanie stanu nieergodycznego nie wymaga precyzyjnego dostrojenia parametrów modelu. Ponieważ wywodzą się z izolatora Andersona [1] (przez dodanie do modelu oddziaływania), brak termalizacji zachodzi w dowolnie wysokiej temperaturze [2].

Zainteresowanie środowiska naukowego lokalizacją wielociałową rozpoczęło się w połowie pierwszej dekady XXI wieku, kiedy opublikowano perturbacyjne argumenty na zanik przewodnictwa w oddziałujących, nieuporządkowanych układach kwantowych [3,4]. Przez następne lata tematyka lokalizacji wielociałowej była intensywnie badana, a jej stabilność w granicy termodynamicznej – szeroko akceptowana [5].

W ostatnich latach ukazało się jednak wiele prac poddających w wątpliwość stabilność lokalizacji wielociałowej w przypadku dużych układów i długich skal czasowych [6–11]. Pojawiły się jednak również prace, które formułowały przeciwstawne konkluzje [12–15].

Mimo intensywnych badań, konsensus dotyczący stabilności lokalizacji wielociałowej w granicy termodynamicznej – a co za tym idzie, istnienia przemiany fazowej i fazy zlokalizowanej – nie został osiągnięty i wciąż pozostaje otwartym zagadnieniem. Niewielkie zmiany w sposobie interpretacji wyników mogą prowadzić do sprzecznych wniosków [5].

1.1 Cel rozprawy

Głównym celem niniejszej rozprawy jest zidentyfikowanie źródeł wyżej wspomnianych trudności w interpretacji wyników badań nad stabilnością lokalizacji wielociałowej w granicy termodynamicznej. Trudności te objawiają się między innymi poprzez niejasne lub wręcz sprzeczne wyniki obliczeń numerycznych, co utrudnia jednoznaczne wnioskowanie na temat istnienia i trwałości zlokalizowanej fazy wielociałowej w układach o bardzo dużych rozmiarach. W związku z tym praca koncentruje się na wskazaniu konkretnych czynników odpowiedzialnych za te niejasności oraz na zaproponowaniu zmian w metodyce badań numerycznych, które pozwolą wyeliminować wspomniane problemy.

W tym celu przeprowadzono badania kolejno w dwóch komplementarnych kierunkach. Po pierwsze, zbadano związek pomiędzy lokalnymi całkami ruchu izolatora Andersona (w którym nie ma oddziaływań wielociałowych) a powolną

dynamiką układu, który takie oddziaływania uwzględnia. Sprawdzono, czy traktowanie układu z oddziaływaniem jako jedynie nieznacznie różniącego się od swojego nieoddziałującego (Andersonowskiego) odpowiednika jest wystarczające do wyjaśnienia obserwowanych własności dynamicznych, takich jak powolna relaksacja czy subdyfuzja. Po drugie, przeanalizowano zależność właściwości układu od rodzaju przyjętego oddziaływania dwuciałowego. Pokazano, że specyficzna postać oddziaływań analizowanych w większości prac jest źródłem problemów z interpretacją wyników numerycznych. Finalnie dokonano oceny, w jakim stopniu oraz z jakiego powodu zmiana charakteru oddziaływań wpływa na transport i lokalizację.

1.2 Struktura rozprawy

Rozprawa składa się z serii czterech publikacji [A1–A4], które autor współtworzył w trakcie trwania doktoratu. W celu wprowadzenia do poruszanego zagadnienia, są one poprzedzone ogólnym wstępem teoretycznym. Co więcej, każdy z artykułów jest opatrzony własnym wprowadzeniem, w którym zawarto niezbędne informacje kontekstowe, a także opis rezultatów i ich interpretację.

W rozdziale 2 zaprezentowano podstawowe zagadnienia związane z problematyką termalizacji i ergodyczności w układach fizycznych. Rozdział rozpoczyna się od przypomnienia klasycznego obrazu termalizacji, sformułowanego w ramach mechaniki statystycznej. Następnie omówiono współczesne podejście do kwantowej termalizacji, ze szczególnym uwzględnieniem warunków jej występowania w układach izolowanych. Istotnym elementem tej części jest przedstawienie *Eigenstate Thermalization Hypothesis*, stanowiącej obecnie podstawę teoretycznego opisu procesów relaksacyjnych w układach kwantowych. Dalsza część rozdziału poświęcona jest wskaźnikom ergodyczności, obejmującym zarówno własności spektrum energetycznego, jak i charakterystykę dynamiki czasowej obserwabli. Rozdział kończy się przeglądem najczęściej badanych układów nieergodycznych.

Rozdział 3 poświęcono zjawisku lokalizacji wielociałowej, będącemu głównym tematem rozprawy. W pierwszej części wprowadzono koncepcję lokalizacji Andersona, z uwzględnieniem jej formalnego opisu, zależności od wymiarowości układu oraz najważniejszych realizacji eksperymentalnych. Następnie omówiona została lokalizacja wielociałowa, będąca rozwinięciem modelu Andersona na układy z oddziaływaniami. Szczegółowo opisano rys historyczny wraz z najważniejszymi pracami, jej charakterystyczne własności oraz realizacje eksperymentalne.

Rozdział 4 zawiera fenomenologiczną koncepcję, która pozwala wyjaśnić niektóre własności oddziałujących nieuporządkowanych układów kwantowych bez konieczności istnienia fazy zlokalizowanej. Podejście to opiera się na założeniu, że

całki ruchu izolatora Andersona uzyskują skończone czasy relaksacji. Takie założenie poprawnie reprodukuje funkcje spektralne w reżimie niskich częstości (długich czasów), a dynamika układu jest w całości determinowana przez takie całki ruchu.

Rozdział 5 przedstawia najważniejszy wynik rozprawy. Pokazano w nim, że interpretowanie oddziaływania typu gęstość-gęstość jako zaburzenia modelu Andersona jest błędem. Okazuje się, że jedynie niewielka część tego oddziaływania jest *rzeczywistym zaburzeniem* dla modelu Andersona. Im silniejszy nieporządek, tym słabsze staje się *rzeczywiste zaburzenie*. Wyniki prezentowane w literaturze dla bardzo silnego nieporządku odpowiadają zaburzeniom na tyle słabym, że nie mogą być one poprawnie uchwycone w obliczeniach numerycznych prowadzonych dla dostępnych rozmiarów układu. Zaproponowano także model z przeskalowanym oddziaływaniem, który pozostaje ergodyczny dla dowolnie dużego nieporządku.

W rozdziale 6 kontynuowane są badania opisane w rozdziale 5. Ponieważ przeskalowany model jest obliczeniowo wymagający, a jego postać jest złożona, zaproponowana zostaje nowa postać oddziaływania, która w całości stanowi zaburzenie dla izolatora Andersona. Analiza nieuporządkowanego modelu z takim oddziaływaniem pokazuje, że jest on ergodyczny w szerokim reżimie parametrów – poza skrajnymi wartościami (bardzo silny nieporządek i bardzo słabe oddziaływanie), w przypadku których wiarygodność badań numerycznych jest wątpliwa.

Rozdział 7 zawiera analizę wprowadzoną w rozdziale 5 przeprowadzoną dla innego układu – modelu z liniowym potencjałem, w którym, przy braku oddziaływania, również zachodzi lokalizacja (podobnie jak w przypadku modelu nieuporządkowanego). W tym modelu znana jest jawna postać całek ruchu, co pozwala na wykonanie obliczeń analitycznych i otrzymanie jawnej postaci *rzeczywistego zaburzenia* modelu jednocząstkowego. Badana jest również szybkość dynamiki w zależności od wyboru postaci oddziaływania.

Rozdział 8 zawiera podsumowanie rezultatów przedstawionych w rozprawie.

Ergodyczność i termalizacja

2.1 Klasyczna termalizacja

Termalizacja jest procesem, w którym układ fizyczny ewoluuje w czasie ze stanu nierównowagowego do stanu równowagi termicznej, opisywanego przez równowagową fizykę statystyczną. Ponieważ stan równowagi termicznej opisywany jest przez małą liczbę parametrów, które definiują stany Gibbsa (mikrokanoniczny, kanoniczny i wielki kanoniczny), takich jak temperatura czy potencjał chemiczny, ten proces całkowicie usuwa informację o stanie początkowym układu [16]. Zjawisko termalizacji jest głęboko powiązane z koncepcją ergodyczności układu. W fizyce klasycznej system jest określany jako ergodyczny, jeśli w długim czasie jego trajektoria w przestrzeni fazowej równomiernie próbkuje wszystkie mikrostanu zgodne z makroskopowymi ograniczeniami systemu [17], opisywanymi symetriami układu, które prowadzą do praw zachowania. Innymi słowy, dla wystarczająco długich czasów ewolucji prawdopodobieństwo znalezienia się w pewnej części przestrzeni fazowej jest proporcjonalne do objętości tej podprzestrzeni [18]. W tych warunkach uśredniona po czasie wartość obserwabli jest równa średniej po rozkładzie statystycznym, co pozwala badać taki układ uśredniając po jego realizacjach, zamiast badać długoczasową ewolucję.

Większość układów fizycznych uznawana jest za ergodyczne, jednakże – mimo stosunkowo prostej definicji – w większości przypadków nie istnieją dowody na ich ergodyczność [19]. Jednym z niewielu przykładów układów z dowiedzioną ergodycznością jest bilard Sinaja – dwuwymiarowy model w kształcie kwadratu z periodycznymi warunkami brzegowymi z wyciętym dyskiem w centrum i poruszającą się wewnątrz cząstką. Model ten może opisywać gaz elektronowy w ciele stałym (gaz Lorentza), który oddziałuje z węzłami sieci jedynie poprzez sprężyste

kolizje [20]. W tym modelu prawie wszystkie trajektorie są ergodyczne, co zostało dowiedzione przez Sinaję [21, 22]. Nie istnieje jednak podobny dowód dla cieczy, gdzie występowałyby siły van der Waalsa, mimo że taki układ również wydaje się ergodyczny, co tylko potwierdza trudność przeprowadzenia podobnego dowodu.

2.2 Kwantowa termalizacja

W klasycznym przypadku często mówi się o termalizacji w kontekście oddziaływania z rezerwuarem termicznym i dochodzeniu układu do równowagi termicznej z nim [23]. Co więcej, jak wspomniano w podrozdziale 2.1, w procesie termalizacji ulega usunięciu informacja o stanie początkowym układu. To prowadzi do pytania, czy termalizacja w izolowanym układzie kwantowym jest w ogóle możliwa, skoro unitarna ewolucja nie może usuwać żadnych informacji. Mimo tych pozornych problemów termalizacja jest powszechna w układach kwantowych, a jej czasy mogą być rzędu dziesiątek femtosekund w przypadku silnie skorelowanych elektronów [24]. Rozwiązaniem tego pozornego paradoksu jest zauważenie, że w tym przypadku w procesie termalizacji informacja o stanie początkowym układu nie zostaje całkowicie usunięta, a „ukryta” w systemie. W procesie propagującego splątania, lokalne informacje o stanie układu rozprzestrzeniają się po całym układzie, co powoduje, że są niemierzalne bez pomiarów globalnych operatorów. W takiej sytuacji dowolny podukład będzie znajdował się w stanie równowagi termicznej z resztą układu. Podzielmy układ kwantowy na dwa podukłady A i B , gdzie A jest małą, lokalną częścią całego układu, opisywaną zredukowaną macierzą gęstości

$$\rho_A(t) = \text{Tr}_B[\rho(t)], \quad (2.1)$$

gdzie $\rho(t) = |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)|$ jest macierzą gęstości całego układu (w stanie czystym). Termalizacja dla układu A oznacza, że po odpowiednio długim czasie macierz gęstości ρ_A będzie ewoluować do macierzy gęstości Gibbsa

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_A(t) \simeq \text{Tr}_B \left[\frac{e^{-\beta H}}{Z} \right], \quad (2.2)$$

gdzie H jest Hamiltonianem całego układu, β jest zdefiniowana poprzez energie stanu początkowego ewolucji. W tym procesie podukład B działa jako rezerwuar dla podukładu A .

Innymi słowy, zdolność kwantowego układu do termalizacji to jego zdolność do bycia rezerwuarem dla wszystkich swoich lokalnych podukładów.

Chociaż intuicja związana z „ukryciem” informacji o stanie początkowym w stopniach swobody rezerwuaru stanowi użyteczną perspektywę, istnieje bardziej fundamentalny sposób uchwycenia istoty termalizacji w izolowanych układach kwantowych. Przyjrzyjmy się makroskopowemu izolowanemu układowi opisywanemu Hamiltonianem H i ewolucji wartości oczekiwanej lokalnej obserwabli \hat{X} . Przez „lokalność” operatora rozumiemy, że działa w obszarze małej, skończonej liczby stopni swobody, dużo mniejszej niż liczba stopni swobody całego układu. Dla wygody czytelnika przytoczymy standardowe rozumowanie zaprezentowane w pracach [5, 16, 19, 25]. Rozważmy stan początkowy układu, niebędący stanem własnym układu

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n |n\rangle, \quad (2.3)$$

gdzie $c_n = \langle n|\psi(0)\rangle$ oraz $\sum_n c_n = 0$, a $|n\rangle$ jest stanem własnym Hamiltonianu H

$$H |n\rangle = E_n |n\rangle. \quad (2.4)$$

Z równania Schrödingera możemy wyliczyć postać stanu układu w dowolnej chwili czasu t

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{-itE_n} |n\rangle. \quad (2.5)$$

Z pomocą równania 2.5 możemy wyliczyć wartość oczekiwaną obserwabli \hat{X} w dowolnej chwili t

$$X(t) = \langle \psi(t) | \hat{X} | \psi(t) \rangle = \sum_n |c_n|^2 X_{nn} + \sum_{m,n \neq m} e^{-it(E_n - E_m)} c_m^* c_n X_{mn}, \quad (2.6)$$

gdzie X_{mn} są elementami macierzowymi operatora \hat{X} w bazie własnej Hamiltonianu $X_{mn} = \langle m | \hat{X} | n \rangle$.

Stąd, jeśli układ osiąga stan stacjonarny, możemy znaleźć wartość oczekiwaną $X(t)$ w tym stanie

$$\langle X(t \rightarrow \infty) \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t dt' X(t') = \sum_n |c_n|^2 X_{nn}. \quad (2.7)$$

Z równania 2.7 widać, że na długoczasową ewolucję wpływ mają jedynie diagonalne elementy macierzowe X_{nn} , ponieważ wkłady od elementów pozadiagonalnych ulegają defazowaniu (szybko oscylują i dla długich czasów efektywnie są losowe, więc ich przyczynki do lokalnych obserwabli wzajemnie się znoszą).

Z drugiej jednak strony, dla rozkładu mikrokanonicznego wartość oczekiwana obserwabli dla energii $E = \langle \psi(0) | H | \psi(0) \rangle$ wynosi

$$\langle X \rangle_{eq} = |c|^2 \sum_{n: |E_n - E| < \delta E} X_{nn}, \quad (2.8)$$

gdzie $|c|^2 = \left(\sum_{n: |E_n - E| < \delta E} 1 \right)^{-1}$ jest stała.

Jeżeli układ opisywany Hamiltonianem H termalizuje, to przy założeniu, że wariancja energii δE^2 stanu początkowego $|\psi(0)\rangle$ jest stosunkowo mała, równania 2.7 i 2.8 powinny być tożsame. Łatwo zauważyć, że ze względu na obecność stałych c_n w równaniu 2.7, opisujących stan początkowy, wartość ta jest zależna od stanu początkowego, co znaczy, że pamięć o stanie początkowym układu jest zachowana dla dowolnie długich czasów, co nie ma miejsca w przypadku równania 2.8.

Rozwiązanie tego problemu przynosi *Eigenstate Thermalization Hypothesis* (ETH). Dla makroskopowego układu i stanów $|n\rangle$ o energiach E_n bardzo bliskich sobie, diagonalne elementy macierzowe są sobie równe $X_{nn} = \mathcal{X}$ dla wszystkich n , przez co stałe c i c_n nie mają wpływu na wynik

$$\langle X(t \rightarrow \infty) \rangle = \mathcal{X} \underbrace{\sum_n |c_n|^2}_{=1} = \mathcal{X} = \mathcal{X} \underbrace{|c|^2 \sum_{n: |E_n - E| < \delta E}}_{=1} = \langle X \rangle_{eq}. \quad (2.9)$$

2.3 Eigenstate Thermalization Hypothesis

Wyjaśnienie termalizacji, wykorzystujące własności pojedynczych stanów własnych Hamiltonianu, znane jako ETH, zaproponowali na początku lat 90. XX wieku Joshua Deutsch [26] i Mark Srednicki [27]. Zgodnie z założeniami ETH w ergodycznych systemach wielociałowych każdy stan własny przy danej energii ma takie wartości oczekiwane obserwabli, jakie przewiduje zespół mikrokanoniczny dla tej samej energii.

Kluczowy wkład w rozwinięcie tej hipotezy wniosła praca Srednickiego z 1999 roku, w których zaproponowano ansatz dla macierzy obserwabli w bazie stanów własnych [28]. Zgodnie z nim elementy diagonalne operatora odpowiadają średniej mikrokanonicznej, a elementy poza diagonalą są zredukowane przez czynnik zależny od entropii termodynamicznej oraz dodatkową funkcję opisującą strukturę widmową

$$X_{mn} = \mathcal{X}(\bar{E}) \delta_{mn} + e^{-S(\bar{E})/2} f_{\mathcal{X}}(\bar{E}, \omega_{mn}) R_{mn}, \quad (2.10)$$

gdzie $\bar{E} = (E_m + E_n)/2$ jest średnią energii stanów $|m\rangle$ i $|n\rangle$, $\omega_{mn} = E_m - E_n$ jest ich różnicą, $S(\bar{E})$ to entropia termodynamiczna (zdefiniowana jako logarytm

z gęstości stanów), R_{mn} jest zmienną losową o jednostkowej wariancji i zerowej średniej. Wartość oczekiwana obserwabli oraz funkcja spektralna, kolejno $\mathcal{X}(\bar{E})$ oraz $f_{\mathcal{X}}(\bar{E}, \omega_{mn})$, są gładkimi funkcjami, które nie skalują się z rozmiarem układu.

Warto również zauważyć, że – ponieważ entropia $S(\bar{E})$ jest wielkością ekstensywną – z równania 2.10 wynika, że elementy pozadiagonalne obserwabli X oraz fluktuacje między kolejnymi elementami diagonalnymi maleją eksponencjalnie wraz ze wzrostem rozmiaru układu.

Chociaż nie istnieje ściśle wyjaśnienie, które obserwable spełniają ETH, powszechnie przyjmuje się, że równanie 2.10 jest spełnione dla wszystkich fizycznych obserwabli dla których zastosowanie ma mechanika statystyczna (dla wszystkich obserwabli, które możemy zmierzyć) [19]. W szczególności, ETH ma zastosowanie dla obserwabli „kilkuciałowych” (ang. *few-body operators*) [29], jednakże nie ma wymogu ich lokalności w przestrzeni rzeczywistej [19] (mogą być one lokalne na przykład w przestrzeni pędów).

Chociaż nie jest jasne czy spełnienie ETH jest niezbędne, żeby układ mógł termalizować, wszystkie znane termalizujące układy kwantowe spełniają ETH oraz wszystkie układy spełniające ETH są ergodyczne [25]. Dzięki temu można wykorzystać spełnienie ETH, jako potwierdzenie ergodyczności układu (jednakże niespełnienie ETH nie może posłużyć jako dowód nieergodyczności).

2.4 Indykatory ergodyczności

W tym podrozdziale omówione zostaną sposoby numerycznego testowania ergodyczności układu. Przedstawione indykatory bazują na własnościach spektralnych, statystycznych i dynamicznych, które w sposób pośredni odzwierciedlają zdolność układu do termalizacji. Analiza ich zachowania pozwala rozróżnić układy ergodyczne od nieergodycznych oraz wskazać przejścia między różnymi reżimami dynamiki. Zaletą takiego podejścia jest możliwość uchwycenia subtelnych odchyłeń od ergodyczności nawet w przypadkach, gdy bezpośrednie porównanie średnich czasowych i zespołowych jest trudne do przeprowadzenia. W kolejnych częściach zostaną zaprezentowane wybrane indykatory oraz ich znaczenie w badaniach numerycznych.

Fluktuacje diagonalnych elementów macierzowych

Jak wspomniano w podrozdziale 2.3, spełnienie ETH może być traktowane, jako indyktor ergodyczności układu (warunek wystarczający) [19,30]. Najprostszym sposobem sprawdzenia działania ETH jest analiza fluktuacji diagonalnych elementów macierzowych lokalnego operatora \hat{X} w bazie własnej Hamiltonianu. W tym celu

należy wyliczyć diagonalne elementy macierzowe $X_{nn} \equiv X_n = \langle n | \hat{X} | n \rangle$, gdzie $\{|n\rangle\}$ są stanami własnymi Hamiltonianu odpowiadającymi energiom $\{E_n\}$, uporządkowanym w kolejności niemalejącej. Korzystając z równania 2.10, rozpiszmy różnice kolejnych elementów macierzowych

$$X_{n+1} - X_n = \mathcal{X}(E_{n+1}) - \mathcal{X}(E_n) + e^{-S(E_{n+1})/2} f_{\mathcal{X}}(E_{n+1}, 0) R_{n+1n+1} - e^{-S(E_n)/2} f_{\mathcal{X}}(E_n, 0) R_{nn}. \quad (2.11)$$

Jeśli rozważymy stany Hamiltonianu ze środka spektrum, to w granicy dużych układów $\mathcal{X}(E_{n+1}) \simeq \mathcal{X}(E_n)$ oraz $f_{\mathcal{X}}(E_{n+1}, 0) \simeq f_{\mathcal{X}}(E_n, 0)$, ponieważ $\mathcal{X}(E)$ i $f_{\mathcal{X}}(E, 0)$ są gładkimi funkcjami energii. Korzystając z tego faktu, możemy przepisać równanie 2.11

$$X_{n+1} - X_n \simeq f_{\mathcal{X}}(E_n, 0) \left(e^{-S(E_{n+1})/2} R_{n+1n+1} - e^{-S(E_n)/2} R_{nn} \right). \quad (2.12)$$

$S(E)$ jest wielkością ekstensywną, więc prawa strona równania 2.12 maleje eksponencjalnie wraz ze wzrostem rozmiaru układu.

Metoda ta została zastosowana m.in. w pracach [31, 32], w których badano zależność fluktuacji elementów macierzowych od rozmiaru układu w jednocząstkowych układach.

Statystyka poziomów

Statystyka poziomów (ang. *level statistics*) stanowi łatwo dostępny indyktor ergodyczności, ponieważ do jej wyznaczenia potrzebne są jedynie wartości własne Hamiltonianu układu, bez konieczności wyliczenia i analizy stanów własnych. Pozwala to w prosty sposób ocenić, czy rozważany system ma tendencję do zachowania zgodnego ze statystyką z macierzy losowych (co sugeruje ergodyczność), czy raczej przejawia cechy lokalizacji.

W tym kontekście istotną rolę odgrywa tzw. „*gap ratio*” (wprowadzone w pracy Oganesyana i Huse’a [2]). Technika ta unika problematycznego „*unfoldingu poziomów*” [33] i umożliwia analizę korelacji między sąsiadującymi przerwami w widmie układu. Niech E_n oznacza kolejne wartości własne Hamiltonianu, uporządkowane rosnąco. Wówczas definiujemy wielkość

$$\delta_n = E_{n+1} - E_n \geq 0, \quad (2.13)$$

opisującą przerwę pomiędzy dwoma kolejnymi poziomami energetycznymi. Następnie wprowadzamy bezwymiarowy parametr

$$r_n = \frac{\min\{\delta_n, \delta_{n-1}\}}{\max\{\delta_n, \delta_{n-1}\}}, \quad (2.14)$$

gdzie $0 \leq r_n \leq 1$. Wartość r_n zbliżona do 1 oznacza niewielką różnicę między kolejnymi przerwami, podczas gdy znaczna dysproporcja obniża r_n .

Dla potrzeb analizy ergodyczności ważne jest wyznaczenie średniej wartości r . Uzyskuje się ją przez uśrednianie r_n po stanach własnych w wybranym zakresie energii (zwykle w środkowej części widma, gdzie gęstość stanów jest największa). W przypadku układów nieuporządkowanych należy dokonać również uśrednienia po wielu realizacjach nieporządku. Otrzymaną wartość $\langle r \rangle$ porównuje się następnie z odpowiednimi wartościami odniesienia: $r_{\text{GOE}} \approx 0.5307$, charakterystycznej dla zespołu GOE (ang. *Gaussian Orthogonal Ensemble*) [34] oraz $r_p = 2 \ln 2 - 1 \approx 0.3863$, typowej dla statystyki Poissona (charakterystycznej dla układów nieergodycznych).

Nieco lepszą metodą jest badanie rozkładów $f(r_n)$ i porównanie ich do rozkładów wzorcowych: w przypadku Poissonowskiego nieskorelowanego spektrum energetycznego rozkład gęstości prawdopodobieństwa ma postać [2]

$$f(r) = \frac{2}{(1+r)^2}, \quad (2.15)$$

a dla rozkładu Wignera-Dysona charakterystycznego dla zespołu GOE rozkład gęstości prawdopodobieństwa ma postać [34]

$$f(r) = \frac{27}{4} \frac{r+r^2}{(1+r+r^2)^{5/2}}. \quad (2.16)$$

Ten sposób nie ogranicza się tylko do porównywania dwóch liczb, ale pozwala pozyskać znacznie więcej informacji, np. z kształtu rozkładu.

Entropia splątania

Entropia splątania jest kolejnym ważnym wskaźnikiem, który pozwala odróżnić fazę ergodyczną od zlokalizowanej w układach wielocząstkowych. Wyliczenie jej wymaga znajomości wektorów własnych Hamiltonianu, ale dostarcza ona cennych informacji o stopniu korelacji przestrzennej w układzie (wzajemnej informacji podukładów) [16, 35].

Najczęściej rozważana jest entropia von Neumanna. Dla stanu $|m\rangle$, będącego stanem własnym Hamiltonianu przy układzie podzielonym przestrzennie na dwa podukłady A i B przedstawia się wzorem

$$S_A = -\text{Tr}_A(\rho_A \ln \rho_A), \quad (2.17)$$

gdzie $\rho_A = \text{Tr}_B |m\rangle \langle m|$, to zredukowana macierz gęstości podukładu A .

Dla układów ergodycznych stany ze środka spektrum są prawie maksymalnie splątane [36] i ich entropia splątania jest zgodna z tzw. prawem objętościowym (ang. *volume law*) [36–38]

$$S_A = V_A \ln(2), \quad (2.18)$$

a dla układów nieergodycznych (w przypadku braku lokalizacji w przestrzeni rzeczywistej) [38]

$$S_A = c_0(f) V_A \ln(2), \quad (2.19)$$

gdzie $f = V_A/V$ jest stosunkiem objętości podukładu A do objętości całego układu, współczynnik $c_0(f = 0) = 1$ i $c_0(f > 0) < 1$ [38]. Entropia splątania stanów własnych układu nieergodycznego nie osiąga wartości maksymalnej, jeśli rozmiary podukładów są tego samego rzędu $f \neq 0$ [38].

W przypadku układów wykazujących zjawisko lokalizacji entropia splątania S_A jest proporcjonalna do rozmiaru brzegu podukładu – występuje tu prawo powierzchniowe (ang. *area law*) [39], co odpowiada znacznemu ograniczeniu splątania. Dla układów jednowymiarowych, w przypadku lokalizacji, entropia splątania jest więc stała i nie zależy od rozmiaru układu.

Ewolucja funkcji autokorelacji gęstości obsadzeń

Użyteczną metodą weryfikacji ergodyczności układu jest analiza znormalizowanej funkcji autokorelacji $C(t)$ gęstości obsadzeń [5, 40, 41]

$$C(t) = \frac{1}{c} \sum_{j \in \mathcal{J}} \langle \tilde{n}_j(t) \tilde{n}_j \rangle, \quad (2.20)$$

gdzie $c = \text{const}$ jest stałą gwarantującą $C(0) = 1$, \mathcal{J} jest zbiorem położeń, dla których funkcja autokorelacji jest liczona, n_j jest fermionowym operatorem liczby cząstek i $\tilde{n}_j = n_j - \frac{1}{2}$, $\langle \dots \rangle$ oznacza uśrednienie po zespole statystycznym (i realizacjach układu dla systemów losowych).

Dla układów ergodycznych funkcja autokorelacji $C(t)$ zanika do zera w granicy $t \rightarrow \infty$ przy wystarczająco dużych rozmiarach układów. W przypadku układów nieergodycznych zaś, ewoluuje do niezerowej wartości dla dowolnie długich czasów $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) > 0$.

Jest to wielkość o tyle istotna, że może być ona mierzona w eksperymencie [42–44]. W przypadku układów ergodycznych można ją powiązać z procesem dyfuzji oraz pozwala ona zidentyfikować anomalny subdyfuzyjny transport, co zostanie szerzej omówione w kolejnych rozdziałach.

2.5 Układy nieergodyczne

W tym podrozdziale przedstawione zostaną wybrane klasy układów kwantowych, które wykazują nietrywialne odstępstwa od ergodyczności bądź charakteryzują się bardzo wolną dynamiką. Szczególny nacisk zostanie położony na współczesne modele, które cieszą się szczególnym zainteresowaniem ze względu na swoją unikalną dynamikę oraz egzotyczne własności fizyczne. Do omawianych klas należą: modele z bliźnami kwantowymi, kryształy czasowe, układy całkowlane oraz modele wykazujące lokalizację wielociałową.

Poniżej zostanie przedstawiona krótka charakterystyka każdej z tych grup.

Modele z bliźnami kwantowymi

Modele z bliźnami kwantowymi są przykładami układów wielu ciał, które wykazują słabe złamanie ergodyczności. W takich systemach większość stanów własnych spełnia ETH, ale pojawia się także specyficzna grupa nietypowych stanów własnych, nazywanych „bliźnami kwantowymi” (ang. *quantum scars*) [45, 46], które pozostają skoncentrowane wokół specyficznych części przestrzeni Hilberta, analogicznie do bliźn kwantowych w układach jednocząstkowych, obserwowanych np. w chaotycznych bilardach [45]. Ich liczba skaluje się wielomianowo lub przynajmniej subekstensywnie [47] wraz z rozmiarem układu, więc stosunek ich liczby do rozmiaru przestrzeni Hilberta zanika w granicy termodynamicznej [48]. Przykładowym modelem wykazującym takie zachowanie jest model PXP, eksperymentalnie realizowany przy użyciu atomów Rydberga [45]. Bliźny kwantowe manifestują się poprzez długotrwałe, okresowe oscylacje w dynamice układu [46] oraz anomalnie niską entropię splątania, skalującą się logarytmicznie z wielkością systemu [48]. Te nietypowe stany własne są stabilne wobec niektórych zaburzeń, co wskazuje na możliwość ich wykorzystania do generowania nowych, długo żyjących koherentnych stanów kwantowych [48]. Ważne jest również, że stany te można przygotować w eksperymencie jako stany początkowe ewolucji kwantowej [48, 49].

Kryształy czasowe

Kryształy czasowe stanowią klasę układów, w których spontanicznie łamana jest symetria translacji w czasie, prowadząc do powstania samorzutnego periodycznego ruchu cząstek [50]. Zaproponowane przez Franka Wilczka w 2012 roku, początkowo wzbudziły kontrowersje, jednak intensywne badania doprowadziły do teoretycznego i eksperymentalnego potwierdzenia istnienia tzw. dyskretnych kryształów czasowych [51–53]. W tego typu układach periodyczne wymuszenie zewnętrzne prowadzi

do spontanicznej organizacji ruchu wielu ciał z okresem innym niż okres wymuszenia, co jest konsekwencją złamania dyskretnej symetrii translacji czasowej [54]. W kryształach czasowych zaburzona zostaje ergodyczność: układ nie eksploruje w sposób równomierny całej dostępnej przestrzeni fazowej, lecz pozostaje uwięziony w określonej strukturze cyklicznych stanów kwantowych.

Innym przykładem kryształu czasowego, bliskim tematyce tej rozprawy, są układy z potencjałem nieuporządkowanym w czasie, gdzie zachodzi lokalizacja Andersona w domenie czasowej [55]. W odpowiednich warunkach w tym modelu obserwowane jest spontaniczne pojawienie się paczek falowych zlokalizowanych andersonowsko wzdłuż periodycznych trajektorii.

Układy całkowlane

Układy całkowlane – to szczególna klasa modeli kwantowych, które charakteryzują się istnieniem ekstensywnej liczby ortogonalnych lokalnych wielkości zachowanych – całek ruchu. Obecność tak rozbudowanego zestawu praw zachowania sprawia, że dynamika takiego układu jest ściśle ograniczona i nie spełnia założeń ergodyczności – ewolucja nie prowadzi do zaniku informacji o stanie początkowym ani do osiągnięcia typowej równowagi termicznej, opisywanej stanem Gibbsa (układ nie ulega termalizacji). Układy takie w trakcie ewolucji nie osiągają stanu Gibbsa lecz są opisywane przez *Generalized Gibbs Ensemble* [56–59].

Kwantowe układy całkowlane stanowią zatem prototypowy przykład układów nieergodycznych i są ważnym punktem odniesienia we współczesnej fizyce statystycznej oraz teorii wielu ciał. Niestety, układy całkowlane nie są generyczne – są to precyzyjnie dostrojone „specjalne” modele, co ogranicza ich wykorzystanie eksperymentalne. Najczęściej badane modele całkowlane to jednowymiarowy model XXZ (w tym model Heisenberga) oraz jednowymiarowy model Hubbarda.

Chociaż model Andersona najczęściej nie jest rozpatrywany w kontekście całkowlności, jak każdy model jednocząstkowy posiada ekstensywną liczbę całek ruchu i nie podlega termalizacji. W przypadku modelu Andersona całki ruchu są zlokalizowane w przestrzeni rzeczywistej. Model ten zostanie bardziej szczegółowo opisany w kolejnym rozdziale.

Modele wykazujące lokalizację wielociałową

Modele wykazujące lokalizację wielociałową są o tyle ciekawą klasą modeli, że powolna dynamika i możliwy całkowity zanik termalizacji występują bez konieczności precyzyjnego dostrajania parametrów modelu oraz dla dowolnych stanów początkowych [5]. Ponadto są to modele ze zdecydowanie największym eksperymentalnym potwierdzeniem nieergodyczności z wyżej wymienionych modeli [42, 60–62].

Modele wykazujące lokalizację wielociałową zostaną szczegółowo omówione w następnym rozdziale i są głównym tematem analizowanym w tej rozprawie.

ROZDZIAŁ

3

Lokalizacja wielociałowa

W tym rozdziale omówione zostaną zagadnienia lokalizacji Andersona – będącej prekursorem lokalizacji wielociałowej – oraz lokalizacji wielociałowej, która jest głównym tematem rozprawy. Obu tym zagadnieniom poświęcono wiele obszernych prac przeglądowych, dlatego omówienie ich w tej rozprawie nie będzie pełne, a skoncentruje się na ogólnym wprowadzeniu do obu tematów oraz bardziej szczegółowym opisie zagadnień istotnych dla oryginalnych badań rozprawy.

3.1 Lokalizacja Andersona

Klasyczna teoria przewodnictwa elektrycznego jest oparta na modelu elektronów traktowanych jako klasyczny gaz doskonały, znajdujący się wewnątrz metalu i rozpraszany na dodatnio naładowanych jonach sieci krystalicznej (model Drudego) [63]. Do opisu zachowania elektronów wykorzystano kinetyczną teorię gazów rozrzedzonych, dlatego nie uwzględnia on innych oddziaływań, takich jak oddziaływanie elektron-elektron czy elektron-jon, poza zderzeniami. Jednym z rezultatów wykorzystania tego modelu jest pokazanie liniowej zależności gęstości prądu od natężenia pola elektrycznego

$$\mathbf{j} = \frac{ne^2\tau}{m} \mathbf{E}, \quad (3.1)$$

gdzie n – gęstość nośników, e – ładunek elektronu, m – masa elektronu, τ – średni czas między zderzeniami elektronu z siecią. Co więcej, dostarcza on dobrego wyjaśnienia efektu Halla oraz magnetooporu [64].

Jak wynika z równania 3.1, model Drudego wiąże przewodność ze średnim czasem pomiędzy zderzeniami, a co za tym idzie, ze średnią drogą swobodną elektronu.

Jednakże, wyliczona z modelu Drudego średnia swobodna droga elektronu, jest znacznie większa niż stała sieci krystalicznej [64], co implikuje, że założenia modelu nie mogą być prawdziwe i elektron nie rozprasza się na węzłach sieci.

Wyjaśnienie tej niespójności przyniosła mechanika kwantowa. Elektron, traktowany jako fala, ulega procesowi dyfrakcji na idealnej sieci krystalicznej, a poprawnym opisem elektronu w sieci krystalicznej jest model cząstki swobodnej w periodycznym potencjale. Rozwiązaniem równania Schrödingera dla takiego potencjału są stany Blocha – elektron swobodnie poruszający się w sieci krystalicznej. W tym podejściu opór elektryczny wynika z rozpraszania elektronów na defektach w sieci krystalicznej. Po uwzględnieniu poprawek kwantowo-mechanicznych model Drudego nadal może być stosowany, jednak z modyfikacją polegającą na tym, że elektron porusza się, odbijając się od defektów. Obecność defektów prowadzi do skrócenia średniej drogi swobodnej, a w efekcie do zmniejszenia przewodnictwa. Powstaje zatem pytanie, co dzieje się wraz ze wzrostem nieporządku (utożsamianego z liczbą zanieczyszczeń). Czy przewodnictwo będzie proporcjonalnie maleć?

Philip W. Anderson w swojej pracy z 1958 roku zauważył, że – zgodnie z oczekiwaniami – przewodnictwo maleje wraz ze wzrostem nieporządku w układzie [1]. Po osiągnięciu jednak pewnej krytycznej wartości nieporządku, dyfuzja elektronów całkowicie ustaje, a przewodnictwo całkowicie znika. Anderson rozważał model ciasnego wiązania (ang. *tight-binding model*) elektronu w kryształ, traktowanym jako periodyczna sieć studni potencjału. Elektron w tym modelu może przeskakiwać między najbliższymi węzłami w procesie kwantowego tunelowania. Model ten opisywany jest Hamiltonianem

$$H = \sum_{\langle n,m \rangle} t_{nm} (c_n^\dagger c_m + c_m^\dagger c_n) + \sum_n \epsilon_n c_n^\dagger c_n, \quad (3.2)$$

gdzie c_n^\dagger i c_n są kolejno operatorami kreacji i anihilacji elektronu w węźle n -tym, $\langle n, m \rangle$ jest zbiorem wszystkich par węzłów, które są swoimi najbliższymi sąsiadami, $t_{nm} = t_{mn}$ jest całką przeskoku między węzłami n i m , $\epsilon_n \in [-W, W]$ jest losowym potencjałem na węźle n -tym, z jednostajnego rozkładu na przedziale $[-W, W]$.

3.1.1 Wpływ wymiarowości

Zjawisko lokalizacji Andersona wykazuje silną zależność od wymiarowości układu. W tym podrozdziale zostaną przybliżone własności izolatora Andersona w zależności od wymiaru sieci.

Układ 1D

Dla układu jednowymiarowego wszystkie stany własne, niezależnie od energii, są eksponencjalnie zlokalizowane dla dowolnie małego nieporządku. Wynik ten został uzyskany i dowiedziony niedługo po zaproponowaniu zjawiska przez Andersona [65, 66]. W takich układach transport jest możliwy jedynie wtedy, gdy ich długość będzie mniejsza od długości lokalizacji ξ (gdy ogony eksponencjalnie zlokalizowanej funkcji falowej będą sięgały do granic układu), więc w jednowymiarowym, nieuporządkowanym, długim drucie metalicznym nie może istnieć przewodnictwo. Jest to o tyle ciekawe, że energie kinetyczne nośników mogą znacząco przekraczać lokalne fluktuacje energii potencjalnej.

Układ 2D

W przypadku dwuwymiarowym nie istnieje ścisły dowód występowania przemiany metal-izolator [67]. Teoria skalowania dostarcza jednak informacji na temat lokalizowalności układu. Jest to teoria, gdzie jedynym parametrem jest bezwymiarowa konduktancja $g(L)$ [68], zdefiniowana jako stosunek między czasem Heisenberga (najdłuższej, fizycznie istotnej skali czasowej, odwrotnie proporcjonalnej do średniej przerwy między kolejnymi poziomami energetycznymi) oraz czasem Thoulessa (skali czasowej, po której dynamika układu zaczyna być uniwersalna i zgodna z przewidywaniami teorii macierzy losowych) [6, 69–71]. Z definicji wynika, że dla przypadku $g < 1$ układ jest zlokalizowany, a w przeciwnym wypadku – zdelokalizowany [70]. Konduktancja jest tutaj uniwersalną funkcją liniowego rozmiaru układu L , gdzie uniwersalność oznacza fakt, że funkcja $\beta(g)$

$$\beta(g) = \frac{d \ln g}{d \ln L}, \quad (3.3)$$

opisująca jak szybko (z jaką eksponentą) rośnie konduktancja przy wzroście rozmiaru układu, zależy tylko od własności układu takich jak na przykład rozmiar L czy symetrie układu, a nie od konkretnej postaci Hamiltonianu [72]. Z równania 3.3 wynika, że dla $\beta < 0$ przewiduje się lokalizację stanów w granicy termodynamicznej (konduktancja zanika wykładniczo z rozmiarem układu). W przypadku małego nieporządku konduktancja zachowuje się zgodnie z prawem Ohma $\beta \simeq D - 2$ dla $g \rightarrow \infty$, gdzie D jest wymiarem układu, a w przypadku dużego nieporządku, dla eksponencjalnie zlokalizowanych stanów, konduktancja również zanika eksponencjalnie $\beta \sim \ln g$ [68].

Ponieważ $\beta(g, L)$ jest monotoniczna w funkcji g [68], to biorąc pod uwagę wartości graniczne $\lim_{g \rightarrow 0} \beta(g) \sim \log(g)$ oraz $\lim_{g \rightarrow \infty} \beta(g) \simeq D - 2$, otrzymujemy, że funkcja $\beta(g)$ jest ujemna dla dowolnej wartości g . Teoria skalowania przewiduje więc, że dla dowolnie małego nieporządku, wszystkie stany układu są zlokalizowane

w granicy termodynamicznej [68] – podobnie do przypadku 1D – β jest zawsze ujemna. Jednakże dla małych wartości nieporządku efekty rozmiarowe znacząco wpływają na własności układu [73]. Długość lokalizacji ξ skaluje się eksponencjalnie z odwrotnością amplitudy nieporządku [74–76], więc nawet makroskopowe układy mogą nie być zlokalizowane [75,77].

Układ 3D

W odróżnieniu od układów niskowymiarowych, w przypadku układów trójwymiarowych, może istnieć prawdziwa przemiana metal-izolator. Jest to kwantowa przemiana fazowa typu Andersona [78] – stany własne Hamiltonianu Andersona o energii wyższej niż wartość krytyczna E_c są rozciągle i pozwalają na dyfuzyjny transport, a stany o energii poniżej E_c są eksponencjalnie zlokalizowane, więc gdy energia Fermiego maleje i przekracza E_c wszystkie zajęte stany są zlokalizowane i układ staje się izolatorem. Energię E_c , wprowadzoną przez Nevilla Motta oddzielającą stany rozciągle od zlokalizowanych nazywamy progiem lokalizacji (ang. *mobility edge*) [79]. Podobnie gdy nieporządek wzrasta powyżej wartości krytycznej W_c , wartość energii krytycznej E_c przekracza energie wszystkich stanów własnych, czyniąc układ izolatorem dla dowolnej energii [80].

Dla modelu trójwymiarowego przemianę fazową przewiduje również wcześniej wspomniana teoria skalowania. Dla krytycznej wartości konduktancji (a co za tym idzie – nieporządku) funkcja β zmienia znak i miejsce w którym się zeruje definiuje punkt przemiany fazowej. Co więcej dla trójwymiarowego modelu Andersona uzyskano pierwsze numeryczne potwierdzenie teorii skalowania [74,75], wraz z krytycznym wykładnikiem, opisującym rozbieżność długości lokalizacji w miarę zbliżania się do punktu krytycznego [67]

$$\xi = |W - W_c|^{-\nu}, \quad (3.4)$$

z wartościami krytycznego nieporządku i krytycznego wykładnika [81] $W_c = 16.54$ and $\nu = 1.57$.

Poza 3D

W modelu Andersona dla wymiarów wyższych niż trójwymiarowy również dochodzi do przemiany metal-izolator, podobnie jak w przypadku modelu 3D. W tych układach, poniżej wartości krytycznej, ale dla szerokiego zakresu nieporządku, występuje niekoherentna dyfuzja [82]. Co ciekawe, w wysokowymiarowych układach przejście metal-izolator wykazuje szereg podobieństw ze zjawiskiem lokalizacji wielociałowej [12].

3.1.2 Realizacja w eksperymencie

Niedługo po wprowadzeniu lokalizacji Andersona rozpoczęto prace nad eksperymentalnym potwierdzeniem tego zjawiska. W 1969 roku Melvin Cutler i Nevill Mott zaobserwowali w siarczku ceru (z losowymi wakatami w miejscu ceru) zjawisko zmiany charakteru przewodnictwa, gdy energia Fermiego spada poniżej wartości krytycznej – stany znajdujące się poniżej tej wartości są zlokalizowane i przewodnictwo może odbywać się jedynie przez wywołane termicznie przeskoki [83].

W latach 80-tych badania transportu w domieszkowanym krzemie potwierdzały istnienie przejścia metal-izolator; jednakże krytyczne wykładniki otrzymywane eksperymentalnie były różne w zależności od eksperymentu [70]. Dużo później, w 2016 roku, potwierdzono zlokalizowane stany w pobliżu energii Fermiego w monokryształe $\text{Li}_x\text{Fe}_7\text{Se}_8$, które nie były wywołane oddziaływaniami Coulomba [84]. Analiza własności potwierdziła występowanie lokalizacji Andersona w tym kryształu.

Ponadto badania nad lokalizacją Andersona przeprowadzane są również w układach zimnych atomów [70, 85]. W układach jednowymiarowych zaobserwowano lokalizację Andersona kondensatu Bosego-Einsteina atomów rubidu-87 w falowodzie [86], a także dla kondensatu atomów potasu ^{39}K na jednowymiarowej sieci [87]. Nieco później dla układów dwuwymiarowych zaobserwowano eksponencjalną lokalizację przy pomiarze transportu dla zimnych atomów z rezerwuaru przez nieuporządkowany kanał [88].

Zjawisko lokalizacji Andersona zachodzi w układach, w których można zaniedbać oddziaływania wielociałowe. To, czy i kiedy oddziaływania te można zaniedbać, nie jest oczywiste i budzi wątpliwości oraz kontrowersje, a nawet małe oddziaływania mogą uniemożliwić obserwację lokalizacji [89, 90]. Z tego powodu lokalizację Andersona bada się w układach fotonowych, ponieważ fotony nie oddziałują między sobą. Dowody na zjawisko lokalizacji Andersona prezentowano dla mikrofali rozpraszanych w 2D na losowo rozmieszczonych prętach [91] oraz dla silnego rozpraszania światła w 3D na proszkach półprzewodnikowych [92]. Ważne są również wyniki dla sieci fonicznych z losowymi fluktuacjami – lokalizacja została wykryta w takich układach zarówno dla sieci dwuwymiarowej [93], jak i sieci jednowymiarowej [94].

3.2 Lokalizacja wielociałowa

Po odkryciu przez Andersona zjawiska lokalizacji w nieoddziałujących nieuporządkowanych układach, naturalnie pojawiło się pytanie, czy lokalizacja może istnieć, jeśli do modelu dodamy oddziaływanie. Pierwszy krok w kierunku odpowiedzi na to pytanie został zrobiony w 1980 roku w pracy Fleishmana i Andersona [95]. Perturbacyjnie (do drugiego rzędu rachunku perturbacyjnego) pokazali oni, że słabe,

bliskozasięgowe oddziaływanie nie prowadzi do natychmiastowego zniszczenia lokalizacji, a spowodowane oddziaływaniem „poszerzenia” jednocząstkowych stanów własnych izolatora Andersona znika w granicy dużych nieporządków [25].

Lokalizację w oddziaływających układach badano również podejściem nieperturbacyjnym. W 1997 roku Altshuler i in. badali ewolucję kropki kwantowej – 0-wymiarowego, przewodzącego układu z oddziaływaniami między elektronami, który transformowali do jednocząstkowego, nieuporządkowanego układu na grafie niezawierającym pętli [96]. Dla tego układu istnieją analityczne rozwiązania dla których istnieje lokalizacja stanów wielocząstkowych w przestrzeni Focka [25, 97]. Stany wzbudzone poniżej progu lokalizacji, pomimo oddziaływania, pozostają blisko jednocząstkowych wzbudzeń [25].

Mimo że podobne rozważania były przeprowadzane w wielu innych pracach (m.in. [98, 99]), przełom nastąpił w dopiero połowie pierwszego dziesięciolecia XXI wieku, kiedy Gornyi i in. [3] oraz Basko i in. [4], odpowiednio w latach 2005 i 2006, zaprezentowali perturbacyjne argumenty na istnienie *fazy zlokalizowanej*, a więc sugerujące, że oddziałujące elektrony w statycznym nieporządku doświadczają przejścia metal-izolator [5]. Przeanalizowali oni stabilność izolatora Andersona pod względem wpływu krótkozasięgowych oddziaływań. Stosując przybliżenie Borna i analizując poszerzenie zlokalizowanych jednocząstkowych stanów własnych oraz stosując analogię do problemu lokalizacji na drzewie Cayley’a [100], uzyskali skończoną temperaturę przejścia T_c poniżej której przewodnictwo elektryczne zanika. Wzrost temperatury powoduje otwarcie dodatkowych kanałów transportu, co sprawia, że nawet słabe oddziaływania mogą być wystarczające do zdelokalizowania systemu [5]. Przeprowadzona analiza perturbacyjna nie jest ścisła – aby wynik był możliwy do uzyskania, trzeba było pominąć niektóre diagramy (m.in. te zawierające pętle) oraz zastosować kolejne przybliżenia, takie jak pominięcie części rzeczywistych energii własnych [5]. Dowiedziono, że takie przybliżenia w przypadku modelu Andersona prowadzą do zawyżonej krytycznej wartości nieporządku [5, 101], jednakże taka zależność dla wielocząstkowego układu nie została potwierdzona [5]. Mimo wspomnianych nieścisłości, wyniki te zostały entuzjastycznie przyjęte w środowisku i dały początek intensywnym badaniom nad **lokalizacją wielociałową** (ang. *many-body localization*, MBL).

W kolejnych latach prace nad MBL skupiały się nad badaniem jednowymiarowych układów z nieporządkiem. W szczególności rozważane były modele:

1. Model bezspinowych fermionów z przeskokami między najbliższymi sąsiadami, oddziaływaniem gęstość-gęstość między najbliższymi sąsiadami i losowymi potencjałami na węzłach (w dalszej części pracy zwany krótko **modelem**

fermionowym)

$$H = t \sum_j (c_j^\dagger c_{j+1} + \text{H.c.}) + V \sum_j n_j n_{j+1} + \sum_j \epsilon_j n_j, \quad (3.5)$$

gdzie c_j^\dagger i c_j są kolejno operatorami kreacji i anihilacji elektronu w węźle j -tym, n_j jest operatorem gęstości obsadzenia na węźle j -tym, $\epsilon_j \in [-W, W]$ jest losowym potencjałem na węźle j -tym, z jednostajnego rozkładu na przedziale $[-W, W]$.

2. Model Heisenberga XXZ z losowym polem magnetycznym (w dalszej części pracy zwany krótko **modelem spinowym**)

$$H = J \sum_j (S_j^x S_{j+1}^x + S_j^y S_{j+1}^y + \Delta S_j^z S_{j+1}^z) + \sum_j h_j S_j^z, \quad (3.6)$$

gdzie $S_j^\alpha = \sigma_i^\alpha / 2$ ($\alpha = x, y, z$) są standardowymi operatorami spinowymi dla spinu $1/2$ (σ_i^α są macierzami Pauliego), $h_j \in [-W, W]$ są losowymi lokalnymi polami magnetycznymi z rozkładu analogicznego jak w przypadku modelu fermionowego.

Oba wyżej wymienione modele są równoważne w granicy termodynamicznej poprzez transformację Jordana-Wignera (przypadek dla 1D) [102]

$$c_j = \left(\prod_{k < j} -\sigma_k^z \right) (\sigma_j^x - i\sigma_j^y) / 2 = \left(\prod_{k < j} -2S_k^z \right) (S_j^x - iS_j^y). \quad (3.7)$$

Zgodnie z równaniem 3.7 otrzymujemy mapowania

$$S_j^x S_{j+1}^x + S_j^y S_{j+1}^y \rightarrow \frac{1}{2} (c_j^\dagger c_{j+1} + c_{j+1}^\dagger c_j) \quad (3.8)$$

oraz

$$S_j^z S_{j+1}^z \rightarrow (n_j - 1/2)(n_{j+1} - 1/2). \quad (3.9)$$

Badania numeryczne nad powyższymi modelami w kontekście MBL zapoczątkowała praca z 2007 roku, kiedy Oganiesyan i Huse badali model fermionowy 3.5. Analizując jego właściwości spektralne (wprowadzając wspomniane w podrozdziale 2.4 *gap ratio*), pokazali, że w skończonych układach, przejście do reżimu zlokalizowanego przy skończonej sile nieporządku, zachodzi nawet w nieskończonej temperaturze [2]. Zauważyli oni również, że niemożliwe w tym modelu jest zastosowanie prostego jednoparametrowego skalowania rozmiarowego, ze względu na dryft granicy lokalizacji (minimalnej wartości siły nieporządku, dla której numeryczne badania wskazują na lokalizację) w kierunku większych wartości wraz ze wzrostem rozmiaru układu.

Model 3.6 również był intensywnie badany. Žnidarič, Prosen i Prelovšek w 2008 badali jego dynamikę metodą tDMRG: ewolucję entropii splątania oraz ewolucję funkcji korelacji spinowej. Pokazali oni powolny (logarytmiczny) wzrost entropii splątania w czasie oraz wykazali eksponencjalną lokalizację dla wystarczająco dużego nieporządku [103]. Pal i Huse dwa lata później badali, jak sternalizowane są stany własne modelu 3.6, poprzez wyznaczenie wartości oczekiwanych operatorów spinu w stanach własnych i sprawdzenie ich zgodności z ETH (ansatz z równania 2.10). Otrzymane wyniki zgadzały się z rezultatami z poprzednich prac – nawet w nieskończonej temperaturze układ jest zlokalizowany przy wystarczająco silnym nieporządku.

Mimo braku jednoznacznego dowodu na istnienie przejścia metal-izolator w nieuporządkowanych, oddziałujących łańcuchach kwantowych, to wczesne, obiecujące rezultaty były interpretowane jako wskaźniki istnienia fazy zlokalizowanej. MBL został najbardziej obiecującym generycznym modelem, który wykazywał nieergodyczność w szerokim przedziale parametrów. Spowodowało to jego intensywne badania w kolejnych latach, włącznie z pracami będącymi częścią tej rozprawy.

3.2.1 Własności lokalizacji wielociałowej

W tej części omówione zostaną krótko najważniejsze własności modeli wykazujących MBL. Szczególną uwagą zostaną objęte zagadnienia statystyki poziomów oraz występowania lokalnych całek ruchu, które są istotne z punktu widzenia prac będących częścią tej rozprawy.

Statystyka poziomów

Jak wspomniano w podrozdziale 2.4, analiza *gap ratio* r pozwala w prosty sposób sprawdzić ergodyczność układu. Modele wykazujące lokalizację wielociałową, podobnie jak inne modele nieergodyczne, charakteryzują się Poissonowską statystyką poziomów.

Jest to wielkość stosunkowo mało wymagająca do policzenia – potrzebny jest jedynie fragment spektrum o najwyższej gęstości stanów. Często (jak na przykład w przypadku [104] oraz prac będących częścią tej rozprawy) bierze się środkową 1/3 spektrum, ale wiele prac analizuje także dużo mniejsze przedziały (poniżej 1% spektrum w przypadku [105]). Znacząco przyspiesza to obliczenia i pozwala badać większe układy, ponieważ stosowane są metody pozwalające wyznaczyć pojedyncze poziomy w dowolnej części spektrum takie jak metoda *shift-invert* [106] lub POLFED (ang. *Polynomially Filtered Exact Diagonalization*) [105].

Ponieważ badanie statystyki poziomów jest mało wymagające, jak również dostarcza informacji na temat ergodyczności układów, *gap ratio* jest wielkością szeroko badaną w kontekście lokalizacji wielociałowej [2, 104, 107–113].

Należy wspomnieć, że statystykę poziomów można badać jedynie dla układów z rozwiązanymi globalnymi symetriami. Dla modelu ergodycznego z globalnymi symetriami, spektrum jest superpozycją niezależnych spektrów GOE/GUE, co skutkuje Poissonowską statystyką poziomów w granicy dużej liczby sektorów symetrii [5, 114]. Uniemożliwia to zastosowanie w takiej sytuacji statystyki poziomów jako indykatora ergodyczności. Z tego powodu oba modele MBL badane są w największym sektorze symetrii: $n = L/2$ cząstek dla modelu fermionowego 3.5 oraz $S^z = 0$ w przypadku modelu spinowego 3.6.

Wczesne badania statystyki poziomów dla modeli MBL wykazały brak wyraźnego punktu przejścia: punkty przecięcia krzywych $\bar{r}(W)$ dla kolejnych wartości rozmiarów układu przesuwają się w stronę wyższych wartości nieporządku wraz ze wzrostem rozmiarów. Dryft ten spowalnia wraz ze zwiększającym się rozmiarem układu, co interpretowane było jako indykator przemiany fazowej w skończonym nieporządku [2], a późniejsze badania to potwierdzały [104].

Z tych samych krzywych $\bar{r}(W)$ można wyciągnąć również przeciwne wnioski. W pracy z 2020 roku Šuntajs i in. pokazali, że gdy skupić się na obszarze blisko reżimu ergodycznego (dla wartości r blisko r_{GOE}), to wyniki przeskalowane $\bar{r}(W) \rightarrow \bar{r}(W/L)$ pokrywają się [115]. Sugeruje to, że wartość nieporządku, dla której następuje odejście od wartości odpowiadającej reżimowi ergodycznemu, skaluje się liniowo z rozmiarem układu. Innymi słowy wartość \bar{r} pozostaje stała, gdy nieporządek W oraz rozmiar układu L zwiększa się z taką samą szybkością [5]. Ci sami autorzy, korzystając z przejścia BKT (Berezinski, Kosterlitz, Thouless), które prowadzi do lepszego kolapsu wyników, otrzymali dużo niższą wartość granicy lokalizacji ($W^* \approx 2$ dla $L \approx 20$) niż otrzymano wcześniej ($W^* \approx 3.4 - 3.7$) [8]. Oznaczałoby to, że w pobliżu przejścia układ jest niemal ergodyczny, co dodatkowo motywuje badanie własności modeli przy słabych nieporządkach.

Oba podejścia, mimo że zbudowane na tych samych danych dla tych samych modeli, nie mogą być równocześnie prawdziwe, ponieważ prowadzą do sprzecznych wniosków. Sierant i in. [105] w celu ilościowego opisu obu tych podejść wprowadzili dwie charakterystyczne wielkości nieporządku:

1. $W_T(L)$ będąca wartością nieporządku, dla której $\bar{r}(W)$ odchodzi od wartości odpowiadającej reżimowi ergodycznemu. Ścisłej mówiąc, jest to wartość nieporządku dla której $\bar{r}(W_T) = r_{GOE} - \Delta r$, gdzie Δr jest niewielką stałą (nie zależy od L);

2. $W^*(L)$ będąca punktem przecięcia krzywych $\bar{r}(W)$ dla różnych rozmiarów układu, konkretnie dla $L + \Delta L$ oraz $L - \Delta L$, gdzie $\Delta L \ll L$.

Otrzymali oni następujące skalowania charakterystycznych nieporządków z rozmiarem układu

$$W_T(L) \sim L \quad (3.10)$$

oraz

$$W^*(L) \sim W_C - \text{const}/L. \quad (3.11)$$

Ponieważ, jak wspomniano wcześniej, oba te skalowania nie mogą być poprawne w granicy termodynamicznej możliwe są 3 sytuacje (za [5]):

1. Skalowanie 3.10 utrzymuje się dla większych rozmiarów układu, punkty przecięcia $W^*(L)$ zmieniają swoje skalowanie, dostosowując się do wartości dyktowanej przez $W_T(L)$, w wyniku czego w granicy termodynamicznej oba dążą do nieskończoności. W tej sytuacji nie może istnieć faza zlokalizowana dla skończonego nieporządku.
2. Skalowanie 3.11 utrzymuje się dla większych rozmiarów układu, oba zbiegają w granicy termodynamicznej do skończonej wartości

$$W_T(L \rightarrow \infty) = W^*(L \rightarrow \infty) = W_C, \quad (3.12)$$

gdzie wstępnie oszacowano $W_C \approx 5.7$ dla modelu spinowego 3.6 [105].

3. Żadne z powyższych skalowań, ani ich niewielkie modyfikacje nie utrzymują się w granicy termodynamicznej.

Ogólna wiedza oraz możliwości numeryczne niestety nie pozwalają ani na potwierdzenie, ani podważenie żadnego z powyższych scenariuszy.

Lokalne całki ruchu

Istnienie (kwazi-)lokalnych całek ruchu w modelach z lokalizacją wielociałową (zwanymi l-bitami) zostało zaproponowane jako wyjaśnienie powolnej dynamiki [5, 25, 116, 117]. Lokalne całki ruchu (ang. *local integrals of motion*) to lokalne obserwable, których wartości oczekiwane są zachowane w trakcie ewolucji układu. Innymi słowy, informacje o stanie początkowym są w nich zachowane i możliwe do uzyskania na drodze lokalnego pomiaru.

Omawiane całki ruchu w MBL są nazywane *kwazilokalnymi* ze względu na to, że są eksponencjalnie zlokalizowane. Oznacza to, że zawierają dalekozasięgowe czynniki, jednak współczynniki przy nich maleją eksponencjalnie w miarę zwiększania

się dystansu. Przykładowo operator \hat{L}

$$\hat{L} = \sum_j c_j^\dagger c_{j+1} + \text{H.c.} \quad (3.13)$$

jest lokalny, ponieważ jest sumą operatorów działających na skończonej, nieskalującej się z rozmiarem układu, odległości w przestrzeni, a operator \hat{K}

$$\hat{K} = \sum_{x>1} \sum_j e^{-x} c_j^\dagger c_{j+x} + \text{H.c.} \quad (3.14)$$

jest kwazilokalny, ponieważ zawiera dalekozasięgowe człony, malejące eksponencjalnie z odległością.

W celu uproszczenia nomenklatury kwazilokalność będzie tożsama z lokalnością i tak nazywana w dalszej części pracy, chyba że zostanie wyraźnie zaznaczone inaczej.

W przypadku izolatora Andersona 3.2, czyli modelu fermionowego 3.5 przy braku oddziaływania $V = 0$, lokalne całki ruchu są operatorami liczby cząstek w stanach własnych. Hamiltonian 3.2 możemy przedstawić w postaci

$$H = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha c_\alpha^\dagger c_\alpha, \quad (3.15)$$

gdzie ε_α są energiami własnymi stanu zlokalizowanego przy węźle α oraz c_α^\dagger jest operatorem kreacji cząstki w stanie własnym o energii ε_α . Operator c_α^\dagger można zapisać w postaci

$$c_\alpha^\dagger = \sum_j u_\alpha(j) c_j^\dagger, \quad (3.16)$$

gdzie $u_\alpha(j) = \langle j | \alpha \rangle$. Wobec tego, operator liczby cząstek w stanie własnym $|\alpha\rangle$ możemy zapisać w następującej formie

$$n_\alpha = c_\alpha^\dagger c_\alpha = \sum_{i,j} u_\alpha^*(i) u_\alpha(j) c_i^\dagger c_j, \quad (3.17)$$

gdzie n_α jest operatorem liczby cząstek w stanie własnym izolatora Andersona, zlokalizowanym w węźle α , u_α jest stanem własnym zapisanym w bazie rzeczywistej.

Oczywiście, w przypadku niezerowego oddziaływania obsadzenia stanów Andersona 3.17 przestają być całkami ruchu (nie komutują z Hamiltonianem). Dla modelu oddziałującego definiuje się lokalne całki ruchu I_α , jako obsadzenia stanów Andersona z poprawkami perturbacyjnymi [116, 118]

$$I_\alpha = n_\alpha + \sum_{n \geq 1} A_\alpha^{(n)} \hat{O}_i^{(n)} \quad (3.18)$$

gdzie $A_\alpha^{(n)}$ są współczynnikami malejącymi eksponencjalnie z n , a $\hat{O}_i^{(n)}$ składa się z maksymalnie $(2n + 1)$ -ciałowych operatorów działających na węzłach odległych o dystans równy maksymalnie n od α . Powyższa forma rozwinięcia oraz eksponencjalna lokalizacja $A_\alpha^{(n)}$ implikują lokalność I_α . Skonstruowanie lokalnej unitarnej transformacji, która przekształci n_i w I_α , nie jest jednak proste, a obecnie znane metody konstrukcji są albo przybliżone, albo aplikowalne jedynie dla małych układów [5, 119].

W przypadku istnienia takiej transformacji, a co za tym idzie, istnienia lokalnych całek ruchu w układach z lokalizacją wielociałową, Hamiltonian układu mógłby zostać przedstawiony w następującej formie [118]

$$H = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} I_{\alpha} + \sum_{\alpha, \beta} J_{\alpha, \beta} I_{\alpha} I_{\beta} + \sum_{\alpha, \beta, \gamma} J_{\alpha, \beta, \gamma} I_{\alpha} I_{\beta} I_{\gamma} + \dots, \quad (3.19)$$

gdzie $J_{\alpha, \beta, \gamma, \dots}$ maleje eksponencjalnie wraz z maksymalnym dystansem między indeksami. Wobec tego układ byłby jednoznacznie i całkowicie opisywany przez zbiór $\{I_{\alpha}\}$, a co za tym idzie, długoczasowe wartości średnie obserwabli byłyby od nich zależne. Implikowałoby to nieergodyczność układu oraz istnienie fazy zlokalizowanej.

Należy także wspomnieć o analitycznej pracy Johna Imbriego [120]. Dla dość specyficznego układu – modelu Isinga z poprzecznym polem, w którym wszystkie parametry są zmiennymi losowymi, skonstruowano iteracyjnie transformację unitarną, która transformuje operatory n_{α} w I_{α} . Potwierdzenie działania tej metody wymaga dowiedzenia zbieżności procedury i lokalności uzyskanych operatorów. Jak wskazano w pracy przeglądowej [5], ścisłość tego rozwiązania wymaga wciąż sprawdzenia.

Wolna dynamika

W miarę zwiększania nieporządku w układzie szybkość dynamiki systemu znacząco spada. Jednym ze sposobów badania dynamiki jest analiza czasowej zależności funkcji korelacji [15, 40, 41, 104, 121–123] (na przykład funkcji autokorelacji gęstości obsadzeń $C(t)$ z równania 2.20). W reżimie ergodycznym obserwuje się dynamikę dyfuzyjną i zanik wartości funkcji autokorelacji do jej długoczasowej wartości oczekiwanej zachodzi jak $C(t) \propto t^{-1/z}$ z wykładnikiem $z = 2$ [15, 25].

W miarę wzrostu nieporządku i zbliżania się układu do reżimu zlokalizowanego, ewolucja zwalnia i przyjmuje charakter subdyfuzyjny. Zachowuje swój potęgowy charakter, jednakże z mniejszym (w wartości absolutnej) wykładnikiem ($z > 2$). Przypuszcza się, że taka dynamika podyktowana jest istnieniem tzw. regionów Griffithsa – rzadkich regionów silnie izolujących (z silniejszym nieporządkiem), które mogą być znaczącym ograniczeniem dynamiki (*bottleneck* dla transportu w układach

jednowymiarowych) [124, 125]. Ponadto, wykładnik z dla wartości nieporządku poniżej spodziewanego przejścia, wykazuje zależność rozmiarową – jego wartość maleje wraz ze wzrostem układu [7] – co utrudnia sklasyfikowanie dynamiki układu dla nieporządków w pobliżu przejścia [5].

Warto także zwrócić uwagę, że jednoznaczna identyfikacja subdyfuzji w pobliżu przejścia nie jest łatwym zadaniem, ponieważ wymaga dużych czasów ewolucji i rozmiarów układów [5, 12, 126]. Możliwe są jednak sposoby skalowania i badania uniwersalnych własności punktu przejścia przy czasach ewolucji dużo niższych niż czas Heisenberga [127].

Niedawne obliczenia analityczne przeprowadzone przez Wojciecha De Roeck i in. [128] pokazały, że dla nieuporządkowanego modelu Isinga z poprzecznym polem w reżimie dużych nieporządków nie może istnieć dynamika dyfuzyjna. Jest to szczególnie ważna praca w kontekście wyników uzyskanych w tej rozprawie, które sugerują, że anomalnych własności silnie nieuporządkowanych układów nie można wyjaśnić na gruncie obliczeń numerycznych (lub jest to bardzo trudne). Rozwiązanie nie wyklucza jednak występowania subdyfuzji, więc nie jest jednoznacznym potwierdzeniem istnienia lokalizacji wielociałowej w granicy termodynamicznej. Należy również zwrócić uwagę, że artykuł ten w momencie pisania rozprawy jest wciąż w recenzji i oczekuje na potwierdzenie poprawności oraz ścisłości dowodu.

Entropia splątania

Inną ważną własnością charakterystyczną dla MBL oraz szeroko badaną w wielu pracach [103, 105, 108, 129–132] jest entropia splątania. Jak wspomniano w podrozdziale 2.4, w przypadku jednowymiarowych układów w których występuje lokalizacja, entropia splątania przyjmuje wartość stałą (rozmiar brzegu) i nie zależy od liniowego rozmiaru układu [116, 133]. Entropia splątania w przypadku ergodycznym jest natomiast ekstensywna (zmienia się liniowo wraz z rozmiarem układu) [36]. Żeby operować na ograniczonych wielkościach, przeskalowuje się entropię splątania (patrz równanie 2.17) przez jej wartość w reżimie ergodycznym

$$s_E = S_E / S_{RMT}, \quad (3.20)$$

gdzie S_E jest zdefiniowana jak w równaniu 2.17, a S_{RMT} przyjmuje wartość zbliżoną do wartości maksymalnej (z równania 2.18) z poprawkami rzędu $\mathcal{O}(1)$ [134, 135], wyliczoną w formalizmie macierzy losowych. Wartość s_E przyjmuje wartości bliskie 1 dla słabych nieporządków (przy stosunkowo dużych układach), a dla silnych nieporządków przyjmuje wartości małe (jeśli lokalizacja utrzymuje się w granicy

termodynamicznej, to $s_E \rightarrow 0$ przy $L \rightarrow \infty$ dla wartości nieporządku powyżej granicy lokalizacji).

Krzywe $\bar{s}_E(W)$ (uśrednione po realizacjach nieporządku) mają bardzo podobny przebieg do krzywych $\bar{r}(W)$ i posiadają analogiczne własności (skalowanie punktu przecięcia, skalowanie punktu odejścia od wartości ergodycznej), co zostało pokazane w pracach cytowanych w sekcji dotyczącej statystyki poziomów [8, 105].

W kontekście lokalizacji wielociałowej badana jest również dynamika entropii splątania. Dla nieporządków powyżej granicy lokalizacji zaobserwowano powolny, logarytmiczny wzrost entropii splątania w czasie [103, 129, 136, 137]. Jest to wzrost zdecydowanie wolniejszy niż w przypadku układów, gdzie entropia splątania rośnie liniowo w czasie [138]. Dla układów w pobliżu granicy lokalizacji, obserwuje się zaś potęgowy wzrost entropii splątania w czasie z wykładnikiem $0 < \gamma < 1$.

Należy zwrócić uwagę, że wzrost logarytmiczny dla osiągalnych czasów ewolucji może być łatwo pomyłony ze wzrostem potęgowym z bardzo małym wykładnikiem. Niedawne rezultaty [5, 15] pokazują, że ewolucja entropii splątania głęboko w reżimie zlokalizowanym jest lepiej opisywana (na większym przedziale czasów) wzrostem potęgowym niż wzrostem logarytmicznym. Niestety, dostępne numerycznie czasy ewolucji nie pozwalają jednoznacznie stwierdzić asymptotyki wzrostu entropii splątania dla dużych czasów.

3.2.2 Lokalizacja wielociałowa w modelach bez nieporządku

Innym mechanizmem prowadzącym do powstania dynamiki nieergodycznej, blisko spokrewnionym z lokalizacją wielociałową, jest tzw. lokalizacja wielociałowa Starka. Zjawisko to pojawia się w układach, w których cząstki poddane są nie losowemu, lecz deterministycznemu potencjałowi liniowemu (zależącemu liniowo od współrzędnych przestrzennych). W przypadku jednocząstkowym prowadzi to do powstania przestrzennie zlokalizowanych stanów (lokalizacja Wanniera-Starka) [139]. Dla dużych potencjałów nieergodyczność może być wynikiem fragmentacji przestrzeni Hilberta, spowodowanej emergentnym zachowaniem momentu dipolowego w układzie [140–143]. Przy dodaniu do liniowego potencjału nieliniowej modyfikacji [144, 145] lub niewielkiego nieporządku [145] układ taki może wykazywać cechy podobne do lokalizacji wielociałowej: zanik transportu, zachowanie pamięci o stanie początkowym oraz powolną dynamikę entropii splątania.

3.2.3 Realizacja w eksperymencie

Podobnie jak w przypadku lokalizacji Andersona, lokalizacja wielociałowa nie jest łatwa do obserwacji w eksperymencie. Zjawisko lokalizacji wielociałowej wymaga

całkowitej izolacji od otoczenia, trudno jest ją zaobserwować w „standardowych” materiałach, ponieważ prawie zawsze są one w kontakcie z termicznym rezerwuarem w czasie eksperymentu [25]. Taką izolację (w przybliżeniu) dają układy nadprzewodzących kubitów, ultrazimnych atomów oraz pułapkowanych jonów i właśnie w takich układach od ponad dekady obserwuje się typowe własności lokalizacji wielociałowej takie jak m. in. logarytmiczny wzrost w entropii splątania [146, 147] czy Poissonowską statystykę poziomów energetycznych [148]. Niezależnie od wniosków formułowanych w omawianych niżej pracach należy pamiętać, że eksperymenty prowadzone są dla długich, lecz skończonych czasów ewolucji, a rzeczywiste układy nie są dokładnie opisywane modelami używanymi w pracach teoretycznych. Z tego powodu jest niezwykle trudno odróżnić brak termalizacji od bardzo powolnej termalizacji. Wyniki eksperymentalne są niezmiernie ważne, jednak interpretacja wymaga krytycznego spojrzenia.

Ultrazimne atomy

W układach ultrazimnych atomów po raz pierwszy eksperymentalnie udało się zaobserwować lokalizację wielociałową [42]. W eksperymencie z 2015 roku Michael Schreiber i in. badali jednowymiarowy model Fermiego-Hubbarda (właściwie model kwazi-1D, ponieważ realizowany był na trójwymiarowej sieci z silnym potencjałem ograniczającym ruch w kierunkach innych niż wybrany). Rozpoczynając ewolucję od nierównowagowego stanu, w którym atomy obsadzały parzyste węzły sieci, zbadali ewolucję obsadzeń. Dokładniej analizowali wielkość zwaną *imbalance*, która jest miarą niejednorodności obsadzeń. Badania przeprowadzono dla różnych wartości nieporządku oraz oddziaływań, co pozwoliło wykazać przejście między zachowaniem ergodycznym a lokalizacją wielociałową. Kolejne badania pozwoliły wydłużyć czas ewolucji [44], a także pokazać, że dodanie możliwości przeskakiwania cząstek między jednowymiarowymi łańcuchami powoduje znacznie łatwiejszą termalizację [43, 149].

Prowadzono również badania w układach bozonowych, gdzie udało się po raz pierwszy zaobserwować lokalizację wielociałową w dwóch wymiarach [60], pokazać logarytmiczny wzrost entropii splątania [147], a także zbadać wielopunktowe korelacje kwantowe [62].

Pułapkowane jony

Symulatory kwantowe oparte na pułapkowanych jonach stanowią podejście komplementarne. Smith i in. [61] zrealizowali łańcuch spinów $1/2$ złożony z 10 jonów z programowalnymi, dalekozasięgowymi sprzężeniami oraz programowalnym nieporządkiem. Zmierzyli zarówno dynamikę, jak i własności spektralne, obserwując długotrwałą magnetyzację, powolny wzrost splątania oraz przejście od statystyki

poziomów energetycznych typu Wignera–Dysona do statystyki Poissona wraz ze wzrostem nieporządku. Eksperyment ten podkreślił wszechstronność platform jonowych, w których nieporządek i oddziaływania można dostrajać z wysoką precyzją, choć rozmiary dostępnych układów pozostają na razie umiarkowane.

Nadprzewodzące kubity

Tablice nadprzewodzących kubitów zapewniają szybką i programowalną platformę do badania zarówno aspektów widmowych, jak i dynamicznych MBL. Roushan i in. [148] wykorzystali łańcuch dziewięciu kubitów do bezpośredniego pomiaru statystyki poziomów energetycznych, obserwując oczekiwane przejście od reżimu ergodycznego do zlokalizowanego. Xu i in. [146] poszli dalej, śledząc dynamikę w procesorze dziesięciokubitowym i bezpośrednio mierząc logarytmiczny wzrost splątania wraz z utrzymującą się lokalną nierównowagą. Niedawno urządzenia wielkoskalowe rozszerzyły te badania – Li i in. [150] zaprezentowali eksperyment z udziałem do 70 kubitów w dwóch wymiarach, stwierdzając, że sygnatury lokalizacji słabną wraz ze wzrostem rozmiaru układu.

Część II

Rezultaty

ROZDZIAŁ

4

Phenomenology of Spectral Functions in Disordered Spin Chains at Infinite Temperature

Jak wspomniano w rozdziale 3, MBL posiada wiele interesujących własności, jak na przykład bardzo powolną dynamikę w mierzalnych skalach czasowych. Jednakże wciąż brak prostej i uniwersalnej teorii, która mogłaby taką powolną dynamikę wyjaśnić w szerokim zakresie wartości nieporządku.

W pracy prezentowanej w tym rozdziale [A1], będącej pierwszą z oryginalnych prac wchodzących w skład doktoratu, proponujemy fenomenologiczną koncepcję, która może wyjaśniać takie własności MBL.

Rozpatrujemy model spinowy (jednowymiarowy, nieuporządkowany model Heisenberga), zdefiniowany jak w równaniu 3.6, a główną badaną w pracy wielkością jest *spin imbalance* $A = (2/\sqrt{L}) \sum_j (-1)^j S_j^z$ – wielkość o tyle istotna, że możliwa do zmierzenia w eksperymencie [42, 44] – oraz jej funkcja spektralna $S(\omega)$ (transformata Fouriera funkcji autokorelacji czasowej)

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t - |t|0^+} \langle e^{iHt} A e^{-iHt} A \rangle, \quad (4.1)$$

gdzie H jest Hamiltonianem układu, i jej całka $I(\omega)$

$$I(\omega) = \int_{-\omega}^{\omega} d\omega' S(\omega') = \frac{1}{\mathcal{D}} \sum_{m,n=1}^{\mathcal{D}} \theta(\omega - |E_m - E_n|) A_{mn}^2, \quad (4.2)$$

gdzie \mathcal{D} jest rozmiarem przestrzeni Hilberta, dla której wykonano obliczenia numeryczne.

Izolator Andersona (będący granicznym przypadkiem badanego modelu – dla braku oddziaływań) posiada ekstensywną liczbę lokalnych całek ruchu – lokalnych

operatorów $\{Q_\alpha\}$, których wartości oczekiwane pozostają niezmiennie w czasie ewolucji, w tym przypadku – obsadzeń stanów własnych modelu. Istnienie takich wielkości powoduje specyficzną formę dynamiki dla izolatora Andersona – scałkowana funkcja spektralna jest stała w reżimie małych częstości $I_0(\omega \ll J) \simeq \text{const}$, co implikuje postać funkcji spektralnej w tym reżimie jako sumy funkcji delta Diraca $S_{M,0}(\omega \ll J) = \sum_\alpha D_\alpha \delta(\omega)$, gdzie $\{D_\alpha\}$ są projekcjami operatora A na odpowiednie całki ruchu $\{Q_\alpha\}$ [151, 152].

Podstawą naszej koncepcji jest założenie, że pewien podzbiór całek ruchu (lub wszystkie całki) zostaje zdelokalizowany, czyli zyskuje skończone czasy relaksacji pod wpływem oddziaływań. Innymi słowy, funkcja autokorelacji czasowej $\langle Q_\alpha(t)Q_\alpha \rangle$ zanika z czasem relaksacji τ_α . Delokalizacja ta manifestuje się jako poszerzenie $\delta(\omega)$ w funkcji spektralnej (patrz równanie 4.3). W pracy zastosowano poszerzenie Lorentzowskie ($\delta(\omega) \rightarrow \frac{1}{\pi} \frac{\tau_\alpha}{(\omega\tau_\alpha)^2 + 1}$), które odpowiada eksponencjalnemu zanikowi funkcji autokorelacji w czasie. Rodzaj poszerzenia nie ma jednak jakościowego wpływu na rezultaty, więc w przypadku innych rodzajów relaksacji wnioski pozostaną niezmiennie.

Wykonana analiza projekcji D_α oraz czasów relaksacji τ_α wykazała, że znaczna część projekcji D_α jest niezerowa. Czasy relaksacji posiadają potęgowy rozkład $f(\tau_\alpha) \propto 1/\tau_\alpha^\mu$, gdzie $\mu < 2$, a wartości τ_α różnią się o kilka rzędów wielkości. Co więcej, D_α i τ_α są ze sobą słabo skorelowane. Pozwala to na zaproponowanie poniższej fenomenologicznej formy funkcji spektralnej w reżimie niskich częstości

$$S_M(\omega) = \frac{\bar{D}_0}{\pi} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} \frac{d\tau}{\tau^{\mu-1}} \frac{1}{(\omega\tau)^2 + 1}, \quad (4.3)$$

gdzie τ_{\min} i τ_{\max} są skrajnymi wartościami w rozkładzie czasów relaksacji, \bar{D}_0 jest sumą wag spektralnych pochodzących od zdelokalizowanych lokalnych całek ruchu izolatora Andersona [151].

Zaproponowana forma funkcji spektralnej odtwarza anomalne zachowanie funkcji spektralnych $S(\omega) \sim 1/\omega$, występujące w modelach z MBL [10, 40, 153]. Takie skalowanie jest bezpośrednią konsekwencją szerokiego, potęgowego rozkładu czasów relaksacji τ_α .

$I_M(\omega)$ wyznaczone z równania 4.3 odtwarza wyniki numeryczne otrzymane dla skończonego układu opisywanego Hamiltonianem MBL (patrz równanie 4.2) dla wartości: w reżimie ergodycznym ($W = 1, 2$), głęboko w reżimie zlokalizowanym ($W = 5, 6$), a także dla wartości pośrednich. Co ważne, wyniki są poprawne zarówno dla pojedynczych realizacji nieporządku, jak i dla wyników uśrednionych.

Otrzymane rezultaty pokazują, że samo założenie „bliskości” oddziałującego nieporządkowanego modelu do izolatora Andersona, manifestujące się w częściowej

delokalizacji lokalnych całek ruchu, pozwala wyjaśnić własności MBL: powolną dynamikę i charakterystyczną zależność funkcji spektralnych typu $1/\omega$ bez konieczności założenia, że istnieje *faza* zlokalizowana, jak również konieczności występowania l-bitów.

Układy nieuporządkowane zawierają obszary o silniejszym nieporządku, gdzie τ_α są duże oraz o znacznie słabszym nieporządku, gdzie τ_α są małe. W efekcie otrzymujemy szeroki rozkład czasów relaksacji. Tak szeroki potęgowy rozkład jest wystarczający do wytłumaczenia dynamiki typu $1/\omega$.

Phenomenology of Spectral Functions in Disordered Spin Chains at Infinite Temperature

Lev Vidmar,^{1,2} Bartosz Krajewski,³ Janez Bonča,^{2,1} and Marcin Mierzejewski³¹Department of Theoretical Physics, J. Stefan Institute, SI-1000 Ljubljana, Slovenia²Department of Physics, Faculty of Mathematics and Physics, University of Ljubljana, SI-1000 Ljubljana, Slovenia³Department of Theoretical Physics, Faculty of Fundamental Problems of Technology, Wrocław University of Science and Technology, 50-370 Wrocław, Poland

(Received 28 May 2021; accepted 1 November 2021; published 1 December 2021)

Studies of disordered spin chains have recently experienced a renewed interest, inspired by the question to which extent the exact numerical calculations comply with the existence of a many-body localization phase transition. For the paradigmatic random field Heisenberg spin chains, many intriguing features were observed when the disorder is considerable compared to the spin interaction strength. Here, we introduce a phenomenological theory that may explain some of those features. The theory is based on the proximity to the noninteracting limit, in which the system is an Anderson insulator. Taking the spin imbalance as an exemplary observable, we demonstrate that the proximity to the local integrals of motion of the Anderson insulator determines the dynamics of the observable at infinite temperature. In finite interacting systems our theory quantitatively describes its integrated spectral function for a wide range of disorders.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.127.230603

Introduction.—Considerable effort has been devoted to understanding the emergence of ergodicity in physically relevant quantum many-body systems. Important cornerstones are provided by the random matrix theory (RMT) and the eigenstate thermalization hypothesis (ETH) [1–6]. Even though a rigorous proof of the ETH is still missing, several exact numerical studies have confirmed its validity with remarkable accuracy, at least for specific parameter regimes of some physical Hamiltonians [4,7–18]. The clearest numerical results have been obtained for the regimes where all model parameters are quantitatively similar and the numerical artifacts are strongly suppressed. Much less understood are properties of many-body systems in which some physical processes (e.g., interaction or quenched disorder) are dominant over all other processes. Exciting open questions concern the possibility of ergodicity breaking phase transitions and a generalization of the Kolmogorov-Arnold-Moser theorem [19–21]. In strongly disordered systems, this type of ergodicity breaking phase transition is referred to as the many-body localization transition [22–28].

A recent study [29] argued that the identification of ergodicity in numerical results may strongly depend on the value of the Thouless time t_{Th} relative to the Heisenberg time t_H [30]. A system is interpreted as ergodic if $t_{\text{Th}} \ll t_H$, while in the opposite regime $t_{\text{Th}} \gtrsim t_H$ the interpretation of finite-size results appears to be less conclusive. For a quantitative illustration, let us consider the random field Heisenberg chain with L sites,

$$\hat{H} = J \sum_i (\hat{S}_i^x \hat{S}_{i+1}^x + \hat{S}_i^y \hat{S}_{i+1}^y + \Delta \hat{S}_i^z \hat{S}_{i+1}^z) + \sum_i h_i \hat{S}_i^z, \quad (1)$$

where \hat{S}_i^α ($\alpha = x, y, z$) are standard spin-1/2 operators and the local fields h_i (in units of $J \equiv 1$) are independent and identically distributed random variables drawn from the box distribution, $h_i \in [-W, W]$. It was shown [29] that in finite systems ($L \lesssim 20$) at $\Delta = 1$, the criterion $t_{\text{Th}} \sim t_H$ is satisfied around $W = W^* \approx 2$. Considering the behavior of the system (1) with increasing disorder strength W , this point can therefore be interpreted as the onset of the ergodicity breakdown. The latter is consistent with the level statistics and the eigenstate entanglement entropies departing from the RMT predictions [31], the fidelity susceptibility being maximal [32], the distribution of observable matrix elements being anomalous [33,34], the opening of the Schmidt gap [35] and the gap in the spectrum of the eigenstate one-body density matrix [36], and the correlation-hole time in the survival probability reaching t_H [37].

Despite those developments, the fate of the ergodicity breaking point in the thermodynamic limit remains an extensively debated topic [29,31–33,38–40]. Moreover, previous studies reported other fascinating phenomena such as subdiffusive transport [41–47] and an approximate $1/\omega$ scaling of the spin density spectral function [32,48,49]. These observations call for a universal description within a simple theory that should provide quantitative predictions at all disorder strengths.

In this Letter we introduce a phenomenological theory that may achieve some of those goals. We develop the theory on the premise that the noninteracting point at $\Delta = 0$, which is Anderson localized for any disorder in the thermodynamic limit [50,51], determines specific properties of disordered spin chains also at $\Delta \neq 0$. The key

ingredient of the theory is the proximity to the local integrals of motion of the Anderson insulator (shortly, Anderson LIOMs). In particular, we allow the Anderson LIOMs to acquire finite relaxation times due to interactions, i.e., they may become delocalized. The theory provides an analytical description of the frequency dependence of the spectral function, it exhibits a remarkable agreement with numerical results for a wide range of disorders, and it suggests that at least a fraction of Anderson LIOMs are delocalized. Specifically, for the spin imbalance observable, we explain rich phenomenology of the spectral function, which ranges from the anomalous $\approx 1/\omega$ behavior at moderate disorders to more complicated functional forms at strong disorder.

Spectral function.—The central quantity in our studies is the spectral function $S(\omega)$ of an observable \hat{A} , which is the Fourier transform of its autocorrelation function,

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t - |t|0^+} \langle e^{i\hat{H}t} \hat{A} e^{-i\hat{H}t} \hat{A} \rangle, \quad (2)$$

where $\langle \dots \rangle = \text{Tr}\{\dots\}/\mathcal{D}$ denotes the ensemble average over all eigenstates and \mathcal{D} is the dimension of the Hilbert space. Our numerical calculations are carried out for its integral

$$I(\omega) = \int_{-\omega}^{\omega} d\omega' S(\omega') = \frac{1}{\mathcal{D}} \sum_{m,n=1}^{\mathcal{D}} \theta(\omega - |E_m - E_n|) A_{mn}^2, \quad (3)$$

where E_n are the energy levels and $A_{mn} \equiv \langle m | \hat{A} | n \rangle$ are matrix elements of \hat{A} in the eigenstate basis, $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$, θ is the Heaviside step function, and we set $\hbar \equiv 1$. We study observables that are traceless, $\langle \hat{A} \rangle = 0$, and normalized, $\|\hat{A}\|^2 = \langle \hat{A} \hat{A} \rangle = 1$ [14]. As a consequence, the high-frequency limit of $I(\omega)$ equals $\lim_{\omega \rightarrow \infty} I(\omega) = (1/\mathcal{D}) \sum_{m,n} A_{mn}^2 = \langle \hat{A} \hat{A} \rangle = 1$.

The integrated spectral function $I(\omega)$ filters out fast fluctuations and thereby allows for a robust analysis of the dynamics encoded in $I(\omega)$ even for a single realization of disorder. A particular observable that we study is the spin imbalance, $\hat{A} = (2/\sqrt{L}) \sum_i (-1)^i \hat{S}_i^z$. This observable has been measured experimentally [52,53], it is a self-averaging quantity in macroscopic systems, and it has nonvanishing projections on multiple Anderson LIOMs. In the language of [54], this observable is integrability preserving in the noninteracting limit $\Delta = 0$.

Comparison with the noninteracting limit.—Figure 1(a) shows $I(\omega)$ for a single realization of disorder at $\Delta = 1$ (examples for other realizations are shown in [55]). Results are compared to the noninteracting system, $I_0(\omega)$ at $\Delta = 0$. For $\omega > J$ the results are qualitatively very similar, while important differences emerge in the low-frequency regime $\omega \ll J$, which is the main interest of this work.

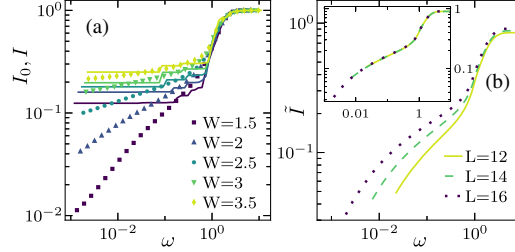


FIG. 1. (a) Integrated spectral functions $I(\omega)$ [$\Delta = 1$, symbols] and $I_0(\omega)$ [$\Delta = 0$, lines] at $L = 16$. Results are shown for a single disorder realization and various values of W , such that the ratio h_i/W in Eq. (1) is independent of W . (b) Regular part $\tilde{I}(\omega)$, averaged over 10^3 realizations of the disorder at $W = 2$. The results for $L = 12$ and 14 in the inset are shifted upwards by a constant to overlap with the data for $L = 16$. We set $J \equiv 1$ in all figures, and consider periodic boundary conditions in (1).

The spectral weight of the Anderson insulator in the low- ω regime is strongly suppressed, which is manifested as $I_0(\omega \ll J) \simeq \text{const}$. This can be interpreted as the accumulation of the spectral weight of the observable in the stiffness $D_0 = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} I_0(\omega)$, and hence the spectral function can be approximated as $S_0(\omega \ll J) \simeq D_0 \delta(\omega)$. In contrast, the low- ω spectral weight of the interacting system may be considerable since $I(\omega \ll J) \neq \text{const}$. This property gives rise to the *anomalous dynamics* of the imbalance for $\Delta \neq 0$ and $\omega \ll J$ [32,45,48,49,56,60–64], and is the main focus of this Letter.

As an important detail relevant for subsequent analysis, we note that the stiffness D_0 of an *arbitrary* observable \hat{A} in the Anderson insulator ($\Delta = 0$) originates from its projections on the Anderson LIOMs $\{\hat{Q}_\alpha\}$. Therefore, the spectral function for $\omega \ll J$ can be written as

$$S_{M,0}(\omega) = \sum_\alpha D_\alpha \delta(\omega), \quad D_\alpha = \frac{\langle \hat{A} \hat{Q}_\alpha \rangle^2}{\langle \hat{Q}_\alpha \hat{Q}_\alpha \rangle}, \quad (4)$$

where $D_0 = \sum_\alpha D_\alpha$. The latter relation follows from the Mazur bound [14], and we consider the Anderson insulator as an integrable model containing orthogonal Anderson LIOMs $\langle \hat{Q}_\alpha \hat{Q}_\alpha \rangle \propto \delta_{\alpha,\alpha'}$ (see [55] for details about the Anderson LIOMs). Since the projections D_α are defined in Eq. (4) by the average over the entire Hilbert space, we do not study the energy-resolved spectral functions, but instead we focus on the infinite temperature at which the average energy $(E_m + E_n)/2$ of pairs of eigenstates $|m\rangle, |n\rangle$ in Eq. (3) is arbitrary.

Low-frequency regime.—In what follows we focus on the interacting systems ($\Delta = 1$), and we disentangle the effect of accumulation of spectral weight in the stiffness from the low- ω spectral weight. To this end, we study the *regular* part of the integrated spectral function, defined as $\tilde{I}(\omega) = I(\omega) - (1/\mathcal{D}) \sum_{n=1}^{\mathcal{D}} A_{nn}^2$. An example of the

disorder averaged $\tilde{I}(\omega)$ at $W = 2$ and different system sizes L is shown in Fig. 1(b). It is remarkable that a simple upward shift of the curves for $L = 12$ and 14 results in an accurate overlap with the data for $L = 16$. This is observed at $W = 2$ in the inset of Fig. 1(b), and other values of the disorder in [55]. This suggests that the finite-size effects in the low- ω regime are small (apart from the L -dependent vertical shift), and calls for a simple theory to describe the observable spectral function.

An interesting remark can be made about the overlap of integrated spectral functions such as the one in the inset of Fig. 1(b). It indicates that a fraction of the spectral weight from the diagonal matrix elements at $\delta(\omega)$ is transferred to nonzero frequencies with increasing L . This may be interpreted as the trend towards restoring the ergodicity in the thermodynamic limit. Several works have recently explored possibilities for restoring the ergodicity at large disorders when the thermodynamic limit is approached [29,31,32,57,65,66]. Nevertheless, our main focus here is to provide quantitative predictions for properties in *finite* systems.

Proximity to Anderson insulator.—We now construct a phenomenological theory that may quantitatively describe the observable spectral functions in finite systems. Our approach is based on the proximity to the Anderson insulator whose conserved quantities are denoted as Anderson LIOMs. Anderson LIOMs considered here do not imply the existence of l bits in interacting systems [67–74]. The key premise of the theory is the conjecture that upon interactions, at least a fraction of Anderson LIOMs $\{\hat{Q}_\alpha\}$ become delocalized, i.e., they cease to be conserved and $\langle \hat{Q}_\alpha(t)\hat{Q}_\alpha \rangle$ decays with a finite relaxation time τ_α . This impacts the dynamics of finite systems by broadening the δ functions in Eq. (4). We model this effect by the following regular part of the spectral function for interacting system [cf. Eq. (4)]:

$$S_M(\omega \ll J) = \sum_{\alpha=1}^N D_\alpha \frac{1}{\pi} \frac{\tau_\alpha}{(\omega\tau_\alpha)^2 + 1}, \quad (5)$$

where the summation runs over N Anderson LIOMs that have nonvanishing projections on \hat{A} and are delocalized in the interacting system. Note that the broadening in Eq. (5) is described by the Lorentzian functions, which is a common approach in the literature. Recently, the Lorentzian form of the spectral function [cf. Eq. (5) with $N = 1$] was actually observed in numerical studies of several many-body systems close to integrable points [17,57,58]. Nevertheless, we argue in [55] that the main results of our study are independent of the particular functional form of the broadening function.

Important inputs to the theory are the values of the stiffnesses $\{D_\alpha\}$ and the relaxation times $\{\tau_\alpha\}$ of delocalized Anderson LIOMs in the Hamiltonian (1). We calculated

both quantities numerically at disorders $W = 2$ and 3, see Sec. S4 of [55]. The first insight is that, for the spin imbalance, many projections D_α from Eq. (4) are nonzero, and hence one needs to consider $N \gg 1$ in Eq. (5). The second insight is that the projections D_α are very weakly correlated (or uncorrelated) with the relaxation times τ_α , and hence we replace D_α with its average value in Eq. (5), $D_\alpha \rightarrow 1/N \sum_\alpha D_\alpha = D_0/N$. Finally, we calculated the distribution $f_\tau(\tau)$ of the relaxation times τ_α of the auto-correlation functions $\langle \hat{Q}_\alpha(t)\hat{Q}_\alpha \rangle$ and found that the distribution $f_\tau(\tau)$ is extremely wide. In particular, the distribution can be well approximated by a power-law dependence $f_\tau(\tau) \propto 1/\tau^\mu$ in an interval $\tau \in [\tau_{\min}, \tau_{\max}]$, where the disorder strength only impacts the exponent μ and the boundaries τ_{\min} and τ_{\max} . Such a power-law distribution of relaxation times τ_α is consistent with the distributions of τ_α studied for the Anderson insulators coupled to regular bosons or hard-core bosons via the Fermi golden rule [75,76].

Summarizing the above considerations, we replace the sum $N^{-1} \sum_{\alpha=1}^N$ in Eq. (5) with the integral $\int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} d\tau f_\tau(\tau)$, and obtain a phenomenological model to describe the low-frequency dynamics,

$$S_M(\omega) = \frac{\bar{D}_0}{\pi} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} \frac{d\tau}{\tau^{\mu-1}} \frac{1}{(\omega\tau)^2 + 1}, \quad (6)$$

where \bar{D}_0 is a prefactor that determines the total spectral weight arising from the delocalized Anderson LIOMs. In analogy to Eq. (3), we then define $\tilde{I}_M(\omega)$ by the integral of $S_M(\omega)$, see also [55].

Before carrying out a quantitative comparison of our phenomenological model with the actual numerical data, we comment on some general properties of the spectral function described by Eq. (6). We first note that if $\omega \ll \tau_{\max}^{-1}$, then $S_M(\omega) \propto \text{const}$ and $\tilde{I}(\omega) \propto \omega$. This property is usually associated with the diffusive character of the dynamics. Emergence of such regime was detected in several studies of many-body systems that comply with the ETH [4,15–17,57,77–79]. For the model under investigation, see Fig. 2(a), we indeed observe $\tilde{I}(\omega) \propto \omega$ at $W \approx 1$. In this regime of parameters, the phenomenological model (6) can be simplified since τ_{\min} and τ_{\max} are of the same order and hence one may use a single relaxation time, $\tau_\alpha \rightarrow \tau$. With increasing the disorder W , however, the linear regime in $\tilde{I}(\omega)$ shifts to lower ω , which is a consequence of a rapid increase of τ_{\max} with W .

The main message of this Letter is that, for a wide range of disorder strengths, the low-frequency response may be governed by a broad distribution of the relaxation times $\{\tau_\alpha\}$, with $\tau_{\max}/\tau_{\min} \gg 1$ in Eq. (6). This suggests that the frequency regime $\tau_{\max}^{-1} \ll \omega \ll \tau_{\min}^{-1}$ may be very broad and hence relevant for the time regimes studied in numerical simulations and analog quantum simulators [52,53].

PHYSICAL REVIEW LETTERS 127, 230603 (2021)

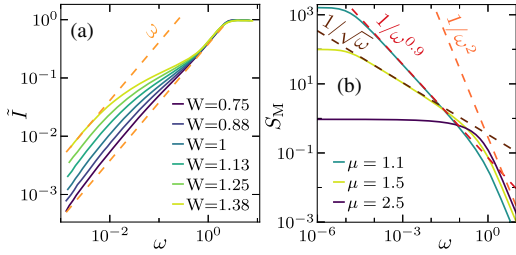


FIG. 2. (a) Numerical results for the regular part of the integrated spectral function $\tilde{I}(\omega)$ at $L = 16$ and weak disorder. Results are averaged over 10^3 realizations of disorder. (b) Solid lines: $S_M(\omega)$ from Eq. (6) at $\mu = 1.1, 1.5$ and 2.5 , using $\tau_{\min} = 1$, $\tau_{\max} = 10^5$ and $\bar{D}_0 = 1$. Dashed lines are power-law guidelines, with functional forms $\propto 1/\omega^{2-\mu}$ for $\mu = 1.1, 1.5$, and $\propto 1/\omega^2$.

Particularly informative is the case $\mu = 1$ in Eq. (6), for which

$$S_M(\omega) = \frac{\bar{D}_0}{\pi} \frac{\arctan(\omega\tau_{\max}) - \arctan(\omega\tau_{\min})}{\omega}. \quad (7)$$

The functional form $\propto 1/\omega$ at $\mu = 1$ is consistent with the anomalous dynamics and spectral functions reported in several previous studies [32,48,49]. More generally, $S_M(\omega)$ at $\mu < 2$ can roughly be approximated by $S_M(\omega) \propto 1/\omega^\eta$ with $\eta \simeq 2 - \mu$, see Fig. 2(b) for $\mu = 1.1$ and 1.5 . In [55] we show that the $1/\omega^\eta$ dependence arises solely from the power-law distribution of relaxation times $\{\tau_\alpha\}$, and is not an artifact of the Lorentzian broadening used in Eq. (5). We note, however, that the functional forms predicted by Eq. (6), as well as the numerical results in Figs. 3 and 4, may also exhibit a fine structure beyond a simple power-law dependence. In the opposite regime $\mu > 2$, $S_M(\omega)$ resembles a Fourier transform of a single Lorentzian, as shown in Fig. 2(b) for $\mu = 2.5$.

Numerical tests for spin imbalance.—We now carry out a quantitative comparison between the numerical results for $\tilde{I}(\omega)$ [symbols in Figs. 3 and 4] and the predictions $\tilde{I}_M(\omega)$ from the phenomenological model in Eq. (6) [lines in Figs. 3(a) and 4]. The fitting parameters of the latter are τ_{\min} , τ_{\max} and μ that determine the distribution of relaxation times, and the prefactor \bar{D}_0 .

Figure 3 considers the case where the free parameters of $\tilde{I}_M(\omega)$ are fitted independently for every disorder realization. An example of the outcome of such procedure is shown in Fig. 3(a) for a single disorder realization, while examples for several other realizations are shown in [55]. Figures 3(b) and 3(c) then show the cumulative distribution of fitting parameters obtained by analyzing 10^3 realizations of disorder. There are two important quantitative results. The first is that the distribution of τ_{\max} is broad and its median increases approximately exponentially with W , unless it reaches the

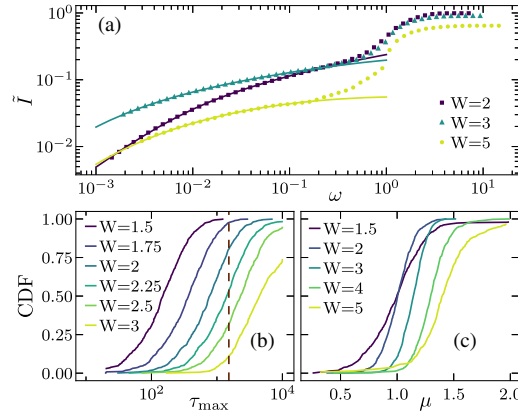


FIG. 3. (a) Symbols: numerical results for $\tilde{I}(\omega)$ at $L = 16$ and a single realization of the disorder W . Lines: predictions by $\tilde{I}_M(\omega)$ for the low-frequency regime $\omega < 0.2$. (b),(c) The resulting cumulative distribution functions (CDF) of the fitting parameters τ_{\max} and μ , respectively, for 10^3 realizations of the disorder. The vertical dashed line in (b) denotes the Heisenberg time t_H at $W = 2$. See [55] for details.

Heisenberg time $t_H = \omega_H^{-1}$ at $W^* \approx 2$, see the vertical line in Fig. 3(b). (The Heisenberg energy ω_H corresponds to the average level spacing in the middle of the spectrum, which at $L = 16$ is $\omega_H/J \approx 10^{-3}$ [29].) The value $W^* \approx 2$ is consistent with the ergodicity breaking transition point in this model [31], occurring when the Thouless time t_{Th} in the spectral form factor approaches t_H [29]. When τ_{\max} exceeds t_H , the mean of μ departs from $\mu = 1$ towards higher values [see Fig. 3(c)]. The second important result is that τ_{\min} remains well below t_H for all results reported here. Otherwise, the dynamics would be frozen, $\tilde{I}(\omega) \simeq \text{const}$, down to $\omega \sim \omega_H$, which is clearly not the case in Figs. 3(a) or 4(b). The first result suggests that a fraction of Anderson LIOMs remains localized at $W > W^*$ upon adding the

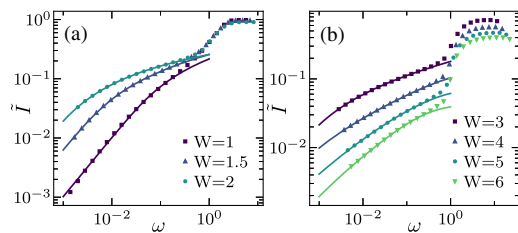


FIG. 4. Symbols: numerical results for the disorder averages of $\tilde{I}(\omega)$ at $L = 16$, using 10^3 disorder realizations. Lines: predictions by $\tilde{I}_M(\omega)$ for the low-frequency regime $\omega < 0.2$. Values of the disorder strengths are (a) $W \leq 2$ and (b) $W \geq 3$. See [55] for details.

PHYSICAL REVIEW LETTERS **127**, 230603 (2021)

interactions. Exploring the fate of those LIOMs for larger systems, i.e., when $t_H \rightarrow \infty$, is beyond the scope of this work. The second result suggests that at least some fraction of Anderson LIOMs is delocalized in the interacting system for all disorder values considered here. In Fig. 4 we carry out an analogous analysis for the disorder averages of $\tilde{I}(\omega)$. Also in this case, the phenomenological model from Eq. (6) provides an extremely accurate description of the results. A quantitative analysis of the fitting parameters τ_{\max} and μ is provided in [55].

Conclusions.—In this Letter we introduced a phenomenological theory that accurately describes the spectral properties of the spin imbalance in disordered chains. The theory is based on the proximity to the Anderson insulator. We assume that at least certain Anderson LIOMs acquire finite relaxation times as a consequence of interactions. An important ingredient of the underlying phenomenological model is a broad distribution of relaxation times of Anderson LIOMs, which represents the origin of anomalous dynamics in finite systems. Then in systems amenable to exact diagonalization there exist the disorder W^* [$W^* \approx 2$ for the model in (1)] above which the relaxation times $\{\tau_\alpha\}$ of a fraction of Anderson LIOMs are larger than the Heisenberg time t_H . As a result, the properties of finite systems at $W > W^*$ are governed by the coexistence of two types of LIOMs: those for which $\tau_\alpha > t_H$ (they appear to be exactly conserved), and those for which $\tau_\alpha < t_H$. The interplay between both types of LIOMs may give rise to unconventional properties of the system defined on a Fock space graph [80–85], which needs to be explored in more detail in future work.

We acknowledge discussions with F. Heidrich-Meisner, D. Logan, A. Polkovnikov, P. Prelovšek, T. Prosen, M. Rigol, D. Sels, and P. Sierant. We acknowledge the support by the National Science Centre, Poland via project 2020/37/B/ST3/00020 (M. M.), the support by the Slovenian Research Agency (ARRS), Research Core Fundings Grants P1-0044 (L. V. and J. B.) and J1-1696 (L. V.), and the support from the Center for Integrated Nanotechnologies, a U.S. Department of Energy, Office of Basic Energy Sciences user facility (J. B.).

- [1] J. M. Deutsch, Quantum statistical mechanics in a closed system, *Phys. Rev. A* **43**, 2046 (1991).
- [2] M. Srednicki, Chaos and quantum thermalization, *Phys. Rev. E* **50**, 888 (1994).
- [3] M. Rigol, V. Dunjko, and M. Olshanii, Thermalization and its mechanism for generic isolated quantum systems, *Nature (London)* **452**, 854 (2008).
- [4] L. D’Alessio, Y. Kafri, A. Polkovnikov, and M. Rigol, From quantum chaos and eigenstate thermalization to statistical mechanics and thermodynamics, *Adv. Phys.* **65**, 239 (2016).
- [5] T. Mori, T. N. Ikeda, E. Kaminishi, and M. Ueda, Thermalization and prethermalization in isolated quantum systems: A theoretical overview, *J. Phys. B* **51**, 112001 (2018).
- [6] J. M. Deutsch, Eigenstate thermalization hypothesis, *Rep. Prog. Phys.* **81**, 082001 (2018).
- [7] L. F. Santos and M. Rigol, Onset of quantum chaos in one-dimensional bosonic and fermionic systems and its relation to thermalization, *Phys. Rev. E* **81**, 036206 (2010).
- [8] W. Beugeling, R. Moessner, and M. Haque, Finite-size scaling of eigenstate thermalization, *Phys. Rev. E* **89**, 042112 (2014).
- [9] R. Steinigeweg, A. Khodja, H. Niemeyer, C. Gogolin, and J. Gemmer, Pushing the Limits of the Eigenstate Thermalization Hypothesis towards Mesoscopic Quantum Systems, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 130403 (2014).
- [10] H. Kim, T. N. Ikeda, and D. A. Huse, Testing whether all eigenstates obey the eigenstate thermalization hypothesis, *Phys. Rev. E* **90**, 052105 (2014).
- [11] R. Mondaini and M. Rigol, Eigenstate thermalization in the two-dimensional transverse field Ising model. II. Off-diagonal matrix elements of observables, *Phys. Rev. E* **96**, 012157 (2017).
- [12] D. Jansen, J. Stolpp, L. Vidmar, and F. Heidrich-Meisner, Eigenstate thermalization and quantum chaos in the Holstein polaron model, *Phys. Rev. B* **99**, 155130 (2019).
- [13] T. LeBlond, K. Mallayya, L. Vidmar, and M. Rigol, Entanglement and matrix elements of observables in interacting integrable systems, *Phys. Rev. E* **100**, 062134 (2019).
- [14] M. Mierzejewski and L. Vidmar, Quantitative Impact of Integrals of Motion on the Eigenstate Thermalization Hypothesis, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 040603 (2020).
- [15] M. Brenes, T. LeBlond, J. Goold, and M. Rigol, Eigenstate Thermalization in a Locally Perturbed Integrable System, *Phys. Rev. Lett.* **125**, 070605 (2020).
- [16] J. Richter, A. Dymarsky, R. Steinigeweg, and J. Gemmer, Eigenstate thermalization hypothesis beyond standard indicators: Emergence of random-matrix behavior at small frequencies, *Phys. Rev. E* **102**, 042127 (2020).
- [17] C. Schönle, D. Jansen, F. Heidrich-Meisner, and L. Vidmar, Eigenstate thermalization hypothesis through the lens of autocorrelation functions, *Phys. Rev. B* **103**, 235137 (2021).
- [18] M. Brenes, S. Pappalardi, M. T. Mitchison, J. Goold, and A. Silva, Out-of-time-order correlations and the fine structure of eigenstate thermalization, *Phys. Rev. E* **104**, 034120 (2021).
- [19] A. N. Kolmogorov, On conservation of conditionally periodic motions for a small change in Hamilton’s function, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **98**, 527 (1954).
- [20] J.-S. Caux and J. Mossel, Remarks on the notion of quantum integrability, *J. Stat. Mech.* (2011) P02023.
- [21] G. P. Brandino, J.-S. Caux, and R. M. Konik, Glimmers of a quantum KAM theorem: Insights from Quantum Quenches in One-Dimensional Bose Gases, *Phys. Rev. X* **5**, 041043 (2015).
- [22] D. Basko, I. Aleiner, and B. Altshuler, Metal-insulator transition in a weakly interacting many-electron system with localized single-particle states, *Ann. Phys. (Amsterdam)* **321**, 1126 (2006).
- [23] I. V. Gornyi, A. D. Mirlin, and D. G. Polyakov, Interacting Electrons in Disordered Wires: Anderson Localization and Low-T Transport, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 206603 (2005).

- [24] A. Pal and D. A. Huse, Many-body localization phase transition, *Phys. Rev. B* **82**, 174411 (2010).
- [25] R. Nandkishore and D. A. Huse, Many-body-localization and thermalization in quantum statistical mechanics, *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **6**, 15 (2015).
- [26] E. Altman and R. Vosk, Universal dynamics and renormalization in many-body-localized systems, *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **6**, 383 (2015).
- [27] F. Alet and N. Laflorencie, Many-body localization: An introduction and selected topics, *C. R. Phys.* **19**, 498 (2018).
- [28] D. A. Abanin, E. Altman, I. Bloch, and M. Serbyn, Colloquium: Many-body localization, thermalization, and entanglement, *Rev. Mod. Phys.* **91**, 021001 (2019).
- [29] J. Šuntajs, J. Bonča, T. Prosen, and L. Vidmar, Quantum chaos challenges many-body localization, *Phys. Rev. E* **102**, 062144 (2020).
- [30] The Thouless time t_{Th} may be seen as the longest physically relevant relaxation time, and the Heisenberg time t_H is proportional to the inverse level spacing.
- [31] J. Šuntajs, J. Bonča, T. Prosen, and L. Vidmar, Ergodicity breaking transition in finite disordered spin chains, *Phys. Rev. B* **102**, 064207 (2020).
- [32] D. Sels and A. Polkovnikov, Dynamical obstruction to localization in a disordered spin chain, *Phys. Rev. E* **104**, 054105 (2021).
- [33] R. K. Panda, A. Scardicchio, M. Schulz, S. R. Taylor, and M. Žnidarič, Can we study the many-body localisation transition? *Europhys. Lett.* **128**, 67003 (2020).
- [34] Á. L. Corps, R. A. Molina, and A. Relaño, Signatures of a critical point in the many-body localization transition, *SciPost Phys.* **10**, 107 (2021).
- [35] J. Gray, S. Bose, and A. Bayat, Many-body localization transition: Schmidt gap, entanglement length, and scaling, *Phys. Rev. B* **97**, 201105(R) (2018).
- [36] S. Bera, H. Schomerus, F. Heidrich-Meisner, and J. H. Bardarson, Many-Body Localization Characterized from a One-Particle Perspective, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 046603 (2015).
- [37] M. Schiulaz, E. J. Torres-Herrera, and L. F. Santos, Thouless and relaxation time scales in many-body quantum systems, *Phys. Rev. B* **99**, 174313 (2019).
- [38] P. Sierant, D. Delande, and J. Zakrzewski, Thouless Time Analysis of Anderson and Many-Body Localization Transitions, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 186601 (2020).
- [39] P. Sierant, M. Lewenstein, and J. Zakrzewski, Polynomially Filtered Exact Diagonalization Approach to Many-Body Localization, *Phys. Rev. Lett.* **125**, 156601 (2020).
- [40] D. Abanin, J. Bardarson, G. De Tomasi, S. Gopalakrishnan, V. Khemani, S. Parameswaran, F. Pollmann, A. Potter, M. Serbyn, and R. Vasseur, Distinguishing localization from chaos: Challenges in finite-size systems, *Ann. Phys. (Amsterdam)* **427**, 168415 (2021).
- [41] Y. Bar Lev, G. Cohen, and D. R. Reichman, Absence of Diffusion in an Interacting System of Spinless Fermions on a One-Dimensional Disordered Lattice, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 100601 (2015).
- [42] K. Agarwal, S. Gopalakrishnan, M. Knap, M. Müller, and E. Demler, Anomalous Diffusion and Griffiths Effects Near the Many-Body Localization Transition, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 160401 (2015).
- [43] D. J. Luitz, N. Laflorencie, and F. Alet, Extended slow dynamical regime close to the many-body localization transition, *Phys. Rev. B* **93**, 060201(R) (2016).
- [44] I. Khait, S. Gazit, N. Y. Yao, and A. Auerbach, Spin transport of weakly disordered Heisenberg chain at infinite temperature, *Phys. Rev. B* **93**, 224205 (2016).
- [45] M. Žnidarič, A. Scardicchio, and V. K. Varma, Diffusive and Subdiffusive Spin Transport in the Ergodic Phase of a Many-Body Localizable System, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 040601 (2016).
- [46] D. J. Luitz and Y. B. Lev, The ergodic side of the many-body localization transition, *Ann. Phys. (Berlin)* **529**, 1600350 (2017).
- [47] S. Bera, G. De Tomasi, F. Weiner, and F. Evers, Density Propagator for Many-Body Localization: Finite-Size Effects, Transient Subdiffusion, and Exponential Decay, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 196801 (2017).
- [48] M. Mierzejewski, J. Herbrych, and P. Prelovšek, Universal dynamics of density correlations at the transition to the many-body localized state, *Phys. Rev. B* **94**, 224207 (2016).
- [49] M. Serbyn, Z. Papić, and D. A. Abanin, Thouless energy and multifractality across the many-body localization transition, *Phys. Rev. B* **96**, 104201 (2017).
- [50] P. W. Anderson, Absence of diffusion in certain random lattices, *Phys. Rev.* **109**, 1492 (1958).
- [51] N. F. Mott and W. D. Twose, The theory of impurity conduction, *Adv. Phys.* **10**, 107 (1961).
- [52] M. Schreiber, S. S. Hodgman, P. Bordia, H. P. Lüschen, M. H. Fischer, R. Vosk, E. Altman, U. Schneider, and I. Bloch, Observation of many-body localization of interacting fermions in a quasi-random optical lattice, *Science* **349**, 842 (2015).
- [53] H. P. Lüschen, P. Bordia, S. S. Hodgman, M. Schreiber, S. Sarkar, A. J. Daley, M. H. Fischer, E. Altman, I. Bloch, and U. Schneider, Signatures of Many-Body Localization in a Controlled Open Quantum System, *Phys. Rev. X* **7**, 011034 (2017).
- [54] M. Pandey, P. W. Claeys, D. K. Campbell, A. Polkovnikov, and D. Sels, Adiabatic Eigenstate Deformations as a Sensitive Probe for Quantum Chaos, *Phys. Rev. X* **10**, 041017 (2020).
- [55] See Supplemental Material at <http://link.aps.org/supplemental/10.1103/PhysRevLett.127.230603> for details about Fig. 1, the role of the Lorentzian broadening, details about the fitting procedure and the Anderson LIOMs. It includes Refs. [17,29,38,56–59].
- [56] P. Prelovšek, M. Mierzejewski, J. Krsnik, and O. S. Barišić, Many-body localization as a percolation phenomenon, *Phys. Rev. B* **103**, 045139 (2021).
- [57] T. LeBlond, D. Sels, A. Polkovnikov, and M. Rigol, Universality in the onset of quantum chaos in many-body systems, *arXiv:2012.07849*.
- [58] M. Mierzejewski, T. Prosen, and P. Prelovšek, Approximate conservation laws in perturbed integrable lattice models, *Phys. Rev. B* **92**, 195121 (2015).
- [59] J. Šuntajs, T. Prosen, and L. Vidmar, Spectral properties of three-dimensional Anderson model, *Ann. Phys. (Amsterdam)* 168469 (2021).
- [60] K. Agarwal, E. Altman, E. Demler, S. Gopalakrishnan, D. A. Huse, and M. Knap, Rareregion effects and dynamics

PHYSICAL REVIEW LETTERS **127**, 230603 (2021)

- near the manybody localization transition, *Ann. Phys. (Berlin)* **529**, 1600326 (2017).
- [61] D. J. Luitz and Y. Bar Lev, Anomalous Thermalization in Ergodic Systems, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 170404 (2016).
- [62] S. Gopalakrishnan, K. R. Islam, and M. Knap, Noise-Induced Subdiffusion in Strongly Localized Quantum Systems, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 046601 (2017).
- [63] P. Prelovšek and J. Herbrych, Self-consistent approach to many-body localization and subdiffusion, *Phys. Rev. B* **96**, 035130 (2017).
- [64] T. Chanda, P. Sierant, and J. Zakrzewski, Time dynamics with matrix product states: Many-body localization transition of large systems revisited, *Phys. Rev. B* **101**, 035148 (2020).
- [65] M. Kiefer-Emmanouilidis, R. Unanyan, M. Fleischhauer, and J. Sirker, Evidence for Unbounded Growth of the Number Entropy in Many-Body Localized Phases, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 243601 (2020).
- [66] M. Kiefer-Emmanouilidis, R. Unanyan, M. Fleischhauer, and J. Sirker, Slow delocalization of particles in many-body localized phases, *Phys. Rev. B* **103**, 024203 (2021).
- [67] D. A. Huse, R. Nandkishore, and V. Oganesyan, Phenomenology of fully many-body-localized systems, *Phys. Rev. B* **90**, 174202 (2014).
- [68] M. Serbyn, Z. Papić, and D. A. Abanin, Local Conservation Laws and the Structure of the Many-Body Localized States, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 127201 (2013).
- [69] V. Ros, M. Müller, and A. Scardicchio, Integrals of motion in the many-body localized phase, *Nucl. Phys. B* **891**, 420 (2015).
- [70] A. Chandran, I. H. Kim, G. Vidal, and D. A. Abanin, Constructing local integrals of motion in the many-body localized phase, *Phys. Rev. B* **91**, 085425 (2015).
- [71] J. Z. Imbrie, On many-body localization for quantum spin chains, *J. Stat. Phys.* **163**, 998 (2016).
- [72] S. J. Thomson and M. Schiró, Time evolution of many-body localized systems with the flow equation approach, *Phys. Rev. B* **97**, 060201(R) (2018).
- [73] G. De Tomasi, F. Pollmann, and M. Heyl, Efficiently solving the dynamics of many-body localized systems at strong disorder, *Phys. Rev. B* **99**, 241114(R) (2019).
- [74] S. P. Kelly, R. Nandkishore, and J. Marino, Exploring many-body localization in quantum systems coupled to an environment via Wegner-Wilson flows, *Nucl. Phys. B* **951**, 114886 (2020).
- [75] P. Prelovšek, J. Bonča, and M. Mierzejewski, Transient and persistent particle subdiffusion in a disordered chain coupled to bosons, *Phys. Rev. B* **98**, 125119 (2018).
- [76] M. Mierzejewski, P. Prelovšek, and J. Bonča, Einstein Relation for a Driven Disordered Quantum Chain in the Subdiffusive Regime, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 206601 (2019).
- [77] A. Dymarsky, Bound on eigenstate thermalization from transport, [arXiv:1804.08626](https://arxiv.org/abs/1804.08626).
- [78] M. Brenes, J. Goold, and M. Rigol, Low-frequency behavior of off-diagonal matrix elements in the integrable XXZ chain and in a locally perturbed quantum-chaotic XXZ chain, *Phys. Rev. B* **102**, 075127 (2020).
- [79] T. LeBlond and M. Rigol, Eigenstate thermalization for observables that break Hamiltonian symmetries and its counterpart in interacting integrable systems, *Phys. Rev. E* **102**, 062113 (2020).
- [80] A. D. Luca and A. Scardicchio, Ergodicity breaking in a model showing many-body localization, *Europhys. Lett.* **101**, 37003 (2013).
- [81] D. J. Luitz, N. Laflorencie, and F. Alet, Many-body localization edge in the random-field Heisenberg chain, *Phys. Rev. B* **91**, 081103(R) (2015).
- [82] N. Macé, F. Alet, and N. Laflorencie, Multifractal Scalings across the Many-Body Localization Transition, *Phys. Rev. Lett.* **123**, 180601 (2019).
- [83] D. E. Logan and S. Welsh, Many-body localization in fock space: A local perspective, *Phys. Rev. B* **99**, 045131 (2019).
- [84] S. Roy and D. E. Logan, Fock-space correlations and the origins of many-body localization, *Phys. Rev. B* **101**, 134202 (2020).
- [85] G. D. Tomasi, I. M. Khaymovich, F. Pollmann, and S. Warzel, Rare thermal bubbles at the many-body localization transition from the Fock space point of view, *Phys. Rev. B* **104**, 024202 (2021).

Supplemental Material: Phenomenology of spectral functions in disordered spin chains at infinite temperature

Lev Vidmar,^{1,2} Bartosz Krajewski,³ Janez Bonča,^{2,1} Marcin Mierzejewski³

¹Department of Theoretical Physics, J. Stefan Institute, SI-1000 Ljubljana, Slovenia

²Department of Physics, Faculty of Mathematics and Physics, University of Ljubljana, SI-1000 Ljubljana, Slovenia

³Department of Theoretical Physics, Faculty of Fundamental Problems of Technology, Wrocław University of Science and Technology, 50-370 Wrocław, Poland

S1. DETAILS ABOUT FIG. 1

Figure 1(a) of the main text shows the integrated spectral function $I(\omega)$, as well as its noninteracting counterpart $I_0(\omega)$ at $\Delta = 0$, for a single realization of the disorder and different values of the disorder amplitude W . In Fig. S1 we show those results for six other realizations of the disorder (we set $J \equiv 1$ in all figures). All results share some common features: while the spectral weight at the noninteracting point $\Delta = 0$ is strongly suppressed at $\omega_H < \omega \ll J$ (i.e., $I_0 \simeq \text{const}$), it exhibits a non-trivial ω -dependence in the interacting regime at $\Delta = 1$.

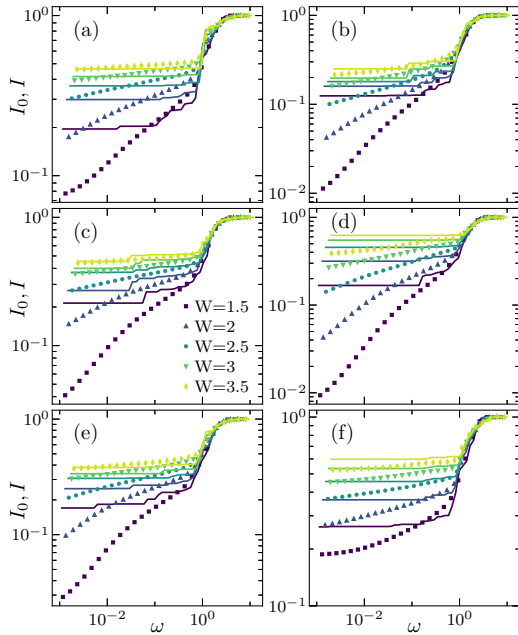


FIG. S1. Integrated spectral function $I(\omega)$ at $\Delta = 1$ (symbols) and its noninteracting counterpart $I_0(\omega)$ at $\Delta = 0$ (lines), at $L = 16$. Each panel corresponds to a different realization of the disorder. All results within a single panel are obtained for the same disorder realization, i.e., using identical values of the ratio h_i/W , for $i = 1, \dots, L$.

For small values of ω close to the Heisenberg energy ω_H , the integrated spectral functions in the interacting model are smaller than those at the noninteracting point. On the other hand, the suppression of the spectral weight at nonzero but small energy $\omega \ll J$ at the noninteracting point supports Eq. (4) of the main text, which is the starting point for the phenomenological modeling of the spectral function in interacting systems.

In Fig. 1(b) of the main text we showed the regular part of the disorder averaged integrated spectral function

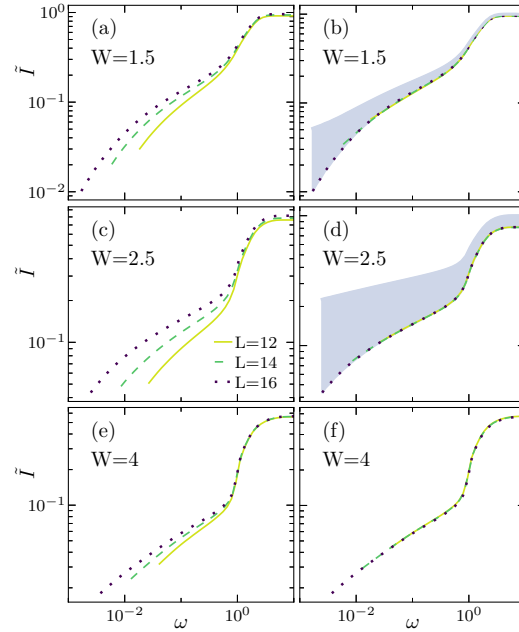


FIG. S2. Regular part of the integrated spectral function $\tilde{I}(\omega)$, averaged over 10^3 realizations of the disorder, for system sizes $L = 12, 14, 16$ and distinct disorder amplitudes W . (a), (c) and (e) show unscaled results, while in (b), (d) and (f) the results at $L = 12$ and 14 are shifted upwards by a constant (see Table S1) to overlap with the results at $L = 16$. Shaded areas in (b) and (d) show the estimates of $\tilde{I}(\omega)$ in the thermodynamic limit, see the text for details.

W	L	$\delta\tilde{I}$
1.5	12	0.036
1.5	14	0.014
2	12	0.059
2	14	0.027
2.5	12	0.056
2.5	14	0.028
4	12	0.012
4	14	0.0055

TABLE S1. The vertical shifts of \tilde{I} used in the inset in Fig. 1(b) [main text] and in Figs. S2(b), S2(d) and S2(f).

$\tilde{I}(\omega)$ at $W = 2$ and different system sizes $L = 12, 14, 16$. Results for the disorders $W = 1.5, 2.5$ and 4 are shown in Figs. S2(a), S2(c) and S2(e), respectively. In all those cases, the unscaled results in the low- ω regime exhibit a robust L dependence. However, performing a vertical shift of the results at $L = 12$ and 14 by a constant, $\tilde{I}(\omega) \rightarrow \tilde{I}(\omega) + \delta\tilde{I}$, gives rise to an excellent overlap of the results. The later is shown in the inset in Fig. 1(b) [main text] and in Figs. S2(b), S2(d) and S2(f), while the values of $\delta\tilde{I}$ are given in the Table S1.

The overlap of shifted curves suggests that the spectral functions should have some universal properties. Unfortunately, the accessible system sizes do not allow for an unambiguous finite-size scaling of the results shown in Table S1. However, one may still estimate $\tilde{I}(\omega)$ in the thermodynamic limit using the inequalities $\tilde{I}(\omega) \leq I(\omega) \leq 1$. Then for an arbitrarily large L , the shift cannot be larger than $\delta_{\max}\tilde{I}$, such that $\tilde{I}(\omega \rightarrow \infty) + \delta_{\max}\tilde{I} = 1$. As a consequence, the integrated spectral function in the thermodynamic limit is bounded from below by a finite-size $\tilde{I}(\omega)$, and from above by $\tilde{I}(\omega) + \delta_{\max}\tilde{I}$. At weak disorder, $\delta_{\max}\tilde{I}$ is sufficiently small so that the latter bound provides a reasonable estimate of $\tilde{I}(\omega)$ in an infinite system. The region within the bounds is marked in Fig. S2(b) and S2(d) as a shaded area.

S2. THE ROLE OF THE LORENTZIAN BROADENING

In the main text we argued that the spectral function $S_M(\omega)$ from Eq. (6), in the regime $\tau_{\max}^{-1} \ll \omega \ll \tau_{\min}^{-1}$, roughly scales as $S(\omega) \propto 1/\omega^\eta$, where η is related to the exponent μ that characterizes the power-law distribution of the relaxation times: $\eta \simeq 2 - \mu$ (at $\mu < 2$). Here we show that such relation is not necessary a consequence of the Lorentzian broadening used in the derivation of Eq. (6), but may also occur when the Lorentzians are replaced by other delta sequences. For the simplest choice $\delta(\omega) \rightarrow \tau_\alpha \theta(1 - |\omega\tau_\alpha|)/2$ one may easily calculate

$S_M(\omega)$. In this case, Eq. (6) should be replaced with

$$\begin{aligned} S_M(\omega) &= \frac{\bar{D}_0}{2} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} \frac{d\tau}{\tau^{\mu-1}} \theta(1 - |\omega\tau|) \\ &= \frac{\bar{D}_0}{2} \int_{\tau_{\min}}^{\omega^{-1}} \frac{d\tau}{\tau^{\mu-1}} \\ &= \frac{\bar{D}_0}{2(2-\mu)} \left(\frac{1}{\omega^{2-\mu}} - \tau_{\min}^{2-\mu} \right) \\ &\simeq \frac{\bar{D}_0}{2(2-\mu)} \frac{1}{\omega^{2-\mu}}, \end{aligned} \quad (\text{S1})$$

and the latter approximation holds true for $\omega \ll \tau_{\min}^{-1}$. One observes that the Lorentzian broadening (with broad high-frequency tails) and the rectangular broadening (where the high-frequency part is absent) lead to the same frequency dependence of the spectral function, $S_M(\omega) \propto \frac{1}{\omega^{2-\mu}}$. It demonstrates that the details of the delta-function broadening are not essential for $S_M(\omega)$.

Nevertheless, several numerical studies have recently observed a Lorentzian form of the spectral function in models close to integrable points [1–3]. Moreover, the Lorentzian form of the spectral function for spin imbalance is consistent with the standard diffusion [4]. We consider a system using fermionic representation, which at time $t = 0$ has spatially periodic distribution of particles, $n_i(0) = C_0 \cos(qi)$. In the diffusive regime, the amplitude decays exponentially in time, $C(t) = C_0 \exp[-D_q q^2 t]$, where the diffusion constant is $D_{\text{diff}} = \lim_{q \rightarrow 0} D_q$. Then, the Fourier transform of $C(t)$ is a Lorentzian. The same is expected also for the spin imbalance studied here, which in the fermionic representation reads $\hat{A} \propto \sum_i \cos(\pi i) (\hat{n}_i - 1/2) \propto \hat{n}_{q=\pi}$.

S3. DETAILS ABOUT THE FITTING

So far most of the analytical considerations focused on properties of the spectral function $S_M(\omega)$ from Eq. (6). The function that we actually fit to the numerical values of $\tilde{I}(\omega)$ is

$$\begin{aligned} \tilde{I}_M(\omega) &= \int_{-\omega}^{\omega} d\omega' \frac{\bar{D}_0}{\pi} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} \frac{d\tau}{\tau^{\mu-1}} \frac{1}{(\omega'\tau)^2 + 1} \\ &= \frac{2\bar{D}_0}{\pi} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} \frac{d\tau}{\tau^\mu} \arctan(\omega\tau), \end{aligned} \quad (\text{S2})$$

where the fitting parameters are μ , τ_{\min} and τ_{\max} that determine the distribution of relaxation times $f_\tau(\tau)$, and the prefactor \bar{D}_0 . Since the results span over a few orders of magnitude, we fit $\log[\tilde{I}_M(\omega)]$ to $\log[\tilde{I}(\omega)]$ for $\omega < 0.2$. We bound the parameters $0 < \mu < 2$, $0.1 < \tau_{\min} < 20$, $20 < \tau_{\max} < \tau_{\max}^{(\infty)}$ and $0 < \bar{D}_0 < 1$. At $L = 16$, $\tau_{\max}^{(\infty)}$ is either 10^4 or infinity (see the discussion below). In the case when $\tau_{\max} \rightarrow \infty$, the exponent μ is also bounded from below, $\mu > 1$, otherwise $f_\tau(\tau)$ can not be properly normalized. For smaller systems $L = 14$ and $L = 12$ this

bound is rescaled, respectively, down to 2666 and 718, so that $\tau_{\max}^{(\infty)}/\mathcal{D}$ is the same for all system sizes.

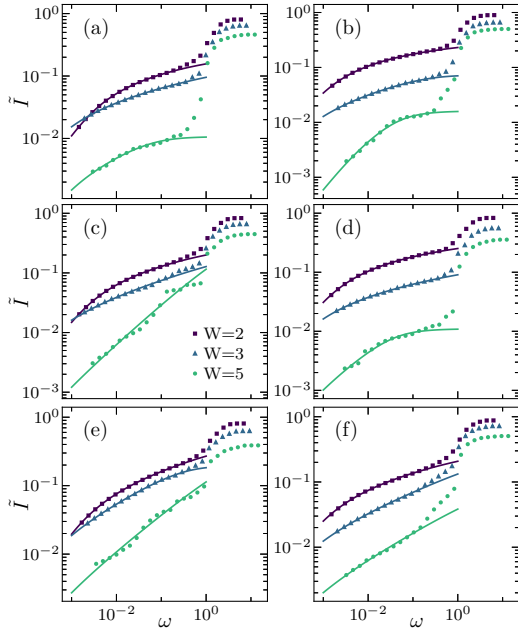


FIG. S3. Symbols: numerical results for $\tilde{I}(\omega)$ at $L = 16$ and a single realization of the disorder. Lines: predictions for $\tilde{I}_M(\omega)$ for the low-frequency regime $\omega < 0.2$. Different panels correspond to different realizations of the disorder.

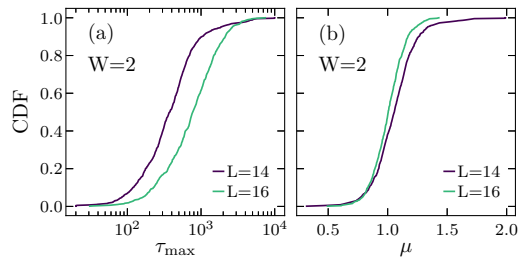


FIG. S4. The cumulative distribution functions (CDF) of the fitting parameters τ_{\max} in (a) and μ in (b). The fitting is performed independently for each realization of the disorder. We perform the fitting for 10^3 realizations of the disorder at $W = 2$ and $L = 14, 16$.

A. Fitting results for a single disorder realization

The main advantage of studying the *integrated* spectral function $\tilde{I}(\omega)$ is that one may analyze results obtained for various realizations of the disorder without averaging over them. The fits of the phenomenological model $\tilde{I}_M(\omega)$ [lines] to numerical results $\tilde{I}(\omega)$ [symbols] is shown for a single realization in Fig. 3(a) in the main text, and for six other realizations in Fig. S3. In all the cases, the agreement is excellent.

We carried out, in total, the fitting procedure for 10^3 realizations of the disorder and studied the distributions of the fitting coefficients τ_{\max} and μ . First, we note that the distributions of τ_{\max} are very broad [cf. Fig. 3(b) of the main text and Fig. S4(a)], i.e., the realization-to-realization fluctuations may differ by an order of magnitude. Second, we observe that the average of τ_{\max} increases when both W or L are increased. The increase with W is shown in Fig. 3(b) of the main text, while the increase with L at $W = 2$ is shown in Fig. S4(a). This dependence is discussed in more detail below. We note that at $W = 2$ (i.e., when $\tau_{\max} \approx t_H = \omega_H^{-1}$), the distribution of μ is peaked around $\mu = 1$, and it exhibits only a weak L dependence, see Fig. S4(b).

B. Fitting results for disorder averages

We complement previous results by studying the results of fitting the function $\tilde{I}_M(\omega)$ from Eq. (S2) to the disorder averaged numerical values of $\tilde{I}(\omega)$. The latter are averaged over 10^3 realizations of the disorder. We obtain an excellent agreement between $\tilde{I}_M(\omega)$ and $\tilde{I}(\omega)$, as shown in Fig. 4 in the main text. Here we comment on the values of the fitting parameters τ_{\max} and μ .

We observe several interesting features of τ_{\max} (we focus on $L = 16$). It increases very rapidly (approximately exponentially) with W and it reaches the Heisenberg time t_H at $W^* \approx 2$, see Figs. S5(a) and S5(b). When $\tau_{\max} > t_H$, the diffusive character of the dynamics in a finite system disappears completely. One may argue that τ_{\max} quantitatively resembles the scaling of the Thouless time t_{Th} obtained from the spectral form factor [5]. Intriguingly, the criterion $t_{\text{Th}} \approx t_H$ provides an accurate tool to pinpoint the Anderson localization transition in three dimensions studied by the spectral form factor [6, 7]. Despite this similarity, we note that τ_{\max} was introduced as a fitting parameter of the phenomenological model in Eqs. (6) and (S2), with no apparent formal similarity with t_{Th} . It is important to stress that in the regime $\tau_{\max} > t_H$, the quality of the fits does not strongly depend on τ_{\max} . This uncertainty of τ_{\max} is marked by the shaded area in Fig. S5(b).

The relevance of the above discussion can also be seen in the analysis of μ in Fig. S5(c). There are two lines in Fig. S5(c) at $W > 3$: the dashed line (with triangles) corresponds to the results for μ when τ_{\max} is sent to infinity (i.e., τ_{\max} is not a fitting parameter any more), while the

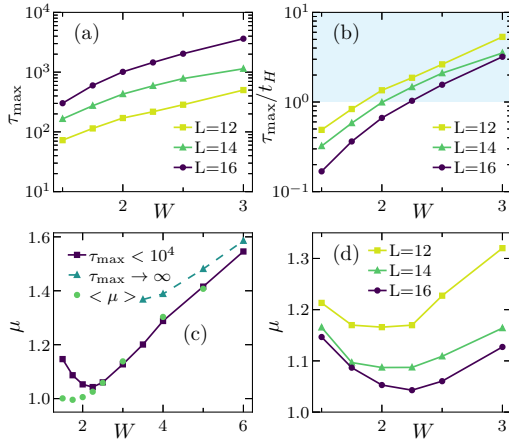


FIG. S5. Results from spectral functions which were averaged over 10^3 realizations of disorder. (a) and (b) τ_{\max} and τ_{\max}/t_H , respectively, as a function of the disorder W at $L = 12, 14, 16$. The shaded region in (b) marks the regime $\tau_{\max}/t_H > 1$. Unless stated otherwise, we obtain τ_{\max} and μ by fitting the function $\tilde{I}_M(\omega)$ from Eq. (S2) to the disorder averaged numerical values of $\tilde{I}(\omega)$, as explained in Sec. S3 B. (c) μ vs W at $L = 16$. The upper bound for τ_{\max} is either $\tau_{\max}^{(\infty)} = 10^4$ (squares) or $\tau_{\max}^{(\infty)} = \infty$ (triangles). Circles correspond to the averages of distributions of μ obtained from the fitting procedure described in Sec. S3 A. (d) μ vs W at $L = 12, 14, 16$.

solid line (with squares) corresponds to the results for μ when $\tau_{\max}^{(\infty)} = 10^4$ (as an estimate, $t_H \approx 10^3$ at $L = 16$). A reasonable agreement between both lines confirms that the choice of τ_{\max} at large W is less important, provided that it satisfies $\tau_{\max} > t_H$.

The main goal of this work is to establish a phenomenological model to describe the low-frequency dynamics, based on the proximity to the Anderson insulator and the emergent power-law distribution of relaxation times of the Anderson LIOMs. A quantitative determination of the power-law exponent μ of the relaxation time distribution in the thermodynamic limit is beyond the scope of this work. Still, in Figs. S5(c) and S5(d) we report some properties of μ as a function of W and L . We first stress that in the regime $W < W^* \approx 2$, the bounds τ_{\min} and τ_{\max} of the distribution may still be quantitatively close to each other and hence the determination of μ is more ambiguous. This can be seen in Figs. S5(c) and S5(d) as the departure of μ from $\mu = 1$ when fitting the results for the disorder averaged $\tilde{I}(\omega)$ [solid line with squares in Fig. S5(c)]. In contrast, the mean value of μ obtained after fitting results for every disorder realization separately remains very close to 1 when $W < W^*$ [circles in Fig. S5(c)]. In the opposite regime $W > W^*$, μ increases as a function of W for both types of fitting procedure.

However, as argued above, in this regime the width of the power-law distribution of relaxation times is larger than the range of numerically accessible frequencies, and hence the flow of μ when approaching the thermodynamic limit may be ambiguous. Finally, in Fig. S5(d) we show results for μ in the vicinity of $W \approx W^*$ for the three system sizes $L = 12, 14, 16$. When increasing L the value of μ shrinks to lower values, and it eventually approaches the regime $\mu \approx 1$, at least for the given interval of disorders.

S4. ANDERSON LIOMS IN INTERACTING SYSTEMS AT $\Delta > 0$

Our phenomenological approach that quantitatively describes the dynamics of the imbalance in the random field Heisenberg chain is based on an assumption that (at least some) Anderson LIOMs, \hat{Q}_α , decay in interacting systems ($\Delta > 0$) with a finite relaxation time τ_α , and that τ_α are random variables with a broad, power-law distribution. Moreover, the projections of the spin imbalance on various Anderson LIOMs [see Eq. (5) in the main text] have been approximated by the average projection. In this section, we present numerical results that directly support these conjectures and approximations.

For convenience we study the fermionic model,

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + J\Delta \sum_i \hat{n}_i \hat{n}_{i+1}, \quad (\text{S3})$$

$$\hat{H}_0 = \frac{J}{2} \sum_i (\hat{a}_{i+1}^\dagger \hat{a}_i + \text{H.c.}) + \sum_i h_i \hat{n}_i, \quad (\text{S4})$$

which is, up to a constant term, equivalent to the Hamiltonian (1) in the main text. Here, \hat{a}_i^\dagger creates a spinless fermion at site i and $\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$.

For each configuration of the disorder, we determine the Anderson states $|\alpha\rangle$ and the relevant operators, $\hat{a}_\alpha^\dagger = \sum_i \langle i|\alpha\rangle \hat{a}_i^\dagger$, which diagonalize the single particle Hamiltonian (S4), $\hat{H}_0 = \sum_\alpha \epsilon_\alpha \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha$. Then, using the full Hamiltonian from Eq. (S3) we study the dynamics of the one-body Anderson LIOMs, $\hat{Q}_\alpha = 2(\hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha - \frac{1}{2})$, which are normalized and mutually orthogonal, $\langle \hat{Q}_\alpha \hat{Q}_{\alpha'} \rangle = \delta_{\alpha, \alpha'}$. Here, we do not consider the products of \hat{Q}_α (e.g., $\hat{Q}_\alpha \hat{Q}_{\alpha'} \hat{Q}_{\alpha''}$) even though they may also contribute to the Mazur bound [Eq. (4) in the main text], especially at weak disorder. In analogy to Eqs. (2) and (3) in the main text, for each realization of the disorder and each \hat{Q}_α we determine the spectral functions $S_\alpha(\omega)$ and the integrated spectral functions $I_\alpha(\omega)$,

$$S_\alpha(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t - |t|0^+} \langle e^{i\hat{H}t} \hat{Q}_\alpha e^{-i\hat{H}t} \hat{Q}_\alpha \rangle, \quad (\text{S5})$$

$$\begin{aligned} I_\alpha(\omega) &= \int_{-\omega}^{\omega} d\omega' S_\alpha(\omega') \\ &= \frac{1}{\mathcal{D}} \sum_{m,n=1}^{\mathcal{D}} \theta(\omega - |E_m - E_n|) \langle m|\hat{Q}_\alpha|n\rangle^2. \end{aligned} \quad (\text{S6})$$

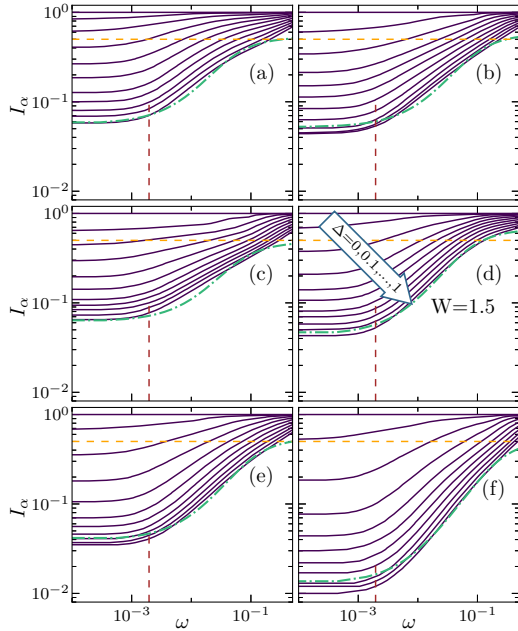


FIG. S6. Integrated spectral functions of the Anderson LIOMs, Eq. (S6), at $W = 1.5$ and $L = 14$. Each panel shows results for one Anderson LIOM and a single realization of disorder. Various curves have been obtained for $\Delta = 0, 0.1, \dots, 1$, as it is indicated by an arrow in panel (d). The frequency for which $I_\alpha(\omega) = 1/2$, see the horizontal dashed lines, defines the relaxation rate $\Gamma_\alpha = \omega$ via Eq. (S7). Vertical dashed curves mark the Heisenberg energy, $\omega_H = 1/t_H$, calculated at $\Delta = 1$. Dashed-dotted (green) lines show a low-frequency fit ($\omega < 0.3$) to the numerical results at $\Delta = 1$. Here, we have used the fitting function $I_{\text{fit}} = f_1 \arctan(f_2 \omega) + f_3$, where f_i are the fitting parameters.

Figure S6 shows $I_\alpha(\omega)$ where each panel contains results for a single α and one realization of disorder. Various curves demonstrate how the integrated spectral function changes upon increasing Δ starting from the noninteracting system at $\Delta = 0$. In the latter case, $I_\alpha(\omega)$ is a step function since \hat{Q}_α are strictly conserved. However, $I_\alpha(\omega)$ broadens at $\Delta > 0$ reflecting the onset of a finite relaxation time τ_α . In the low-frequency regime, this broadening may be reasonably well fitted by $I_{\text{fit}} = f_1 \arctan(f_2 \omega) + f_3$, see the dashed-dotted lines, in accordance with the Lorentzian broadening introduced in Eq. (5) in the main text. Here, the fitting parameter f_3 reproduces the saturation of the spectral function when the frequency is smaller than the Heisenberg energy ω_H .

We quantitatively obtain the relaxation time τ_α by approximating the autocorrelation function by an exponential function, $\langle e^{i\hat{H}t} \hat{Q}_\alpha e^{-i\hat{H}t} \hat{Q}_\alpha \rangle \propto \exp(-t/\tau_\alpha)$, which us-

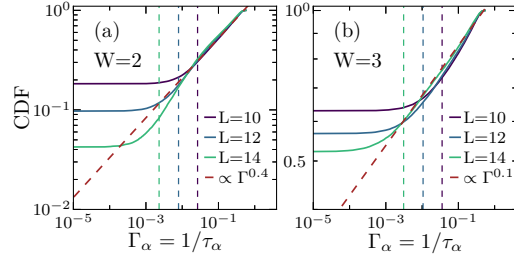


FIG. S7. Cumulative distribution functions (CDF) of the relaxation rates, $\Gamma_\alpha = \frac{1}{\tau_\alpha}$, defined via Eq. (S7). Results are obtained for 10^3 realizations of the disorder and for all one-body Anderson LIOMs \hat{Q}_α , with $\alpha = 1, \dots, L$. The dashed vertical lines mark the Heisenberg energy $\omega_H = 1/t_H$.

ing Eqs. (S5) and (S6) implies that

$$I_\alpha\left(\omega = \frac{1}{\tau_\alpha}\right) = \frac{1}{2}. \quad (\text{S7})$$

Solving Eq. (S7) allows for a simple numerical extraction of the relaxation rate, $\Gamma_\alpha = \frac{1}{\tau_\alpha}$, for each realization of the disorder and each \hat{Q}_α .

Figures S7(a) and S7(b) show the cumulative distribution functions (CDF) of the relaxation rates, obtained at $W = 2$ and $W = 3$, respectively. The distributions have been obtained from 10^3 realizations of the disorder and for all one-body Anderson LIOMs, $\alpha = 1, \dots, L$. The vertical lines mark the values of the inverse Heisenberg time ω_H . One observes that the relaxation rates obtained for various realizations of the disorder may differ by a few orders of magnitude. Results in Fig. S7 allow us also to test the conjecture that the probability density for the relaxation times is $f_\tau(\tau) \propto 1/\tau^\mu$ with $\mu < 2$. The CDF of Γ_α is related to $f_\tau(\tau)$ via the following relation

$$\text{CDF}_\Gamma = \int_{\Gamma^{-1}}^{\tau_{\text{max}}} d\tau f_\tau(\tau) \propto \left(\Gamma^{\mu-1} - \frac{1}{\tau_{\text{max}}^{\mu-1}} \right). \quad (\text{S8})$$

It means that for the assumed distribution, $f_\tau(\tau)$, one expects $\text{CDF}_\Gamma \propto \Gamma^{\mu-1}$ for $\Gamma \gg \tau_{\text{max}}^{-1}$. Figures S7(a) and S7(b) show that at $\Gamma > \omega_H$ we indeed observe the power-law form of CDF_Γ with $\mu \simeq 1.4$ and $\mu \simeq 1.1$ at $W = 2$ and $W = 3$, respectively. The latter values of the exponent μ reasonably agree with results in Figs. S5(c) and S5(d) in the preceding section.

In the main text we have also assumed that the projections of the spin imbalance on the Anderson LIOMs [D_α in Eq. (5) in the main text] are not essential and can be replaced by an average value $D_\alpha \simeq \text{const}$. The minimal requirement for this approximation to hold true is the absence of any significant correlations between τ_α and D_α . Figures S8(a) and S8(b) show the pairs of both quantities $(\Gamma_\alpha, D_\alpha)$ obtained for various realizations of the disorder and various α . For a broad range of the relaxation rates,

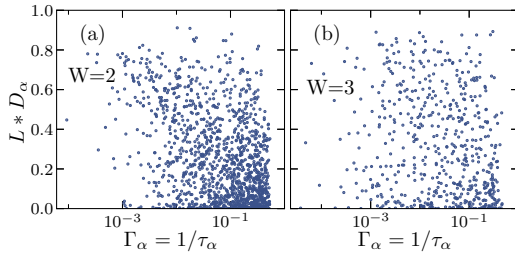


FIG. S8. Correlations between the projections of spin imbalance on the Anderson LIOMs, D_α , [see Eq. (4) in the main text] and the relaxation rates $\Gamma_\alpha = 1/\tau_\alpha$ of the Anderson LIOMs [see Eq. (S7)]. Various points correspond to different realizations of the disorder or different Anderson LIOMs. Results have been obtained at $L = 14$ and (a) $W = 2$ and (b) $W = 3$.

$10^{-4} < \Gamma_\alpha < 10^{-1}$, the projections seem to cover the entire window of accessible values of $D_\alpha \in (0, L^{-1})$. Therefore, we expect that the approximation that decouples the relaxation times τ_α from D_α does not introduce any significant error to the dynamics of the spin imbalance.

-
- [1] M. Mierzejewski, T. Prosen, and P. Prelovšek, Approximate conservation laws in perturbed integrable lattice models, *Phys. Rev. B* **92**, 195121 (2015).
 - [2] C. Schönle, D. Jansen, F. Heidrich-Meisner, and L. Vidmar, Eigenstate thermalization hypothesis through the lens of autocorrelation functions, *Phys. Rev. B* **103**, 235137 (2021).
 - [3] T. LeBlond, D. Sels, A. Polkovnikov, and M. Rigol, Universality in the onset of quantum chaos in many-body systems, [arXiv:2012.07849](https://arxiv.org/abs/2012.07849).
 - [4] P. Prelovšek, M. Mierzejewski, J. Krsnik, and O. S. Barišić, Many-body localization as a percolation phenomenon, *Phys. Rev. B* **103**, 045139 (2021).
 - [5] J. Šuntajs, J. Bonča, T. Prosen, and L. Vidmar, Quantum chaos challenges many-body localization, *Phys. Rev. E* **102**, 062144 (2020).
 - [6] J. Šuntajs, T. Prosen, and L. Vidmar, Spectral properties of three-dimensional Anderson model, *Annals of Physics* **168469** (2021).
 - [7] P. Sierant, D. Delande, and J. Zakrzewski, Thouless Time Analysis of Anderson and Many-Body Localization Transitions, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 186601 (2020).

ROZDZIAŁ

5

Restoring Ergodicity in a Strongly Disordered Interacting Chain

W poprzednim rozdziale pokazano, że zakładając „bliskość” modelu oddziałującego do jego nieoddziałującego odpowiednika, można z powodzeniem wyjaśnić jego własności. Naturalnie pojawia się pytanie: Dlaczego takie założenie prowadzi do poprawnych rezultatów? Zainspirowani tym pytaniem, w artykule [A2] badamy przyczyny, dla których model MBL można traktować jako słabo zaburzony izolator Andersona, pomimo że potencjał oddziaływania jest stosunkowo duży, rzędu całki przeskoku. Wskazujemy również przyczyny trudności w interpretacji wyników numerycznych dotyczących własności MBL w granicy termodynamicznej oraz pokazujemy, dlaczego dokładne i wydawałoby się ściśle obliczenia numeryczne mogą prowadzić do sprzecznych wniosków.

Badając model fermionowy (zdefiniowany analogicznie do równania 3.5 z małą zmianą $n_j \rightarrow \tilde{n}_j \equiv n_j - \frac{1}{2}$):

$$H = t \sum_j \left(c_j^\dagger c_{j+1} + \text{H.c.} \right) + V \sum_j \tilde{n}_j \tilde{n}_{j+1} + \sum_j \epsilon_j \tilde{n}_j, \quad (5.1)$$

pokazujemy, że jedynie niewielka, lecz niezerowa część oddziaływania stanowi *rzeczywiste zaburzenie* izolatora Andersona. Innymi słowy, w przypadku silnego nieporządku, oddziałujący układ należy postrzegać jako słabo zaburzony izolator Andersona. Dominująca część oddziaływań nie wpływa na dynamikę układu. Ta perspektywa wyjaśnia, dlaczego procedura oparta na „bliskości” modelu oddziałującego do limitu nieoddziałującego z poprzedniego rozdziału (Rozdział 4) działa tak dobrze.

Kluczową konsekwencją jest to, że dla stosunkowo małych rozmiarów układu, szczególnie przy dużych wartościach nieporządku, siła zaburzenia jest zbyt mała,

aby mogło ono mieć wpływ w obliczeniach numerycznych. Typowe wskaźniki ergodyczności, takie jak statystyka poziomów, dynamika entropii splątania oraz czasy relaksacji lokalnych obserwabli, wyliczane numerycznie dla modeli MBL, mogą być niewiarygodne. Dlatego ich analiza może prowadzić do sprzecznych wniosków.

W celu uzyskania tych rezultatów proponujemy procedurę numeryczną, która umożliwia podział oddziaływania

$$H_{\Delta} = \Delta \sum_{j=1}^L \left(n_j - \frac{1}{2} \right) \left(n_{j+1} - \frac{1}{2} \right), \quad (5.2)$$

gdzie n_j jest operatorem gęstości obsadzenia na węźle j -tym, na dwie prostopadłe części:

1. H_{Δ}^{\perp} - operator nieposiadający projekcji na podprzestrzeń liniową rozpinaną przez całki ruchu izolatora Andersona,
2. H_{Δ}^{\parallel} - operator będący kombinacją liniową całek ruchu izolatora Andersona.

Aby wprowadzić taką procedurę konieczne jest zdefiniowanie „prostopadłości” operatorów. Innymi słowy, musimy wprowadzić iloczyn wewnętrzny w przestrzeni operatorów. W tym celu wykorzystujemy iloczyn Hilberta-Schmidta

$$(A|B) = \frac{1}{Z} \text{Tr}(A^{\dagger} B) = \langle A^{\dagger} B \rangle, \quad (5.3)$$

gdzie Z oznacza wymiar przestrzeni Hilberta. Ponieważ rozważamy jedynie operatory hermitowskie, możemy je pominąć sprzężenie hermitowskie. Czynnikiem $\frac{1}{Z}$ wprowadzamy, aby norma typowych obserwabli (np. operatora liczby cząstek n_j) była skończona także w granicy termodynamicznej $L \rightarrow \infty$. Warto zauważyć, że $\langle AB \rangle$ jest średnią operatora AB wyznaczoną dla nieskończonej temperatury. Zastosowanie takiego iloczynu w kontekście MBL jest uzasadnione, gdyż własności tych układów badamy głównie w reżimie nieskończonych temperatur (ze względu na to, że przewiduje się, że MBL występuje w dowolnie wysokiej temperaturze [2], a nieskończona temperatura jest najłatwiejsza do badania). Oznaczając całki ruchu jako Q_{α} , gdzie α numeruje węzeł, na którym zlokalizowany jest stan Andersona, otrzymujemy

$$H_{\Delta}^{\parallel} = \sum_{\alpha} \langle H_{\Delta} Q_{\alpha} \rangle Q_{\alpha} + \sum_{\alpha, \beta} \langle H_{\Delta} Q_{\alpha} Q_{\beta} \rangle Q_{\alpha} Q_{\beta} \quad (5.4)$$

$$H_{\Delta}^{\perp} = H - H_{\Delta}^{\parallel} \quad (5.5)$$

Można pokazać, że pierwszy wyraz w równaniu 5.4 znika, a największe znaczenie mają projekcje $\langle H_{\Delta} Q_{\alpha} Q_{\beta} \rangle$. Operator $Q_{\alpha} Q_{\beta}$ jest również całką ruchu izolatora

Andersona, przy czym Q_α i Q_β odpowiadają stanom Andersona, które znajdują się blisko siebie w przestrzeni rzeczywistej (co zapewnia lokalność operatora).

Operator H_Δ^\parallel nie wpływa zatem na własności układu, a operator H_Δ^\perp stanowi *rzeczywiste zaburzenie* dla izolatora Andersona. Co ważne, operator H_Δ^\perp jest operatorem lokalnym, a jego norma maleje w miarę wzrostu nieporządku, jak $1/W$.

Proponujemy nowy model, w którym zaburzenie nie zmniejsza się wraz z siłą nieporządku. Model powstaje poprzez dodanie do modelu Andersona odpowiednio przeskalowanego operatora H_Δ^\perp . Skalowanie jest dobrane w taki sposób, aby lokalna gęstość operatora oddziaływania była równa lokalnej gęstości energii izolatora Andersona. Otrzymany Hamiltonian jest lokalny, co wynika bezpośrednio z lokalności operatora H_Δ^\perp .

Tak zdefiniowany model, nazwany *modelem przeskalowanym*, jest ergodyczny nawet w przypadku skrajnie wysokiego nieporządku $W = 100$, co potwierdzają badania energii oraz stanów własnych modelu. Analiza elementów macierzowych obsadzeń w bazie własnej modelu wykazuje zgodność z przewidywaniami ETH. Analiza spektralna ujawnia wyraźny trend średniej wartości wskaźnika *gap ratio* w kierunku wartości r_{GOE} (typowej dla układów ergodycznych) wraz ze wzrostem rozmiaru układu. Co więcej, rozkłady przerw między kolejnymi poziomami energetycznymi dobrze odpowiadają statystyce Wignera–Dysona, co potwierdza ergodyczny charakter modelu przeskalowanego.

Najważniejszy wynik tej pracy jest konsekwencją następującej obserwacji: obliczenia numeryczne prowadzone dla skończonych układów są nieczułe na zbyt słabe zaburzenie. Zwiększając nieporządek w najczęściej badanym modelu MBL (równanie 3.5), otrzymujemy model Andersona z coraz słabszym zaburzeniem. Dla dostatecznie silnego nieporządku wyniki numeryczne należy uznać za niewiarygodne, chociaż dokładna wartość nieporządku nie jest precyzyjnie określona.

Restoring Ergodicity in a Strongly Disordered Interacting Chain

B. Krajewski¹, L. Vidmar^{2,3}, J. Bonča^{3,2} and M. Mierzejewski¹

¹*Department of Theoretical Physics, Faculty of Fundamental Problems of Technology, Wrocław University of Science and Technology, 50-370 Wrocław, Poland*

²*Department of Theoretical Physics, J. Stefan Institute, SI-1000 Ljubljana, Slovenia*

³*Department of Physics, Faculty of Mathematics and Physics, University of Ljubljana, SI-1000 Ljubljana, Slovenia*

 (Received 13 September 2022; accepted 6 December 2022; published 20 December 2022)

We consider a chain of interacting fermions with random disorder that was intensively studied in the context of many-body localization. We show that only a small fraction of the two-body interaction represents a true local perturbation to the Anderson insulator. While this true perturbation is nonzero at any finite disorder strength W , it decreases with increasing W . This establishes a view that the strongly disordered system should be viewed as a weakly perturbed integrable model, i.e., a weakly perturbed Anderson insulator. As a consequence, the latter can hardly be distinguished from a strictly integrable system in finite-size calculations at large W . We then introduce a rescaled model in which the true perturbation is of the same order of magnitude as the other terms of the Hamiltonian, and show that the system remains ergodic at arbitrary large disorder.

DOI: [10.1103/PhysRevLett.129.260601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.129.260601)

Introduction.—The interplay between disorder and interactions in quantum systems has recently attracted significant interest. Some of the most exciting ideas were formulated within the framework of many-body localization (MBL), which is conjectured to be a phase of matter that violates ergodicity in spite of the presence of interactions [1–7].

The disordered systems exhibit several unusual properties, in particular extremely slow dynamics [8–15] that was frequently interpreted as a precursor to MBL [16–23]. However, one of the most important questions about MBL is related to its stability in the thermodynamic limit. Until recently, the results of essentially all studies in one-dimensional (1D) spin-1/2 systems with disorder were interpreted in terms of a stable MBL phase [8–12,24–48]. Recent work has, however, highlighted robustness of ergodicity at moderate disorder [49], which may eventually suggest that the stability of MBL may not be taken for granted. Signatures of robustness of ergodicity were also reported in several subsequent works [14,15,50–54], and they triggered, among others, activities to gain a better insight into the avalanche theory of ergodicity breaking transitions [55–62]. However, many recent numerical studies are interpreted in terms of the existence of a stable MBL phase [60,63–80]. Then, the MBL-to-thermal phase transition may occur at much stronger disorders than suggested by earlier numerical calculations [60].

Motivated by these open questions, it is an outstanding problem to understand why exact numerical studies can give rise to the formulation of contradictory expectations for the same models in the thermodynamic limit. More generally, what are the crucial ingredients of interacting

systems with disorder that make identification of their key physical properties so challenging?

This Letter provides new perspective into studies of robustness of ergodicity and its detection in finite systems. For the model of interacting spinless fermions with disorder, which is mappable onto the paradigmatic random-field Heisenberg chain, we show that only a small fraction of the two-body interaction represents a true local perturbation to the Anderson insulator. The true perturbation becomes smaller with increasing disorder. Eventually, the true perturbation becomes too weak at very strong disorder to be captured by finite-size numerical calculations. Consequently, the strongly disordered system should be viewed as a weakly perturbed Anderson insulator. As an application of this insight, we introduce a rescaled model in which the strength of the true perturbation matches the energy density of the Anderson insulator. We argue that the latter model remains ergodic at essentially any finite disorder, and show that the matrix elements of observables are consistent with the eigenstate thermalization hypothesis (ETH) [81–84].

Setup.—We study interacting fermions in a 1D disordered lattice with L sites and periodic boundary conditions. The system is described by the Hamiltonian $H = H_0 + H_\Delta$, referred to as the *standard model* further on. The first term describes the Anderson insulator,

$$H_0 = \sum_{i=1}^L h_i,$$

$$h_i = \frac{1}{2}(a_{i+1}^\dagger a_i + \text{H.c.}) + \frac{\epsilon_i}{2} \left(n_i - \frac{1}{2} \right) + \frac{\epsilon_{i+1}}{2} \left(n_{i+1} - \frac{1}{2} \right), \quad (1)$$

where ϵ_i is a random potential with box distribution, $-W \leq \epsilon_i \leq W$, a_i^\dagger creates a spinless fermion at site i , and $n_i = a_i^\dagger a_i$. The second term is the two-body interaction,

$$H_\Delta = \Delta \sum_{i=1}^L N_i, \quad N_i = \left(n_i - \frac{1}{2}\right) \left(n_{i+1} - \frac{1}{2}\right), \quad (2)$$

where we take $\Delta = 1$ so that H can be mapped onto the widely studied random-field Heisenberg model. The non-interacting part (i.e., the integrable part) of the Hamiltonian is diagonal in the Anderson basis

$$H_0 = \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} Q_{\alpha} + \text{const}, \quad Q_{\alpha} = 2a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha} - 1, \quad (3)$$

where $a_{\alpha} = \sum_i u_{i\alpha}^* a_i$ and $u_{i\alpha} = \langle i | \alpha \rangle$ are components of the single-particle wave function of the Anderson state α .

As a central step of our approach, we split the interaction term in Eq. (2) into two orthogonal parts,

$$H_{\Delta} = H_{\Delta}^{\parallel} + H_{\Delta}^{\perp}, \quad \text{with} \quad \langle H_{\Delta}^{\parallel} H_{\Delta}^{\perp} \rangle = 0, \quad (4)$$

where orthogonality is defined via the Hilbert-Schmidt inner product as $\langle AB \rangle = (1/Z) \text{Tr}(A^{\dagger} B)$, the trace is carried out over many-body states, and Z is the dimension of the Fock space. In Eq. (4), H_{Δ}^{\parallel} represents a projection of H_{Δ} onto local integrals of motion of the Anderson insulator; thus $[H_{\Delta}^{\parallel}, H_0] = 0$. As a consequence, we identify the interaction in H_{Δ}^{\perp} as a *true perturbation* to the Anderson insulator, and we argue that it represents a local Hamiltonian. The idea of our approach is sketched in Fig. 1(a). Here, locality of operators (e.g., h_i or N_i) refers to the size of their support in real space which is fixed and does not grow with L . Linear combinations of the latter operators (e.g., H_0 or H_{Δ}) are also considered as local.

Below we show that the squared norm of the true perturbation $\|H_{\Delta}^{\perp}\|^2$ decays asymptotically for large W as $1/W^2$, whereas the squared norm of the Anderson model $\|H_0\|^2$ grows as W^2 . Then, for sufficiently large W , the perturbation appears to be too weak to break integrability of a finite system. Here, the squared norms of observables are defined as $\|A\|^2 = \langle AA \rangle$.

Local integrals of motion.—The traceless operators Q_{α} from Eq. (3) represent the one-body local integrals of motion of the Anderson insulator. We briefly refer to them as LIOMs. We sort them according to the maxima of the single-particle wave functions $u_{i\alpha}$, i.e., we find $i_{\alpha} = \max_i |u_{i\alpha}|$ and sort them such that $i_{\alpha} \leq i_{\alpha'}$ for $\alpha \leq \alpha'$. Roughly speaking, for open boundary conditions the Anderson states with $\alpha \ll L$ are localized at the left edge of the system whereas the states with $\alpha \sim L$ are localized at the right edge. Importantly, a remarkable property of the Anderson insulator is that not only the LIOMs Q_{α} are local,

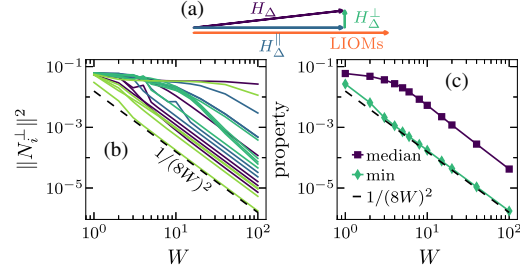


FIG. 1. (a) Sketch of the construction in Eq. (4). (b) Dependence of $\|N_i^{\perp}\|^2$ on W , where various curves of the same color correspond to different i but the same disorder realization [we keep $\epsilon_i/W = \text{const}$ when increasing W]. Various colors correspond to different realizations of disorder. (c) Two statistical properties of $\|N_i^{\perp}\|^2$ from 10^4 curves as those in (b): median and minimum. Dashed line is the lower bound $1/(8W)^2$; see the Supplemental Material [85]. The results in (b),(c) are obtained at $L = 14$ and $L/2$ fermions.

but so also are their products, $Q_{\alpha,d}^{(2)} \equiv Q_{\alpha} Q_{\alpha+d}$, provided that the distance $d = 1, \dots, d_{\max}$ is small compared with L and d_{\max} does not grow with the system size [86]. We briefly refer to these $Q_{\alpha,d}^{(2)}$ as two-body LIOMs.

It is straightforward to show that H_{Δ} from Eq. (2) has no projection on traceless LIOMs Q_{α} ; see the Supplemental Material [85] for details. Therefore, we introduce an operator N_i^{\parallel} that is a linear combination of two-body LIOMs, such that

$$N_i^{\parallel} = \sum_{d=1}^{d_{\max}} \sum_{\alpha=1}^L \langle Q_{\alpha,d}^{(2)} N_i \rangle Q_{\alpha,d}^{(2)}, \quad N_i^{\perp} = N_i - N_i^{\parallel}. \quad (5)$$

The operator N_i^{\parallel} can be interpreted as a projection of a local interaction onto two-body LIOMs, and hence it corresponds to an interaction that does not break integrability of the Anderson insulator. In contrast, N_i^{\perp} can be viewed as the true perturbation.

We stress two important technical details. First, we only consider results for $d_{\max} = 2$ in this Letter, whereas in the Supplemental Material [85] we show that additional contributions coming from $d_{\max} > 2$ are negligible at strong disorder. Second, in the Fock space that consists of 2^L many-body configurations, the occupations of LIOMs Q_{α} are independent and their products $Q_{\alpha,d}^{(2)}$ are mutually orthogonal and normalized, i.e., $\langle Q_{\alpha,d}^{(2)} Q_{\alpha',d'}^{(2)} \rangle = \delta_{\alpha,\alpha'} \delta_{d,d'}$. As a consequence, Eq. (5) represents an orthogonal projection for which $\langle N_i^{\parallel} N_i^{\perp} \rangle = 0$. However, the actual calculations are carried out in a subspace with $L/2$ fermions, in which the LIOMs are not independent since $\sum_{\alpha} Q_{\alpha} = 0$, and their products are not traceless since

$\langle Q_{\alpha,d}^{(2)} \rangle = O(1/L)$. Then, one needs to reorthogonalize the set of $Q_{\alpha,d}^{(2)}$, as explained in the Supplemental Material [85].

Norm of the true perturbation.—We can now express H_{Δ}^{\parallel} and H_{Δ}^{\perp} from Eq. (4) using Eq. (5) as

$$H_{\Delta}^{\parallel} = \Delta \sum_{i=1}^L N_i^{\parallel} \quad \text{and} \quad H_{\Delta}^{\perp} = \Delta \sum_{i=1}^L N_i^{\perp}. \quad (6)$$

Since Eq. (5) assures locality of N_i^{\parallel} and N_i^{\perp} , then H_{Δ}^{\parallel} and H_{Δ}^{\perp} are also local as they are defined as linear combinations of local operators N_i and $Q_{\alpha,d}^{(2)}$. The physical meaning of H_{Δ}^{\perp} can be understood by inspecting the identity (see the Supplemental Material [85] for a derivation)

$$\|H_{\Delta}^{\perp}\|^2 = \|H_{\Delta}\|^2 - \sum_{\alpha,d} \langle H_{\Delta} Q_{\alpha,d}^{(2)} \rangle^2, \quad (7)$$

which shows that the more two-body LIOMs $Q_{\alpha,d}^{(2)}$ one takes, the smaller is the norm of H_{Δ}^{\perp} . Indeed, the essence of our approach is a systematic elimination of local contributions to H_{Δ} which commute with the integrable Hamiltonian H_0 .

Figures 1(b) and 1(c) study the dependence on W of the squared norms $\|N_i^{\perp}\|^2$ that contribute to the norm of H_{Δ}^{\perp} in Eq. (6). Each curve in Fig. 1(b) is obtained for a single site i and a single realization of disorder, while Fig. 1(c) shows the median and the minimum of 10^4 curves as those in Fig. 1(b). One observes huge fluctuations between various sites and disorder realizations. Nevertheless, at sufficiently large W all curves eventually decay as $\|N_i^{\perp}\|^2 \propto 1/W^2$; see Fig. 1(b). For strong disorder we establish an L -independent bound $\|N_i^{\perp}\|^2 \geq 1/(8W)^2$, which accurately reproduces the numerical results in Fig. 1(c) already at $W > 3$. The derivation of the bound and the L dependence of $\|N_i^{\perp}\|^2$ are discussed in the Supplemental Material [85].

Summarizing this part, we stress that the perturbation to the Anderson insulator is not determined by the entire interaction term but rather by the projected operators N_i^{\perp} . This perturbation becomes very weak at strong disorder, $\|N_i^{\perp}\| \sim 1/W$, but remains nonzero for arbitrary finite W . Obviously, such a small but nonvanishing perturbation poses a challenge for finite-size numerical calculations.

Ergodicity in the rescaled model.—We complement the above analysis by introducing a model in which the norm of the true perturbation does not vanish with increasing W . To this end we study the *rescaled model* Hamiltonian

$$\tilde{H} = \sum_i h_i + \sum_i \frac{\|h_i\|}{\|N_i^{\perp}\|} N_i^{\perp}, \quad (8)$$

where h_i denotes the local term (the energy density operator) of the Anderson model from Eq. (1) and N_i^{\perp}

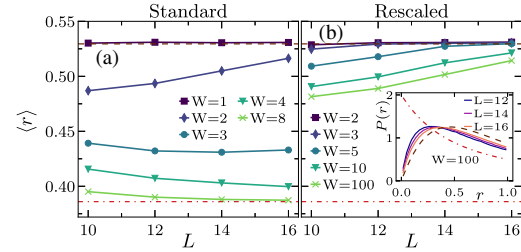


FIG. 2. Average gap ratio $\langle r \rangle$ at various L and W calculated in subspaces with $L/2$ fermions for (a) the standard model H from Eqs. (1) and (2), and (b) the rescaled model \tilde{H} from Eq. (8). The averaging is carried out over $Z/3$ levels from the middle of the spectrum and over 4000 realizations of disorder. Inset in (b): probability density function $P(r)$ in the rescaled model at $W = 100$ and various L . Dash-dotted and dashed lines show the analytical predictions for the Poisson distribution [3] and the GOE [87,88], respectively (see also the Supplemental Material [85]).

represents the density of the true perturbation from Eq. (6). Both energy density operators h_i and N_i are defined on the link between sites i and $i + 1$.

The rescaled model [Eq. (8)] associates the strength of the perturbation with the strength of the disorder. In particular, the energy density of the true perturbation, cf. the second term on the rhs of Eq. (8), equals to the energy density of the Anderson insulator, for which the squared norm is $\|h_i\|^2 = (2 + \epsilon_i^2 + \epsilon_{i+1}^2)/16$. In the standard model, this roughly corresponds to the regime $\Delta \propto W$, for which one may expect an ergodic-to-nonergodic transition. (The nonergodic phase is conjectured to be re-entrant as a function of the interaction strength; see, e.g., Fig. 1 in Ref. [12].) Below we explore robustness of ergodicity in the rescaled model [Eq. (8)].

As a simple test of ergodicity we study the average ratio of nearest level spacings $\langle r \rangle$ (i.e., the gap ratio); see the Supplemental Material [85] for a definition. The results are shown in Fig. 2(a) for the standard model H from Eqs. (1) and (2) and in Fig. 2(b) for the rescaled model \tilde{H} from Eq. (8). In the standard model the results clearly deviate from the value $r \simeq 0.53$ in the Gaussian orthogonal ensemble (GOE) already at $W \gtrsim 3$, which was observed in many previous studies; see, e.g., Ref. [29]. However, the rescaled model remains ergodic at essentially all disorders, provided that the system is sufficiently large. As an additional test, we determine a distribution of r without any averaging, i.e., via collecting results from different disorder realizations as well as different eigenstates (from the middle third of the spectra). The inset of Fig. 2(b) shows the resulting probability density function $P(r)$ at various L . A comparison with analytical results [3,85,87–89] confirms that at large L the results approach the GOE prediction even at $W = 100$.

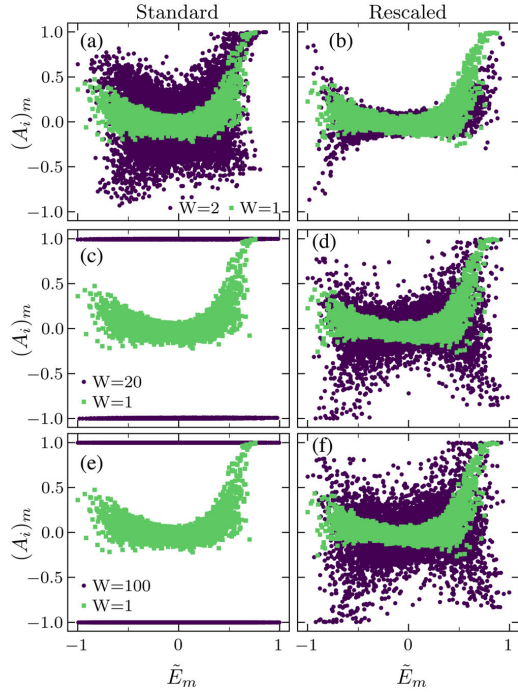


FIG. 3. Diagonal matrix elements $(A_i)_m = \langle E_m | A_i | E_m \rangle$, where $A_i = 2n_i - 1$, at $L = 16$ and different W . Results are shown for a single site i and a single realization of disorder. (a), (c), and (e) The standard model H from Eqs. (1) and (2). (b), (d), and (f) The rescaled model \tilde{H} from Eq. (8). We rescale the energies as $\tilde{E}_m = E_m / |E_0|$, where E_0 is the ground state energy.

ETH analysis.—Finally, we test ergodicity of the rescaled Hamiltonian by studying the ETH. As observables we consider site occupations $A_i = 2n_i - 1$. Note that a linear combination of A_i , the imbalance $I = \sum_i (-1)^i A_i$, has been commonly studied in the context of ergodic-nonergodic transition and is accessible in cold-atom experiments [90]. Following a standard procedure [83], we calculate the diagonal matrix elements $(A_i)_m = \langle E_m | A_i | E_m \rangle$ where $|E_m\rangle$ are the many-body eigenstates of either the standard Hamiltonian H , or the rescaled Hamiltonian \tilde{H} ; see Fig. 3. In a finite system described by the standard model, one observes $(A_i)_m = \pm 1$ at all energies at strong disorder [see Figs. 3(c) and 3(e)], and hence the ETH appears to be violated, suggesting non-ergodic behavior. However, in the rescaled model the fluctuations of matrix elements are rather modest even at extremely strong disorder $W = 100$; see Fig. 3(f).

To study fluctuations of the diagonal matrix elements we calculate the average eigenstate-to-eigenstate fluctuations [91–93],

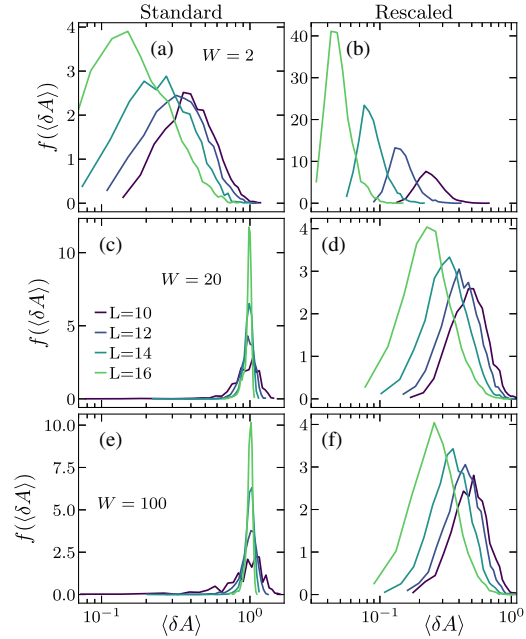


FIG. 4. Probability density function f of the eigenstate-to-eigenstate fluctuations $\langle \delta A \rangle$ from Eq. (9) for various L . The distributions are calculated at single lattice site and different realizations of disorder for (a), (c), (e) the standard model H and (b), (d), (f) the rescaled model \tilde{H} .

$$\langle \delta A \rangle = 1/\mathcal{Z} \sum_m |(A_i)_{m+1} - (A_i)_m|, \quad (9)$$

where the averaging is carried out over $\mathcal{Z} = Z/5$ states from the middle of the many-body spectrum. Figure 4 shows the probability density functions, $f(\langle \delta A \rangle)$, calculated at a single lattice site and different disorder realizations, for both the standard and the rescaled model. In the standard model one obtains $\langle \delta A \rangle \simeq 1$ at large disorder [cf. Figs. 4(c) and 4(e)], and the absence of any visible L dependence of the distributions may be interpreted as a violation of the ETH. In the rescaled model the distribution of $\langle \delta A \rangle$ is rather broad for the accessible system sizes. Nevertheless $\langle \delta A \rangle$ appears to decay with L suggesting $\langle \delta A \rangle \rightarrow 0$ in the thermodynamic limit. Because of the width of the distributions, one cannot unambiguously confirm exponential decay of the latter quantity. However, such a decay is strongly suggested by the decay of the median; see also the Supplemental Material [85].

Conclusions.—The main goal of this Letter was to identify the origin of complexity that emerges in the numerical studies of ergodicity in interacting fermions subject to random disorder. We showed that the two-body

interaction term H_Δ [Eq. (2)] cannot be considered as a perturbation to the Anderson insulator H_0 [Eq. (1)] since only a small fraction of the two-body interaction, denoted as H_Δ^\perp , does not commute with H_0 . We referred to the latter as the true local perturbation, and we showed that its relative norm decays with disorder as $\|H_\Delta^\perp\|/\|H_0\| \sim W^{-2}$. On the other hand, the norm is also bounded from below, so it remains nonzero at large but finite W . It is then clear that the interpretation of finite-size numerical calculations at large W is challenging since finite integrable systems with small perturbations are hardly distinguishable from strictly integrable systems.

It appears that the two regimes in which interpretation of numerical results has rather low ambiguity are the regime of small and moderate W , for which robustness of ergodicity was already established, and the regime where the strength of the true local perturbation H_Δ^\perp is rescaled. Here we considered the latter scenario and introduced a rescaled model in which the energy density of the perturbation equals that of the Anderson insulator. Studying the short-range level statistics and the ETH indicators in the rescaled model we showed that ergodicity persists up to extremely strong disorders, such as $W = 100$.

While focusing on 1D interacting fermions with random disorder, the main idea of our approach can be applied to an arbitrary model in any dimension. In particular, the method of identifying the true local perturbation allows for an unambiguous classification of the perturbation strength, and hence provides a new perspective into distinction between weakly and strongly perturbed integrable systems. Systems of broad interest to which the method can straightforwardly be applied in the near future are interacting fermions subject to quasiperiodic [94] or linear [95,96] potentials.

We acknowledge discussions with M. Rigol. We acknowledge support by the National Science Centre, Poland, via Project No. 2020/37/B/ST3/00020 (B. K. and M. M.), the support by the Slovenian Research Agency (ARRS), Research Core Fundings Grants No. P1-0044 (L. V. and J. B.) and No. J1-1696 (L. V.).

- [1] D. Basko, I. Aleiner, and B. Altshuler, Metal-insulator transition in a weakly interacting many-electron system with localized single-particle states, *Ann. Phys. (Amsterdam)* **321**, 1126 (2006).
- [2] I. V. Gornyi, A. D. Mirlin, and D. G. Polyakov, Interacting Electrons in Disordered Wires: Anderson Localization and Low- τ Transport, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 206603 (2005).
- [3] V. Oganesyan and D. A. Huse, Localization of interacting fermions at high temperature, *Phys. Rev. B* **75**, 155111 (2007).
- [4] R. Nandkishore and D. A. Huse, Many-body-localization and thermalization in quantum statistical mechanics, *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **6**, 15 (2015).
- [5] E. Altman and R. Vosk, Universal dynamics and renormalization in many-body-localized systems, *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **6**, 383 (2015).
- [6] F. Alet and N. Laflorencie, Many-body localization: An introduction and selected topics, *C. R. Phys.* **19**, 498 (2018).
- [7] D. A. Abanin, E. Altman, I. Bloch, and M. Serbyn, Colloquium: Many-body localization, thermalization, and entanglement, *Rev. Mod. Phys.* **91**, 021001 (2019).
- [8] M. Žnidarič, T. Prosen, and P. Prelovšek, Many-body localization in the Heisenberg XXZ magnet in a random field, *Phys. Rev. B* **77**, 064426 (2008).
- [9] M. Serbyn, Z. Papić, and D. A. Abanin, Universal Slow Growth of Entanglement in Interacting Strongly Disordered Systems, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 260601 (2013).
- [10] J. A. Kjäll, J. H. Bardarson, and F. Pollmann, Many-Body Localization in a Disordered Quantum Ising Chain, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 107204 (2014).
- [11] S. Bera, H. Schomerus, F. Heidrich-Meisner, and J. H. Bardarson, Many-Body Localization Characterized from a One-Particle Perspective, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 046603 (2015).
- [12] Y. Bar Lev, G. Cohen, and D. R. Reichman, Absence of Diffusion in an Interacting System of Spinless Fermions on a One-Dimensional Disordered Lattice, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 100601 (2015).
- [13] M. Serbyn, Z. Papić, and D. A. Abanin, Thouless energy and multifractality across the many-body localization transition, *Phys. Rev. B* **96**, 104201 (2017).
- [14] D. Sels and A. Polkovnikov, Dynamical obstruction to localization in a disordered spin chain, *Phys. Rev. E* **104**, 054105 (2021).
- [15] L. Vidmar, B. Krajewski, J. Bonča, and M. Mierzejewski, Phenomenology of Spectral Functions in Disordered Spin Chains at Infinite Temperature, *Phys. Rev. Lett.* **127**, 230603 (2021).
- [16] D. J. Luitz and Y. Bar Lev, Anomalous Thermalization in Ergodic Systems, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 170404 (2016).
- [17] D. J. Luitz and Y. Bar Lev, The ergodic side of the many body localization transition, *Ann. Phys. (Berlin)* **529**, 1600350 (2017).
- [18] M. Žnidarič, A. Scardicchio, and V. K. Varma, Diffusive and Subdiffusive Spin Transport in the Ergodic Phase of a Many-Body Localizable System, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 040601 (2016).
- [19] S. Gopalakrishnan, K. R. Islam, and M. Knap, Noise-Induced Subdiffusion in Strongly Localized Quantum Systems, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 046601 (2017).
- [20] M. Kozarzewski, P. Prelovšek, and M. Mierzejewski, Spin Subdiffusion in the Disordered Hubbard Chain, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 246602 (2018).
- [21] P. Prelovšek and J. Herbrych, Self-consistent approach to many-body localization and subdiffusion, *Phys. Rev. B* **96**, 035130 (2017).
- [22] Y. B. Lev, D. M. Kennes, C. Klöckner, D. R. Reichman, and C. Karrasch, Transport in quasiperiodic interacting systems: From superdiffusion to subdiffusion, *Europhys. Lett.* **119**, 37003 (2017).
- [23] P. Prelovšek, J. Bonča, and M. Mierzejewski, Transient and persistent particle subdiffusion in a disordered chain coupled to bosons, *Phys. Rev. B* **98**, 125119 (2018).

- [24] A. Pal and D. A. Huse, Many-body localization phase transition, *Phys. Rev. B* **82**, 174411 (2010).
- [25] C. Monthus and T. Garel, Many-body localization transition in a lattice model of interacting fermions: Statistics of renormalized hoppings in configuration space, *Phys. Rev. B* **81**, 134202 (2010).
- [26] E. Khatami, M. Rigol, A. Relaño, and A. M. García-García, Quantum quenches in disordered systems: Approach to thermal equilibrium without a typical relaxation time, *Phys. Rev. E* **85**, 050102(R) (2012).
- [27] J. H. Bardarson, F. Pollmann, and J. E. Moore, Unbounded Growth of Entanglement in Models of Many-Body Localization, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 017202 (2012).
- [28] A. De Luca and A. Scardicchio, Ergodicity breaking in a model showing many-body localization, *Europhys. Lett.* **101**, 37003 (2013).
- [29] D. J. Luitz, N. Laflorencie, and F. Alet, Many-body localization edge in the random-field Heisenberg chain, *Phys. Rev. B* **91**, 081103(R) (2015).
- [30] E. J. Torres-Herrera and L. F. Santos, Dynamics at the many-body localization transition, *Phys. Rev. B* **92**, 014208 (2015).
- [31] M. Serbyn, Z. Papić, and D. A. Abanin, Criterion for Many-Body Localization-Delocalization Phase Transition, *Phys. Rev. X* **5**, 041047 (2015).
- [32] T. Devakul and R. R. P. Singh, Early Breakdown of Area-Law Entanglement at the Many-Body Delocalization Transition, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 187201 (2015).
- [33] M. Serbyn and J. E. Moore, Spectral statistics across the many-body localization transition, *Phys. Rev. B* **93**, 041424(R) (2016).
- [34] C. L. Bertrand and A. M. García-García, Anomalous Thouless energy and critical statistics on the metallic side of the many-body localization transition, *Phys. Rev. B* **94**, 144201 (2016).
- [35] M. Mierzejewski, J. Herbrych, and P. Prelovšek, Universal dynamics of density correlations at the transition to the many-body localized state, *Phys. Rev. B* **94**, 224207 (2016).
- [36] R. Steinigeweg, J. Herbrych, F. Pollmann, and W. Brenig, Typicality approach to the optical conductivity in thermal and many-body localized phases, *Phys. Rev. B* **94**, 180401(R) (2016).
- [37] M. Filippone, P. W. Brouwer, J. Eisert, and F. von Oppen, Drude weight fluctuations in many-body localized systems, *Phys. Rev. B* **94**, 201112(R) (2016).
- [38] V. Khemani, S. P. Lim, D. N. Sheng, and D. A. Huse, Critical Properties of the Many-Body Localization Transition, *Phys. Rev. X* **7**, 021013 (2017).
- [39] V. Khemani, D. N. Sheng, and D. A. Huse, Two Universality Classes for the Many-Body Localization Transition, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 075702 (2017).
- [40] G. De Tomasi, S. Bera, J. H. Bardarson, and F. Pollmann, Quantum Mutual Information as a Probe for Many-Body Localization, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 016804 (2017).
- [41] F. Pietracaprina, G. Parisi, A. Mariano, S. Pascazio, and A. Scardicchio, Entanglement critical length at the many-body localization transition, *J. Stat. Mech.* (2017) 113102.
- [42] J. Gray, S. Bose, and A. Bayat, Many-body localization transition: Schmidt gap, entanglement length, and scaling, *Phys. Rev. B* **97**, 201105(R) (2018).
- [43] P. Sierant and J. Zakrzewski, Level statistics across the many-body localization transition, *Phys. Rev. B* **99**, 104205 (2019).
- [44] M. Schiulaz, E. J. Torres-Herrera, and L. F. Santos, Thouless and relaxation time scales in many-body quantum systems, *Phys. Rev. B* **99**, 174313 (2019).
- [45] N. Macé, F. Alet, and N. Laflorencie, Multifractal Scalings across the Many-Body Localization Transition, *Phys. Rev. Lett.* **123**, 180601 (2019).
- [46] S. Roy, J. T. Chalker, and D. E. Logan, Percolation in Fock space as a proxy for many-body localization, *Phys. Rev. B* **99**, 104206 (2019).
- [47] S. Roy and D. E. Logan, Fock-space correlations and the origins of many-body localization, *Phys. Rev. B* **101**, 134202 (2020).
- [48] M. Tarzia, Many-body localization transition in Hilbert space, *Phys. Rev. B* **102**, 014208 (2020).
- [49] J. Šuntajs, J. Bonča, T. Prosen, and L. Vidmar, Ergodicity breaking transition in finite disordered spin chains, *Phys. Rev. B* **102**, 064207 (2020).
- [50] J. Šuntajs, J. Bonča, T. Prosen, and L. Vidmar, Quantum chaos challenges many-body localization, *Phys. Rev. E* **102**, 062144 (2020).
- [51] M. Kiefer-Emmanouilidis, R. Unanyan, M. Fleischhauer, and J. Sirker, Evidence for Unbounded Growth of the Number Entropy in Many-Body Localized Phases, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 243601 (2020).
- [52] M. Kiefer-Emmanouilidis, R. Unanyan, M. Fleischhauer, and J. Sirker, Slow delocalization of particles in many-body localized phases, *Phys. Rev. B* **103**, 024203 (2021).
- [53] T. LeBlond, D. Sels, A. Polkovnikov, and M. Rigol, Universality in the onset of quantum chaos in many-body systems, *Phys. Rev. B* **104**, L201117 (2021).
- [54] D. Sels and A. Polkovnikov, Thermalization of dilute impurities in one dimensional spin chains, [arXiv: 2105.09348](https://arxiv.org/abs/2105.09348).
- [55] W. De Roeck and F. Huveneers, Stability and instability towards delocalization in many-body localization systems, *Phys. Rev. B* **95**, 155129 (2017).
- [56] D. J. Luitz, F. Huveneers, and W. De Roeck, How a Small Quantum Bath can Thermalize Long Localized Chains, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 150602 (2017).
- [57] T. Thiery, F. Huveneers, M. Müller, and W. De Roeck, Many-Body Delocalization as a Quantum Avalanche, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 140601 (2018).
- [58] P. J. D. Crowley and A. Chandran, Avalanche induced coexisting localized and thermal regions in disordered chains, *Phys. Rev. Res.* **2**, 033262 (2020).
- [59] D. Sels, Bath-induced delocalization in interacting disordered spin chains, *Phys. Rev. B* **106**, L020202 (2022).
- [60] A. Morningstar, L. Colmenarez, V. Khemani, D. J. Luitz, and D. A. Huse, Avalanches and many-body resonances in many-body localized systems, *Phys. Rev. B* **105**, 174205 (2022).
- [61] J. Šuntajs and L. Vidmar, Ergodicity Breaking Transition in Zero Dimensions, *Phys. Rev. Lett.* **129**, 060602 (2022).
- [62] P. J. D. Crowley and A. Chandran, Mean field theory of failed thermalizing avalanches, *Phys. Rev. B* **106**, 184208 (2022).

 PHYSICAL REVIEW LETTERS **129**, 260601 (2022)

- [63] R. K. Panda, A. Scardicchio, M. Schulz, S. R. Taylor, and M. Žnidarič, Can we study the many-body localisation transition?, *Europhys. Lett.* **128**, 67003 (2020).
- [64] P. Sierant, D. Delande, and J. Zakrzewski, Thouless Time Analysis of Anderson and Many-Body Localization Transitions, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 186601 (2020).
- [65] P. Sierant, M. Lewenstein, and J. Zakrzewski, Polynomially Filtered Exact Diagonalization Approach to Many-Body Localization, *Phys. Rev. Lett.* **125**, 156601 (2020).
- [66] D. Abanin, J. Bardarson, G. De Tomasi, S. Gopalakrishnan, V. Khemani, S. Parameswaran, F. Pollmann, A. Potter, M. Serbyn, and R. Vasseur, Distinguishing localization from chaos: Challenges in finite-size systems, *Ann. Phys. (Amsterdam)* **427**, 168415 (2021).
- [67] Á. L. Corps, R. A. Molina, and A. Relaño, Signatures of a critical point in the many-body localization transition, *SciPost Phys.* **10**, 107 (2021).
- [68] A. Prakash, J. H. Pixley, and M. Kulkarni, Universal spectral form factor for many-body localization, *Phys. Rev. Res.* **3**, L012019 (2021).
- [69] J. Schliemann, J. V. I. Costa, P. Wenk, and J. C. Egues, Many-body localization: Transitions in spin models, *Phys. Rev. B* **103**, 174203 (2021).
- [70] M. Hopjan, G. Orso, and F. Heidrich-Meisner, Detecting delocalization-localization transitions from full density distributions, *Phys. Rev. B* **104**, 235112 (2021).
- [71] A. Solórzano, L. F. Santos, and E. J. Torres-Herrera, Multifractality and self-averaging at the many-body localization transition, *Phys. Rev. Res.* **3**, L032030 (2021).
- [72] G. De Tomasi, I. M. Khaymovich, F. Pollmann, and S. Warzel, Rare thermal bubbles at the many-body localization transition from the Fock space point of view, *Phys. Rev. B* **104**, 024202 (2021).
- [73] P. J. D. Crowley and A. Chandran, A constructive theory of the numerically accessible many-body localized to thermal crossover, *SciPost Phys.* **12**, 201 (2022).
- [74] R. Ghosh and M. Žnidarič, Resonance-induced growth of number entropy in strongly disordered systems, *Phys. Rev. B* **105**, 144203 (2022).
- [75] N. Bölter and S. Kehrein, Scrambling and many-body localization in the XXZ chain, *Phys. Rev. B* **105**, 104202 (2022).
- [76] Y. Zhang and Y. Liang, Optimizing randomized potentials for inhibiting thermalization in one-dimensional systems, *Phys. Rev. Res.* **4**, 023091 (2022).
- [77] P. Sierant and J. Zakrzewski, Challenges to observation of many-body localization, *Phys. Rev. B* **105**, 224203 (2022).
- [78] J. Sutradhar, S. Ghosh, S. Roy, D. E. Logan, S. Mukerjee, and S. Banerjee, Scaling of the Fock-space propagator and multifractality across the many-body localization transition, *Phys. Rev. B* **106**, 054203 (2022).
- [79] F. B. Trigueros and C.-J. Lin, Krylov complexity of many-body localization: Operator localization in Krylov basis, *SciPost Phys.* **13**, 037 (2022).
- [80] D. Z. Shi, V. Khemani, R. Vasseur, and S. Gopalakrishnan, Many body localization transition with correlated disorder, *Phys. Rev. B* **106**, 144201 (2022).
- [81] J. M. Deutsch, Quantum statistical mechanics in a closed system, *Phys. Rev. A* **43**, 2046 (1991).
- [82] M. Srednicki, Chaos and quantum thermalization, *Phys. Rev. E* **50**, 888 (1994).
- [83] M. Rigol, V. Dunjko, and M. Olshanii, Thermalization and its mechanism for generic isolated quantum systems, *Nature (London)* **452**, 854 (2008).
- [84] L. D'Alessio, Y. Kafri, A. Polkovnikov, and M. Rigol, From quantum chaos and eigenstate thermalization to statistical mechanics and thermodynamics, *Adv. Phys.* **65**, 239 (2016).
- [85] See Supplemental Material at <http://link.aps.org/supplemental/10.1103/PhysRevLett.129.260601> for reorthogonalization of LIOMs in the subspace with fixed number of fermions, absence of projection of H_Δ on LIOMs, derivation of Eq. (7) and the lower bound on the norm of the true perturbation, the details about the nearest level spacing analysis and the fluctuations of the diagonal matrix elements.
- [86] In contrast, in translationally invariant integrable models the products of local charges are typically nonlocal thus, in the thermodynamic limit, they have no projection on local observables.
- [87] Y. Y. Atas, E. Bogomolny, O. Giraud, and G. Roux, Distribution of the Ratio of Consecutive Level Spacings in Random Matrix Ensembles, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 084101 (2013).
- [88] M. Fremling, Exact gap-ratio results for mixed Wigner surmises of up to 4 eigenvalues, [arXiv:2202.01090](https://arxiv.org/abs/2202.01090).
- [89] O. Giraud, N. Macé, E. Vernier, and F. Alet, Probing Symmetries of Quantum Many-Body Systems through Gap Ratio Statistics, *Phys. Rev. X* **12**, 011006 (2022).
- [90] M. Schreiber, S. S. Hodgman, P. Bordia, H. P. Lüschen, M. H. Fischer, R. Vosk, E. Altman, U. Schneider, and I. Bloch, Observation of many-body localization of interacting fermions in a quasi-random optical lattice, *Science* **349**, 842 (2015).
- [91] H. Kim, T. N. Ikeda, and D. A. Huse, Testing whether all eigenstates obey the eigenstate thermalization hypothesis, *Phys. Rev. E* **90**, 052105 (2014).
- [92] R. Mondaini, K. R. Fratus, M. Srednicki, and M. Rigol, Eigenstate thermalization in the two-dimensional transverse field Ising model, *Phys. Rev. E* **93**, 032104 (2016).
- [93] D. Jansen, J. Stolpp, L. Vidmar, and F. Heidrich-Meisner, Eigenstate thermalization and quantum chaos in the Holstein polaron model, *Phys. Rev. B* **99**, 155130 (2019).
- [94] S. Iyer, V. Oganesyan, G. Refael, and D. A. Huse, Many-body localization in a quasiperiodic system, *Phys. Rev. B* **87**, 134202 (2013).
- [95] M. Schulz, C. A. Hooley, R. Moessner, and F. Pollmann, Stark Many-Body Localization, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 040606 (2019).
- [96] E. van Nieuwenburg, Y. Baum, and G. Refael, From Bloch oscillations to many-body localization in clean interacting systems, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **116**, 9269 (2019).

Supplemental Material: Restoring ergodicity in a strongly disordered interacting chain

B. Krajewski¹, L. Vidmar^{2,3}, J. Bonča^{3,2}, and M. Mierzejewski¹

¹*Department of Theoretical Physics, Faculty of Fundamental Problems of Technology,
Wrocław University of Science and Technology, 50-370 Wrocław, Poland*

²*Department of Theoretical Physics, J. Stefan Institute, SI-1000 Ljubljana, Slovenia*

³*Department of Physics, Faculty of Mathematics and Physics, University of Ljubljana, SI-1000 Ljubljana, Slovenia*

In the Supplemental Material we provide technical details about calculations in the subspace with a fixed number of fermions, absence of projection of H_Δ on LIOMs, the derivation of Eq. (7) and the lower bound on the norm of the true perturbation, the details about the nearest level spacing analysis and the fluctuations of the diagonal matrix elements.

S1. LIOMS IN THE SUBSPACE WITH FIXED NUMBER OF FERMIONS

The derivation of the true perturbation H_Δ^\perp , cf. Eqs. (4)-(6) in the main text, has been carried out in the Fock space of 2^L many-body configurations, i.e., with a variable number of fermions. In this case, the occupations of LIOMs Q_α from Eq. (3) in the main text are independent and their products $Q_{\alpha,d}^{(2)}$ are mutually orthogonal and normalized, i.e.,

$$\langle Q_{\alpha,d}^{(2)} Q_{\alpha',d'}^{(2)} \rangle = \delta_{\alpha,\alpha'} \delta_{d,d'}. \quad (\text{S1})$$

However, the actual numerical calculations presented in the main text have been carried out in a subspace with a fixed number of fermions, $N = L/2$. Then, the LIOMs are not independent because $\sum_{\alpha=1}^L Q_\alpha = 0$. This implies that the exact LIOMs in this subspace are linear combinations of Q_α . Nevertheless, since the interaction H_Δ has no projection on LIOMs, see Sec. S2, we focus below on two-body LIOMs $Q_{\alpha,d}^{(2)}$, which are the central object in introducing the true perturbation in Eqs. (5) and (6). In the subspace of a fixed number of fermions, the two-body LIOMs are neither traceless nor orthonormal. In order to apply the orthogonal projections, see Eq. (5) in the main text, one first needs to construct traceless products, $Q_{\alpha,d}^{(2)} = Q_\alpha Q_{\alpha+d} - \text{const}$, where the constant is set by the condition $\langle Q_{\alpha,d}^{(2)} \rangle = 0$. Then one needs to reorthogonalize the set $\{Q_{\alpha,d}^{(2)}\}$. To this end we solve the eigenproblem

$$\sum_{\alpha'=1}^L \sum_{d'=1}^{d_{\max}} \langle Q_{\alpha,d}^{(2)} Q_{\alpha',d'}^{(2)} \rangle V_{(\alpha',d'),\gamma} = \lambda_\gamma V_{(\alpha,d),\gamma} \quad (\text{S2})$$

for the real symmetric matrix built out of all scalar products of $Q_{\alpha,d}^{(2)}$, i.e., we solve the eigenproblem for $\langle Q_{\alpha,d}^{(2)} Q_{\alpha',d'}^{(2)} \rangle$. Here, $V_{(\alpha,d),\gamma}$ is an orthogonal matrix and

the eigenvalues are positive, $\lambda_\gamma > 0$, for $d_{\max} < L/2 - 1$. We introduce a new set of two-body LIOMs

$$q_\gamma^{(2)} = \sum_{\alpha=1}^L \sum_{d=1}^{d_{\max}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_\gamma}} V_{(\alpha,d),\gamma} Q_{\alpha,d}^{(2)}, \quad (\text{S3})$$

which are normalized and mutually orthogonal

$$\begin{aligned} \langle q_\gamma^{(2)} q_{\gamma'}^{(2)} \rangle &= \sum_{\alpha,\alpha'=1}^L \sum_{d,d'=1}^{d_{\max}} \frac{V_{(\alpha,d),\gamma} \langle Q_{\alpha,d}^{(2)} Q_{\alpha',d'}^{(2)} \rangle V_{(\alpha',d'),\gamma'}}{\sqrt{\lambda_\gamma} \sqrt{\lambda_{\gamma'}}} \\ &= \delta_{\gamma,\gamma'} \frac{\lambda_{\gamma'}}{\sqrt{\lambda_\gamma} \sqrt{\lambda_{\gamma'}}} = \delta_{\gamma,\gamma'}. \end{aligned} \quad (\text{S4})$$

The new set of orthonormal two-body LIOMs, $\{q_\gamma^{(2)}\}$, should be used instead of $\{Q_{\alpha,d}^{(2)}\}$ whenever the Fock space is reduced to a subspace with a fixed particle number. We note that the linear transformation in Eq. (S3) of local $Q_{\alpha,d}^{(2)}$ leads to local $q_\gamma^{(2)}$. Therefore the reorthogonalization does not spoil locality of two-body LIOMs.

S2. ABSENCE OF PROJECTION OF H_Δ ON LIOMS

We here show that $H_\Delta = \Delta \sum_i N_i$ from Eq. (2) in the main text has no projection on the LIOMs Q_α , i.e.,

$$\langle N_i Q_\alpha \rangle = 0 \quad \longrightarrow \quad \langle H_\Delta Q_\alpha \rangle = 0. \quad (\text{S5})$$

This statement is valid irrespectively of whether the Hilbert-Schmidt inner product (...) in Eq. (S5) is calculated in the Fock space (FS) of 2^L basis states, or within a subspace (S) with a fixed particle number $N = L/2$ and dimension $\binom{L}{N}$. To show that we express all operators in the real-space basis and calculate the projection

$$\langle N_i Q_\alpha \rangle = \frac{1}{4} \sum_{j,l} u_{i\alpha}^* u_{j\alpha} \langle (2n_i - 1)(2n_{i+1} - 1)(2a_j^\dagger a_l - \delta_{jl}) \rangle, \quad (\text{S6})$$

where $u_{j\alpha} = \langle j|\alpha\rangle$ are components of the single-particle wavefunction of the Anderson state $|\alpha\rangle$. The only nonzero contributions to Eq. (S6) come from terms corresponding to $l = j$. We note also that $(2n_i - 1)^2 = 1$ and that the operator $2n_i - 1$ is traceless both in FS and S, i.e., $\langle 2n_i - 1 \rangle = 0$. Therefore, the contributions corresponding to $j = i$ or $j = i + 1$ vanish. In particular, for $j = i + 1$ one obtains

$$\langle (2n_i - 1)(2n_{i+1} - 1)^2 \rangle = \langle (2n_i - 1) \rangle = 0. \quad (\text{S7})$$

The remaining contributions should be considered separately for calculations in FS and S. From now on we assume that $j \neq i$ and $j \neq i + 1$ so that all lattice indexes in Eq. (S6) correspond to different lattice sites. The vanishing of $\langle N_i Q_\alpha \rangle$ in FS follows from the independence of occupations of different sites,

$$\begin{aligned} & \langle (2n_i - 1)(2n_{i+1} - 1)(2n_j - 1) \rangle \\ & = \langle (2n_i - 1) \rangle \langle (2n_{i+1} - 1) \rangle \langle (2n_j - 1) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (\text{S8})$$

In the subspace S, we note that $\frac{1}{L} \sum_i 2n_i$ is the identity operator, hence we use the identity

$$\begin{aligned} 0 & = \sum_i (2n_i - 1) \sum_j (2n_j - 1) \sum_l (2n_l - 1) \\ & = \sum_{i=j=l} (2n_i - 1)^2 (2n_i - 1) \end{aligned} \quad (\text{S9})$$

$$+ 3 \sum_{i=l \neq j} (2n_i - 1)^2 (2n_j - 1) \quad (\text{S10})$$

$$+ \sum_{i \neq j \neq l, i \neq l} (2n_i - 1)(2n_j - 1)(2n_l - 1). \quad (\text{S11})$$

The contributions in Eqs. (S9) and (S10) represent traceless operators, as it follows from Eq. (S7). Since $\langle (2n_i - 1)(2n_j - 1)(2n_l - 1) \rangle$ does not depend on the lattice indexes (provided that i, j, l are different) one finds that $\langle (2n_i - 1)(2n_j - 1)(2n_l - 1) \rangle = 0$. Therefore, all contributions to the projection $\langle N_i Q_\alpha \rangle$ vanish. It holds true also within the subspace S despite $\langle N_i \rangle$ is not traceless but rather $\langle N_i \rangle = O(1/L)$.

S3. DERIVATION OF EQ. (7)

The r.h.s. of Eq. (7) in the main text corresponds to the norm of the difference

$$\|H_\Delta - H_\Delta^\parallel\|^2 = \langle (H_\Delta - H_\Delta^\parallel)(H_\Delta - H_\Delta^\parallel) \rangle. \quad (\text{S12})$$

Equation (4) implies that $\langle H_\Delta H_\Delta^\parallel \rangle = \langle H_\Delta^2 \rangle$, hence one can rewrite Eq. (S12) as

$$\|H_\Delta - H_\Delta^\parallel\|^2 = \langle H_\Delta^2 \rangle - \langle H_\Delta H_\Delta^\parallel \rangle. \quad (\text{S13})$$

Since $H_\Delta^\parallel = \Delta \sum_i N_i^\parallel$ and using the expression in Eq. (5) for N_i^\parallel , one obtains

$$\langle H_\Delta H_\Delta^\parallel \rangle = \Delta \sum_i \sum_{d,\alpha} \langle Q_{\alpha,d}^{(2)} N_i \rangle \langle H_\Delta Q_{\alpha,d}^{(2)} \rangle = \sum_{d,\alpha} \langle H_\Delta Q_{\alpha,d}^{(2)} \rangle^2. \quad (\text{S14})$$

Plugging Eq. (S14) into Eq. (S13), one obtains the expression on the r.h.s. of Eq. (7) in the main text.

S4. BOUNDS FOR PROJECTED OPERATORS

Here, we study in more details the properties of the projected operators, N_i^\perp , and establish a lower bound on their norm. To this end we use the many-body Anderson states $|\vec{\alpha}\rangle = |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_L\rangle$ and introduce an auxiliary operator

$$\tilde{N}_i = N_i - \sum_{\vec{\alpha}} \langle \vec{\alpha} | N_i | \vec{\alpha} \rangle |\vec{\alpha}\rangle \langle \vec{\alpha}|, \quad (\text{S15})$$

where all diagonal matrix elements have been eliminated. We note that the projection in Eq. (5) in the main text eliminates the diagonal matrix elements of N_i^\perp only partially, hence it is intuitively clear that $\|N_i^\perp\| \geq \|\tilde{N}_i\|$. Below we present a formal proof of this lower bound on $\|N_i^\perp\|$.

We rewrite Eq. (5) in the main text as

$$N_i = N_i^\perp + \sum_{\beta,d} \langle Q_{\beta,d}^{(2)} N_i \rangle Q_{\beta,d}^{(2)} \quad (\text{S16})$$

and note that $Q_{\beta,d}^{(2)}$ are diagonal in the many-body Anderson basis, hence

$$\sum_{\vec{\alpha}} \langle \vec{\alpha} | Q_{\beta,d}^{(2)} | \vec{\alpha} \rangle |\vec{\alpha}\rangle \langle \vec{\alpha}| = Q_{\beta,d}^{(2)}. \quad (\text{S17})$$

Putting Eqs. (S16) and (S17) into the right-hand side of Eq. (S15) one obtains the identity

$$N_i^\perp = \tilde{N}_i + \sum_{\vec{\alpha}} \langle \vec{\alpha} | N_i^\perp | \vec{\alpha} \rangle |\vec{\alpha}\rangle \langle \vec{\alpha}|. \quad (\text{S18})$$

In the Anderson basis, \tilde{N}_i has only off-diagonal matrix elements whereas the second term, $\sum_{\vec{\alpha}} \langle \vec{\alpha} | N_i^\perp | \vec{\alpha} \rangle |\vec{\alpha}\rangle \langle \vec{\alpha}|$, is diagonal. Moreover, the squared Hilbert-Schmidt norm can be explicitly written as a sum of squares of all matrix elements, $\|\dots\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{\vec{\alpha}, \vec{\alpha}'} |\langle \vec{\alpha} | \dots | \vec{\alpha}' \rangle|^2$. The latter two properties combined with Eq. (S18) imply that

$$\|N_i^\perp\|^2 = \|\tilde{N}_i\|^2 + \left\| \sum_{\vec{\alpha}} \langle \vec{\alpha} | N_i^\perp | \vec{\alpha} \rangle |\vec{\alpha}\rangle \langle \vec{\alpha}| \right\|^2 \geq \|\tilde{N}_i\|^2. \quad (\text{S19})$$

Consequently, one obtains the lower bound

$$\|N_i^\perp\|^2 \geq \|\tilde{N}_i\|^2, \quad (\text{S20})$$

which holds true for arbitrary distance d_{max} in Eq. (5) in the main text.

Figure S1 shows correlations between norms of N_i^\perp and \tilde{N}_i for various d_{max} . Each point in this plot shows result for a single site i and a single realization of disorder. These results not only confirm the bound $\|N_i^\perp\| \geq \|\tilde{N}_i\|$

S3

from Eq. (S20) but also demonstrate that for strong disorder (i.e., for small $\|N_i^\perp\|$) the projected operator can be well approximated as $N_i^\perp \simeq \tilde{N}_i$. Comparing Figs. S1(a)-S1(d) one observes that the larger is the distance d_{max} , the better is the approximation. At strong disorder, however, the approximation $N_i^\perp \simeq \tilde{N}_i$ is accurate already for $d_{max} = 2$. It means that the conserved part of the interaction, N_i , is dominated by the projections of N_i on two-body LIOMs $Q_{\alpha,d}^{(2)}$, i.e., by the products of LIOMs corresponding to the neighboring orbitals with $d = 1$ or $d = 2$.

Next, we discuss the origin of the bound $\|N_i^\perp\| \geq 1/(8W)^2$ which was observed from the numerical results shown in the main text in Fig. 1. To this end we show that $\|\tilde{N}_i\| \geq 1/(8W)^2$ and then make use of the inequality (S20). For simplicity we assume that the single-particle wave functions, $u_{i\alpha}$, are real, we express the operator N_i in the Anderson basis

$$\begin{aligned} N_i &= \left(a_i^\dagger a_i - \frac{1}{2} \right) \left(a_{i+1}^\dagger a_{i+1} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\eta} u_{i\alpha} u_{i\beta} \left(a_\alpha^\dagger a_\beta - \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{2} \right) u_{i+1,\gamma} u_{i+1,\eta} \left(a_\gamma^\dagger a_\eta - \frac{\delta_{\gamma,\eta}}{2} \right), \end{aligned} \quad (\text{S21})$$

and recall that \tilde{N}_i represents the off-diagonal contribution to Eq. (S21). The more localized are the Anderson wave-functions the smaller are the off-diagonal contributions to Eq. (S21). Then, it is useful to study a two-site problem for the Anderson Hamiltonian [see Eq. (1) in the main text] with extreme values of the disorder potentials

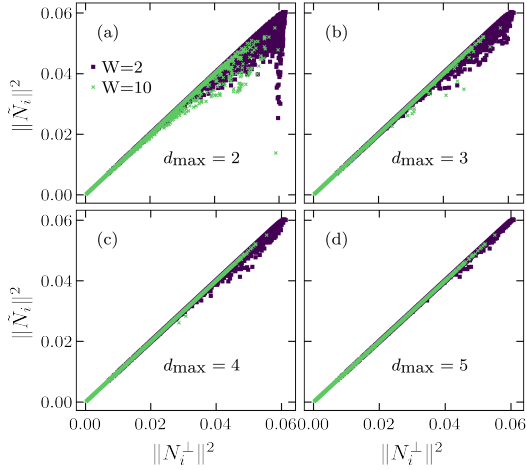


Figure S1. Results for chain with $L = 14$ sites and $L/2$ fermions. Points show $\|N_i^\perp\|$ and $\|\tilde{N}_i\|$ for various sites i , disorder realizations and W . In (a), (b), (c) and (d) we use, respectively, the maximal distance $d_{max} = 2, 3, 4$ and 5 , see Eq. (5) in the main text.

$$\epsilon_{1,2} = \pm W$$

$$\begin{pmatrix} W & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1\alpha} \\ u_{2\alpha} \end{pmatrix} = \epsilon_\alpha \begin{pmatrix} u_{1\alpha} \\ u_{2\alpha} \end{pmatrix}. \quad (\text{S22})$$

Direct calculations show that $\lim_{W \rightarrow \infty} u_{11} = \lim_{W \rightarrow \infty} u_{22} = 1$, whereas,

$$\lim_{W \rightarrow \infty} W u_{i\alpha} = \pm \frac{1}{4}, \quad i \neq \alpha. \quad (\text{S23})$$

We assume that the lower bound on $\|\tilde{N}_i\|^2$ denoted as $\|N_i^{\text{bound}}\|^2$, can be obtained via introducing single-particle wave-functions from Eq. (S22) into Eq. (S21). In other words, N_i^{bound} corresponds to the most localized orbitals, $u_{i\alpha}$, on two sites. Namely, we assume that for each site i there is a single Anderson state denoted as $\alpha(i)$ such that $u_{i\alpha(i)}$ is of the order $O(1)$, and one other state, $\alpha'(i) \neq \alpha(i)$, for which $u_{i\alpha'(i)} = \pm \frac{1}{4W}$,

$$u_{i\beta} \simeq \delta_{\beta,\alpha(i)} \pm \frac{1}{4W} \delta_{\beta,\alpha'(i)}. \quad (\text{S24})$$

Then, one finds the leading (with respect to $1/W$) contributions to the off-diagonal part of N_i^{bound} ,

$$\begin{aligned} N_i^{\text{bound}} &\simeq \pm \frac{1}{4W} [a_{\alpha'(i)}^\dagger a_{\alpha(i)} + \text{H.c.}] [n_{\alpha(i+1)} - \frac{1}{2}] \\ &\quad \pm \frac{1}{4W} [n_{\alpha(i)} - \frac{1}{2}] [a_{\alpha'(i+1)}^\dagger a_{\alpha(i+1)} + \text{H.c.}]. \end{aligned} \quad (\text{S25})$$

Using the identity $[n_{\alpha(i)} - \frac{1}{2}][\bar{\alpha}] = \pm \frac{1}{2}[\bar{\alpha}]$ one may simplify Eq. (S25) to

$$\begin{aligned} N_i^{\text{bound}} &\simeq \pm \frac{1}{8W} [a_{\alpha'(i)}^\dagger a_{\alpha(i)} + \text{H.c.}] \\ &\quad \pm \frac{1}{8W} [a_{\alpha'(i+1)}^\dagger a_{\alpha(i+1)} + \text{H.c.}]. \end{aligned} \quad (\text{S26})$$

The resulting N_i^{bound} is a sum of two hopping terms and the squared Hilbert-Schmidt norm of each term equals $\frac{1}{2} \frac{1}{(8W)^2}$. Finally, we find the inequalities

$$\|N_i^\perp\|^2 \geq \|\tilde{N}_i\|^2 \geq \|N_i^{\text{bound}}\|^2 = 1/(8W)^2. \quad (\text{S27})$$

Fig. 1 in the main text demonstrates that $1/(8W)^2$ very accurately reproduces the minimum of $\|N_i^\perp\|^2$ obtained from numerical simulations already for $W > 3$. It follows from Eq. (S24) that the latter bound is applicable only at $1/4W \ll 1$ and it must break down at $W < 0.5$ since $\|N_i^\perp\|^2 \leq \|N_i\|^2 = 1/16$.

Finally we demonstrate that the norms $\|N_i^\perp\|$, shown in Fig. 1 in the main text, weakly depend on the size of the studied system. To this end, we have determined the distributions of the latter quantities for lattices with $L = 12$ and $L = 16$ sites. Figures S2(a) and S2(b) show the probability density functions of $\|N_i^\perp\|$ at $W = 2$ and $W = 20$, respectively. The distributions have been obtained via collecting results for 4000 realizations of disorder and for all sites, $i = 1, \dots, L$. We do not observe any significant L -dependence of these distributions for either weak (left panel) or strong (right panel) disorder.

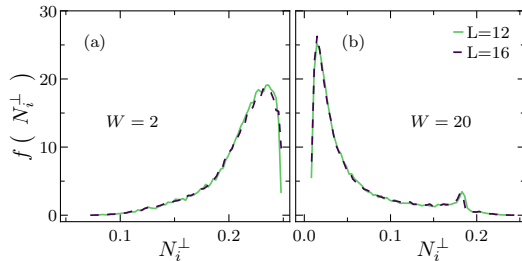


Figure S2. Probability density functions f of $\|N_i^\perp\|$. Results are obtained for 4000 realizations of disorder at $L = 12, 16$ with (a) $W = 2$ and (b) $W = 20$.

S5. NEAREST LEVEL SPACINGS

In Fig. 2 in the main text we studied the statistical properties of the ratio of nearest level spacings, shortly the gap ratio [3]. For a target many-body eigenstate $|E_m\rangle$, the gap ratio is defined as

$$r_m = \frac{\min\{\delta E_m, \delta E_{m-1}\}}{\max\{\delta E_m, \delta E_{m-1}\}}, \quad (\text{S28})$$

where $\delta E_m = E_{m+1} - E_m$ is the level spacing. We then averaged r_m over the middle third of the energy spectrum as well as over 4000 various realizations of disordered. The average gap ratio (r) is plotted in the main panels of Figs. 2(a) and 2(b).

In the inset of Fig. 2(b) we plotted a probability density function $P(r)$ that includes results for r_m from Eq. (S28) obtained at different disorder realizations, as well as different target eigenstates $|E_m\rangle$ at a fixed disorder realization. The latter are again obtained from the middle third of the energy spectra. Results are compared to the analytical predictions for the Poisson distribution [3],

$$P(r) = \frac{2}{(1+r)^2}, \quad (\text{S29})$$

see the dash-dotted line the inset of Fig. 2(b), and for the GOE [87],

$$P(r) = \frac{27}{4} \frac{r+r^2}{(1+r+r^2)^{5/2}}, \quad (\text{S30})$$

see the dashed line in the inset of Fig. 2(b).

S6. MATRIX ELEMENTS OF OBSERVABLES

In the main text we studied eigenstate-to-eigenstate fluctuations of the diagonal matrix elements, $\langle \delta A \rangle$, for a single site occupation, $A = 2n_i - 1$. In particular,

we have determined the probability density functions, $f(\langle \delta A \rangle)$ shown in Fig. 4 in the main text. In order to

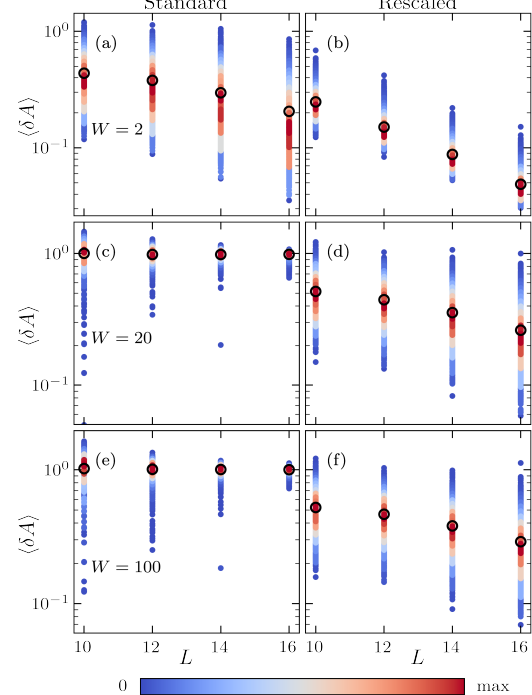


Figure S3. Eigenstate-to-eigenstate fluctuations $\langle \delta A \rangle$ from Eq. (9) in the main text. We first calculate $\langle \delta A \rangle$ for a single lattice occupation, $A = 2n_i - 1$, and different realizations of disorder. Then present a density plot of these values. Open circles show the medians. Panels (a,c,e) show results for the standard model, H , and (b,d,f) for the rescaled model \tilde{H} .

better visualize the L -dependence of the eigenstate-to-eigenstate fluctuations, we show in Figure S3 the density plot of $\langle \delta A \rangle$ as a function of the system size. Each point shows result for a single site, i , and a single realization of disorder whereas color marks the density of such points. In the standard model at strong disorder, see Figs. S3(c) and S3(e), one observes strong fluctuations and $\langle \delta A \rangle \sim 1$ for all accessible system sizes. In the rescaled model, see Figs. S3(d) and S3(f), the fluctuations visibly decrease with L , however the probability density function, $f(\langle \delta A \rangle)$, remains broad. Therefore, the L -dependence of the fluctuations can be followed via inspecting the medians (circles) and maxima (red color) of $f(\langle \delta A \rangle)$. Both quantities suggest that fluctuations decay exponentially with L as it is expected for systems which obey the eigenstate thermalization hypothesis.

ROZDZIAŁ

6

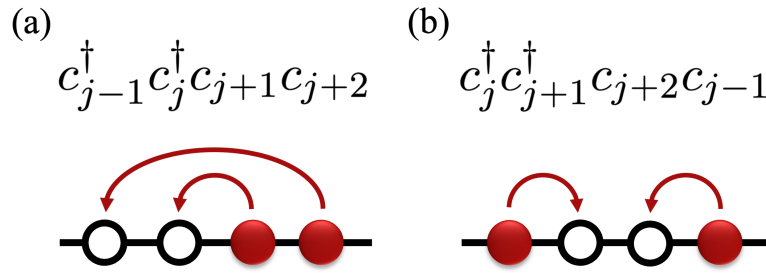
Strongly disordered Anderson insulator chains with generic two-body interaction

Standardowy model badany w kontekście MBL (równanie 3.5) nie może być traktowany jako generyczny model z nieporządkiem oraz oddziaływaniami wielociałowymi. Wynika to z tego, że jedynie niewielka część oddziaływania dwuciałowego stanowi rzeczywiste lokalne zaburzenie izolatora Andersona (co pokazano w rozdziale 5). W przypadku skończonych układów z silnym nieporządkiem *rzeczywiste zaburzenie* pozostaje poza zasięgiem większości (jeśli nie wszystkich) metod numerycznych [A2].

Aby zademonstrować los ergodyczności w układzie, dla którego można przeprowadzić wiarygodne badania numeryczne, w poprzednim rozdziale przeskalowaliśmy siłę *rzeczywistego zaburzenia* i pokazaliśmy, że przeskalowany model jest *rzeczywiście* ergodyczny. Jednak takie przeskalowanie jest bardzo wymagające obliczeniowo, a struktura *rzeczywistego zaburzenia* jest dość złożona, przez co rezultat i wnioski z artykułu [A2] nie są tak jasne i przekonujące, jakie mogłyby być.

W poniższym artykule [A3] pokazujemy, że do tych samych wniosków można dojść, wybierając inny rodzaj oddziaływania dwuciałowego, dla którego *rzeczywiste zaburzenie* jest (z bardzo dobrym przybliżeniem) równe pierwotnemu oddziaływowaniu. Badania numeryczne standardowych indykatorów ergodyczności wyraźnie pokazują, że zaproponowany układ jest ergodyczny, chyba że wybierze się skrajne wartości parametrów modelu (bardzo silny nieporządek i bardzo słabe oddziaływania), dla których wiarygodność rezultatów numerycznych jest wątpliwa.

Ponieważ zidentyfikowany problem małego zaburzenia wynika z użycia oddziaływania gęstość-gęstość, proponujemy wykorzystanie modelu $H = H_0 + H'$, składającego się z H_0 – części opisującej izolator Andersona (jak w równaniu 3.2) oraz H' – jednego z dwóch rodzajów oddziaływania pozbawionych operatorów obsadzeń.



RYSUNEK 6.1: Wizualizacja operatorów oddziaływania wykorzystanych w pracy.

Jako źródło tych oddziaływań dwuciałowych przyjmujemy skorelowane przeskoki:




$$H'_{\text{ph}} = V \sum_j c_{j-1}^\dagger c_j^\dagger c_{j+1} c_{j+2} + \text{H.c.} \quad (6.1)$$

$$\tilde{H}'_{\text{ph}} = V \sum_j c_j^\dagger c_{j+1}^\dagger c_{j+2} c_{j-1} + \text{H.c.} \quad (6.2)$$

W celu lepszego zobrazowania skorelowanych przeskoków z równań 6.1 i 6.2 przedstawiono je kolejno na Rys. 6.1(a) oraz 6.1(b). Oddziaływania te, w przeciwieństwie do oddziaływania gęstość-gęstość, mają małą projekcję na całki ruchu, co więcej – malejącą z nieporządkiem, co potwierdziliśmy wynikami numerycznymi.

Zaproponowane modele, w reżimie silnego oddziaływania, kiedy potencjał oddziaływania V oraz nieporządek W są tego samego rzędu, prezentują własności spójne z wynikami uzyskanymi dla modelu przeskalowanego, wprowadzonego w [A2]. Rezultaty numeryczne dla statystyki poziomów oraz ETH prezentują wyraźny trend ergodyzowania się modelu przy zwiększaniu rozmiaru układu. Co więcej, badania *gap ratio* w zależności od wartości siły oddziaływania i siły nieporządku pokazały brak występowania w tym modelu zjawiska lokalizowania się układu przy zwiększaniu potencjału oddziaływania i stałym nieporządku, charakterystycznego dla modeli MBL [154]. Zjawisko to wydaje się być jedynie efektem rozmiarowym w prezentowanych modelach.

Rezultaty dla małego oddziaływania $V = 1$ przy silnym nieporządku są zbieżne jakościowo z wynikami dla standardowych modeli MBL. Zwracamy jednak uwagę, że kiedy norma oddziaływania jest dużo mniejsza niż norma izolatora Andersona ($V \ll W$), ostatecznie mamy do czynienia z tym samym problemem, który analizowaliśmy w poprzednim rozdziale. Z tego powodu obliczenia numeryczne dla dostępnych rozmiarów układów są problematyczne numerycznie, dlatego nasze wyniki nie potwierdzają ani nie wykluczają lokalizacji w tym reżimie parametrów.

Strongly disordered Anderson insulator chains with generic two-body interactionB. Krajewski ¹, L. Vidmar ^{2,3}, J. Bonča,^{3,2} and M. Mierzejewski ¹¹*Institute of Theoretical Physics, Faculty of Fundamental Problems of Technology, Wrocław University of Science and Technology, 50-370 Wrocław, Poland*²*Department of Theoretical Physics, Jožef Stefan Institute, SI-1000 Ljubljana, Slovenia*³*Department of Physics, Faculty of Mathematics and Physics, University of Ljubljana, SI-1000 Ljubljana, Slovenia*

(Received 26 June 2023; accepted 20 July 2023; published 4 August 2023)

The random-field spin-1/2 XXZ chains, and the corresponding Anderson insulators of spinless fermions with density-density interaction, have been intensively studied in the context of many-body localization. However, we recently argued [B. Krajewski *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **129**, 260601 (2022)] that the two-body density-density interaction in these models is not generic since only a small fraction of this interaction represents a true local perturbation to the Anderson insulator. Here we study ergodicity of strongly disordered Anderson insulator chains, choosing other forms of the two-body interaction for which the strength of the true perturbation is of the same order of magnitude as the bare two-body interaction. Focusing on the strong-interaction regime, numerical results for the level statistics and the eigenstate thermalization hypothesis are consistent with emergence of ergodicity at arbitrary strong disorder.

DOI: [10.1103/PhysRevB.108.064203](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.108.064203)**I. INTRODUCTION**

Extensive numerical studies concerning ergodicity of disordered systems have been carried out mostly for the one-dimensional random-field spin-1/2 XXZ model (see, e.g., Refs. [1–13]). This spin model can be mapped onto a chain of spinless fermions, for which the Hamiltonian can be expressed as

$$H = H_0(W) + H'(V), \quad (1)$$

where the single-particle term $H_0(W)$ describes the Anderson insulator with the disorder strength W and the hopping amplitude set to unity, while the interaction $H'(V)$ is given by the density-density interaction of strength V . This is one of the simplest models which allows us to study the influence of two-body interaction on the Anderson localization.

At a sufficiently strong disorder, $W > W^*$, numerical studies of finite systems indicated that localization may also persist in the presence of the two-body interaction, leading to the concept of many-body localization (MBL) [14,15]. In particular, the presence of MBL has been suggested based on extremely slow dynamics [16–23], suppressed transport [24–29], entanglement entropy properties [16,30–33], and level statistics analyses [1,3,15,34,35].

In spite of these results, however, the fate of localization in macroscopic systems remains an open problem. In particular, the transition or crossover disorder W^* , as estimated from the energy spectrum [11,12], shows a linear drift with the system size L , namely, $W^* \propto L + \text{const}$. The latter observations as well as several other results obtained from subsequent studies suggest that macroscopic systems may be ergodic [36–43] and diffusive, although with a very small diffusion constant [2]. At even larger disorders, much larger than the previous estimates of W^* [44,45], the state-of-the-art numerical approaches may not provide a conclusive answer to this question [13,46–50].

A nontrivial feature of the V - W state diagram in finite systems is the emergence of reentrant behavior [25,51]. This means that at fixed W , ergodicity is restored at some nonzero interaction V_1 , while at some larger interaction $V_2 > V_1$ one again observes the breakdown of ergodicity. This property may suggest that the density-density interaction cannot be considered as a perturbation that just destroys the Anderson localization of noninteracting particles; it may also stabilize localization once it is large enough.

In a recent paper [52], we showed that only a small part of the density-density interaction $H'(V)$, termed the *true local perturbation* (shortly, the true perturbation), does not commute with H_0 . Namely, the major part of $H'(V)$ can be expressed via products of occupations of the single-particle Anderson states, and hence this part of $H'(V)$ does not perturb the Anderson insulator. At strong disorder, the true perturbation may hence be too small to be correctly captured by numerical calculations carried out in finite systems. By rescaling the true perturbation so that its strength is of the same order as the other terms of the Hamiltonian, we introduced a rescaled model that exhibits ergodicity at arbitrary strong W [52]. However, this approach is computationally demanding, and the spatial structure of the true perturbation is rather complex.

In this paper, we demonstrate that the smallness of the true perturbation is specific for models with the density-density interaction, and that other forms of the two-body interaction do not share this property. Therefore the emergence and breakdown of ergodicity in the latter systems can be studied without applying a complex procedure that singles out and rescales the true perturbation. As the main result, we show evidence that a sufficiently strong two-body interaction restores ergodicity even at extremely large disorder such as $W \sim 20$. This observation also suggests the absence of reentrant behavior at fixed disorder W when interaction is increased.

The paper is organized as follows. In Sec. II, we recall the notion of the true perturbation and introduce the studied forms of the two-body interactions. Then, in Sec. III we discuss numerical results obtained for the level statistics and the eigenstate thermalization hypothesis (ETH) [53–56]. We summarize and discuss our results in Sec. IV.

II. MODELS AND THE STRENGTH OF THE TRUE PERTURBATION

We consider a chain of length L containing $L/2$ spinless fermions, where we assume periodic boundary conditions. We discuss the ergodicity of three distinct models of the form (1), which share the same single-particle part, H_0 , but have different two-body interaction terms, H' . In particular, we take

$$H_0 = \frac{t_h}{2} \sum_i (c_{i+1}^\dagger c_i + \text{H.c.}) + \sum_i \epsilon_i \left(n_i - \frac{1}{2} \right), \quad (2)$$

where c_i^\dagger creates a fermion at site i , $n_i = c_i^\dagger c_i$, and ϵ_i is a random potential (i.e., the disorder) uniformly distributed within the box $\epsilon_i \in [-W, W]$. From this point on, we set $t_h = 1$. We refer to the model in Eq. (2) as the Anderson model. The noninteracting part is diagonal in the Anderson single-particle basis:

$$H_0 = \sum_\alpha \frac{1}{2} \epsilon_\alpha Q_\alpha + \text{const}, \quad Q_\alpha = 2n_\alpha - 1, \quad (3)$$

where n_α is the particle number operator for the Anderson state $|\alpha\rangle$ with the energy ϵ_α , and Q_α are referred to as the Anderson local integrals of motion (shortly, Anderson LIOMs). It is convenient to single out the operator density, $h(i)$, of the two-body interaction, and express H' as

$$H' = V \sum_i h(i). \quad (4)$$

The first model we have in mind is the standard model of MBL with the nearest-neighbor density-density (dd) interaction for spinless fermions,

$$h_{\text{dd}}(i) = \left(n_i - \frac{1}{2} \right) \left(n_{i+1} - \frac{1}{2} \right), \quad (5)$$

which maps onto the S_{i+1}^z interaction in the random-field spin-1/2 XXZ model. Increasing the disorder in the Anderson model in Eq. (2) yields a shorter localization length, and ultimately at large W each single-particle Anderson wave function $\langle i|\alpha\rangle$ is strongly peaked at a single site $i = i(\alpha)$. Then, the occupations in Eq. (5) become *similar* to the Anderson LIOMs in Eq. (3), $n_{i(\alpha)} - \frac{1}{2} \simeq \frac{1}{2} Q_\alpha$. Therefore the value of V alone does not specify whether $H'_{\text{dd}} = V \sum_i h_{\text{dd}}(i)$ represents strong or weak perturbation to H_0 .

In order to quantify this intuitive understanding (especially the *similarity* between $n_{i(\alpha)} - \frac{1}{2}$ and Q_α), we use the Hilbert-Schmidt inner product of two operators $\langle AB \rangle = \frac{1}{Z} \text{Tr}(A^\dagger B)$ and the corresponding norm of operators $\|A\|^2 = \langle AA \rangle$. Here, the trace is carried out over the many-body states, and $Z = \binom{L}{L/2}$ is the dimension of the many-body Hilbert space. We split the perturbation operators from Eq. (5) into two parts,

$$h_{\text{dd}}(i) = h_{\text{dd}}^{\parallel}(i) + h_{\text{dd}}^{\perp}(i), \quad (6)$$

in such a way that both parts are mutually orthogonal [$\langle h_{\text{dd}}^{\parallel}(i) h_{\text{dd}}^{\perp}(i) \rangle = 0$] and $h_{\text{dd}}^{\parallel}(i)$ commutes with H_0 . Therefore only the latter part, $V h_{\text{dd}}^{\perp}(i)$, represents the density of the true local perturbation, and the operators can be expressed as (see Ref. [52] for details)

$$h_{\text{dd}}^{\parallel}(i) = \sum_{\alpha, d \leq d_{\text{max}}} \langle h_{\text{dd}}(i) Q_\alpha Q_{\alpha+d} \rangle Q_\alpha Q_{\alpha+d}, \quad (7)$$

$$h_{\text{dd}}^{\perp}(i) = h_{\text{dd}}(i) - h_{\text{dd}}^{\parallel}(i). \quad (8)$$

The index $\alpha + d$ of $Q_{\alpha+d}$ in Eq. (7) corresponds to the single-particle Anderson state for which the maximum of the wave function $|\langle i|\alpha + d \rangle|$ is shifted left by d sites with respect to the maximum of $|\langle i|\alpha \rangle|$. We recall that at strong disorder the strength of the true perturbation decays with W as $V \|h_{\text{dd}}^{\perp}(i)\| \sim V/W$ (see Fig. 1 in Ref. [52]), whereas $V h_{\text{dd}}^{\parallel}(i) \sim V$ should be considered as a part of the unperturbed energy density.

As a consequence of the above analysis, the strongly disordered XXZ models always represent weakly perturbed Anderson insulators, independently of V . Weak perturbations are challenging for numerical calculations which are carried out in finite systems. To avoid possible numerical artifacts, in Ref. [52] we rescaled the strength of the true perturbation in such a way that its norm is of the same order of magnitude as the norm of H_0 . Although the rescaled model was shown to be ergodic, the explicit form of the rescaled Hamiltonian is rather complex and may raise concerns as to whether the conclusions concerning its ergodicity are generic.

To avoid difficulties originating from the presence of a very weak perturbation, in this paper we study simple Hamiltonians in which the norms of the single-particle term and the true two-body perturbation are controlled by two independent parameters, W and V , respectively. Since the smallness of the true perturbation in the XXZ chains is specific for the density-density interaction, in this paper we study systems with two-body interactions that cannot be expressed in terms of occupations of the lattice sites. We mostly focus on the two-body interaction $h(i)$ from Eq. (4), which is given by a pair-hopping (ph) term

$$h_{\text{ph}}(i) = c_{i-1}^\dagger c_i^\dagger c_{i+1} c_{i+2} + \text{H.c.} \quad (9)$$

In order to demonstrate that our conclusions do not originate from a specific choice of the perturbation, at the end of the paper we also discuss numerical results obtained for the operator

$$\tilde{h}_{\text{ph}}(i) = c_i^\dagger c_{i+1}^\dagger c_{i+2} c_{i-1} + \text{H.c.} \quad (10)$$

Results obtained for the two models are qualitatively the same. Namely, we show that even at a very strong disorder W , a sufficiently strong perturbation restores the ergodicity of the studied model. The larger the system, the weaker the perturbation for which the ergodicity is restored.

STRONGLY DISORDERED ANDERSON INSULATOR CHAINS ...

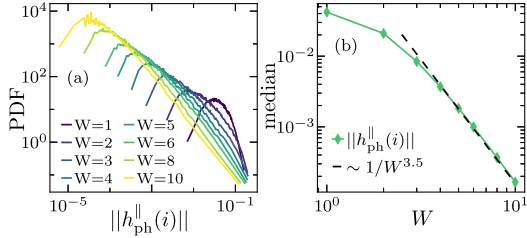
PHYSICAL REVIEW B **108**, 064203 (2023)

FIG. 1. Norms of the operators $||h_{\text{ph}}^{\parallel}(i)||$ defined via Eq. (7) by replacing $h_{\text{dd}}(i) \rightarrow h_{\text{ph}}(i)$. (a) Probability density functions (PDFs) of $||h_{\text{ph}}^{\parallel}(i)||$ at $L = 14$ and $d_{\text{max}} = 2$ for various W . The distributions are calculated at all sites for 2000 realizations of the disorder. (b) W dependence of the medians of the distributions shown in (a). The dashed line is the function $\propto 1/W^{3.5}$.

III. NUMERICAL RESULTS

A. The strength of the true perturbation

We now focus on the Anderson insulators with pairing interaction,

$$H = H_0 + H'(V) = H_0 + V \sum_i h_{\text{ph}}(i), \quad (11)$$

where $h_{\text{ph}}(i)$ is defined in Eq. (9). First, we demonstrate that the strength of the true perturbation in this model only weakly depends on W and is of the same order as the strength of the bare two-body interaction, $V||h_{\text{ph}}(i)||$. To this end, we replace $h_{\text{dd}}(i) \rightarrow h_{\text{ph}}(i)$ in Eq. (6), and we use the projections defined via Eqs. (7) and (8) to calculate $h_{\text{ph}}^{\parallel}(i)$ and $h_{\text{ph}}^{\perp}(i)$, respectively. Due to the orthogonality of these two terms, one obtains the following identity:

$$||h_{\text{ph}}(i)||^2 = ||h_{\text{ph}}^{\parallel}(i)||^2 + ||h_{\text{ph}}^{\perp}(i)||^2, \quad (12)$$

where the norm on the left-hand side of Eq. (12) does not depend on W or V . Therefore the strength of the true perturbation, $V||h_{\text{ph}}^{\perp}(i)||$, can be estimated indirectly from the component which commutes with H_0 , i.e., from $h_{\text{ph}}^{\parallel}(i)$.

Using exact diagonalization for a system with $L = 14$ sites, we calculated the norms of $||h_{\text{ph}}^{\parallel}(i)||$ for various realizations of disorder and various sites i . From the latter we determined the probability density functions (PDFs) for $||h_{\text{ph}}^{\parallel}(i)||$, which are shown in Fig. 1(a) for various W . In Fig. 1(b) we show medians of these distributions as a function of the disorder strength W . Upon increasing W , the maxima of these distributions shift towards smaller values of $||h_{\text{ph}}^{\parallel}(i)||$. Moreover, the medians decrease faster than $1/W^3$. This effect is opposite to the results for the density-density interactions, where $||h_{\text{dd}}^{\parallel}(i)||$ are very close to $||h_{\text{dd}}(i)||$, whereas $||h_{\text{dd}}^{\perp}(i)||$ decrease as $1/W$. In the present case, $||h_{\text{ph}}^{\parallel}(i)||$ are negligible, in particular at strong disorder.

To summarize, based on the results in Fig. 1 and using the identity from Eq. (12), we conclude that the strength of the true perturbation in the model (11) is determined mainly by V and, up to reasonable accuracy, one may assume that it is equal to the bare interaction H' .

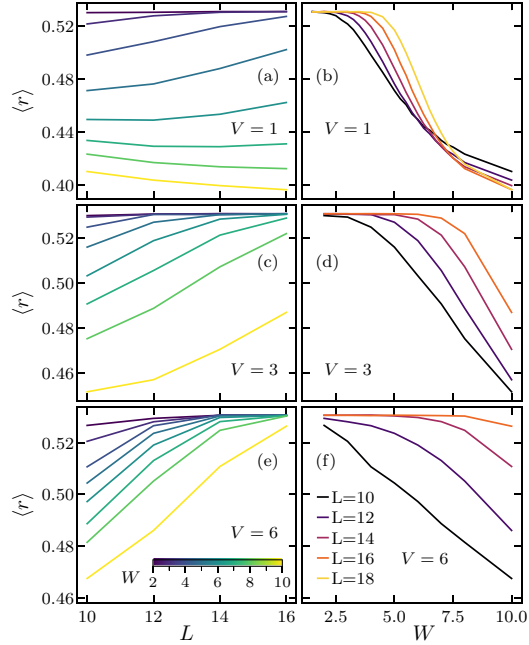


FIG. 2. Average level spacing ratio $\langle r \rangle$ for the model in Eq. (11). The averaging is carried out over $Z/3$ levels from the middle of the spectrum and over 4000 realizations of disorder. (a), (c), and (e) Dependence of $\langle r \rangle$ on L at interactions $V = 1, 3$, and 6 , respectively. Dark to light colors denote the disorders $W = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10$; see also the color bar in (e). (b), (d), and (f) Dependence of $\langle r \rangle$ on W at interactions $V = 1, 3$, and 6 , respectively. Dark to light colors denote the system sizes $L = 10, 12, 14, 16, 18$; see also the legend in (f).

B. Average level spacing ratio

To identify the ergodic and nonergodic regimes of the model from Eq. (11), we start with the commonly studied ergodicity indicator, i.e., the ratio $r_n = \min(\delta E_n, \delta E_{n+1}) / \max(\delta E_n, \delta E_{n+1})$ of the nearest level spacings $\delta E_n = E_{n+1} - E_n$, where E_n are (sorted) energy levels [15,57]. We average r_n over the middle third of the energy spectrum, as well as over 4000 realizations of the disorder, and we denote the average level spacing ratio as $\langle r \rangle$.

Figures 2(a), 2(c), and 2(e) show results for $\langle r \rangle$ versus L at $V = 1, 3$, and 6 , respectively, obtained at $W = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10$. In contrast, Figs. 2(b), 2(d), and 2(f) show results for $\langle r \rangle$ versus W and the same $V = 1, 3$, and 6 , respectively, obtained at $L = 10, 12, 14, 16, 18$.

The results at weak perturbation $V = 1$ [see Figs. 2(a) and 2(b)] share some similarities with the numerical results obtained previously for disordered chains with density-density interaction [3,9,12,13,58]. In particular, at sufficiently large disorder [see Fig. 2(a)], $\langle r \rangle$ decreases with L towards the value for Poisson level statistics $r_{\text{Pois}} \simeq 0.39$, eventually indicating nonergodicity. The finite-size phenomenology of the results for $\langle r \rangle$ in systems with density-density interaction was

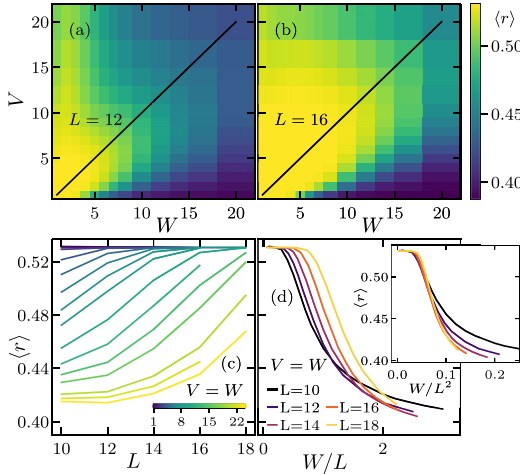


FIG. 3. Average level spacing ratio $\langle r \rangle$ for the model in Eq. (11). (a) and (b) Heat maps of $\langle r \rangle$ at $L = 12$ and 16 , respectively. The solid line denotes $V = W$. (c) Dependence of $\langle r \rangle$ on L at $V = W$. Dark to light colors denote the disorders $W = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 16, 20, 22, 24$; see also the color bar. (d) Dependence of $\langle r \rangle$ on W/L (main panel) and W/L^2 (inset) at $V = W$. Dark to light colors denote the system sizes $L = 10, 12, 14, 16, 18$; see also the legend.

extensively studied in the past, giving rise to conjectures either about robustness of ergodicity [12] or about the convergence to a critical point [13]. Our study does not contribute significantly to new results in this regard.

In contrast to systems with density-density interaction, in the present model (11) one may tune the strength of the interaction and explore a broader regime of parameters where the numerical results do not suffer from suppression of the true perturbation. Figures 2(c)–2(f) show results for $\langle r \rangle$ at stronger interactions $V = 3$ and 6 . They show a strong tendency towards restoring ergodicity. For example, in the system with $L = 16$ sites, it is reasonable to expect $\langle r \rangle$ to approach the Gaussian orthogonal ensemble (GOE) prediction $r_{\text{GOE}} \simeq 0.53$ at disorders of strengths $W \approx 10$. Moreover, the flow of the results with increasing L suggests restoration of ergodicity also at disorders much larger than $W \approx 10$.

A different perspective on the finite-size phenomenology of $\langle r \rangle$ is presented in Fig. 3. The values of $\langle r \rangle$ in the V - W plane of parameters are shown as heat maps in Figs. 3(a) and 3(b) at $L = 12$ and 16 , respectively. In both cases, signatures of a reentrant behavior may be observed, i.e., at a fixed W and by increasing V , $\langle r \rangle$ first increases towards r_{GOE} and then decreases again. However, another important observation is also that by increasing the system size from $L = 12$ to $L = 16$, there is a strong enhancement of the region in which $r \approx r_{\text{GOE}}$.

To study the fate of the reentrant behavior when increasing the system size, we focus on the parameter line $V = W$, which is shown as a solid line in Figs. 3(a) and 3(b). If the system exhibits a tendency towards restoring ergodicity along this line, it is unlikely that the reentrant behavior survives in the thermodynamic limit.

Figure 3(c) shows results for $\langle r \rangle$ versus L at $V = W$. Even for the largest disorder under consideration, $W = 24$, we clearly observe a drift of $\langle r \rangle$ towards r_{GOE} upon increasing L . A different view of these results can be obtained from Fig. 3(d), in which we show $\langle r \rangle$ versus W/L at $V = W$. If the characteristic disorder at which $\langle r \rangle$ starts to depart from r_{GOE} drifts linearly with L , as in the case of density-density interactions [12], one should observe a collapse of curves for $\langle r \rangle$ at different L when plotted versus W/L . However, the results in Fig. 3(d) show signatures that the drift is faster than linear. In particular, the values of disorder at which $\langle r \rangle$ starts to deviate from r_{GOE} seem to increase with system size as $W^* \propto L^2$; see the inset in Fig. 3(d). The latter scaling is different from the scaling $W^* \propto L$ at the $V = W$ line for the density-density interaction (not shown). We interpret this result as strong evidence that the system in Eq. (11) becomes ergodic along the $V = W$ parameter line in the thermodynamic limit; hence the state diagram is not expected to exhibit reentrant behavior.

C. Diagonal matrix elements of observables and the ETH

Next, we demonstrate the tendency of the studied model (11) to become ergodic via testing the ETH. We perform numerical calculations for the site occupation operator $A_i = 2n_i - 1$. This observable (or some linear combinations of A_i) was commonly studied in the context of MBL [1,4,18,59] because localization would imply that the matrix elements of A_i must violate the ETH. The latter violation would show up in the nonvanishing fluctuations of the diagonal matrix elements $\langle E_m | A_i | E_m \rangle$, which determine the value of the infinite-time correlation function $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle A_i(t) A_i \rangle$.

In order to estimate the fluctuations of the diagonal matrix elements, we calculate the average eigenstate-to-eigenstate fluctuations [60–62],

$$\langle \delta A_i \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_m |\langle E_{m+1} | A_i | E_{m+1} \rangle - \langle E_m | A_i | E_m \rangle|, \quad (13)$$

where the eigenstate-to-eigenstate fluctuations are averaged over $\mathcal{Z} = Z/5$ eigenstates from the middle of the many-body spectrum.

Figures 4(a) and 4(b) show the PDFs of $\langle \delta A_i \rangle$ obtained from a collection of results for 4000 realizations of disorder. In the case of a finite system, A_i at different sites are not independent since $\sum_i A_i = 0$. Therefore we calculate A_i for a single lattice site i . These PDFs were obtained at $V = 6$, when the average level spacing ratio $\langle r \rangle$ matches the GOE prediction. At strong disorder $W = 10$ [see Fig. 4(b)], the values of $\langle \delta A_i \rangle$ remain large, and the presented distributions are broad. The latter feature indicates the presence of substantial sample-to-sample fluctuation, which seems to be unavoidable in small systems at strong disorder [63,64]. Nevertheless, upon increasing L the distributions become narrower, and their maxima shift towards smaller eigenstate-to-eigenstate fluctuations. This indicates that the diagonal matrix elements of A_i satisfy the ETH.

In order to study in more detail how the distributions of $\langle \delta A_i \rangle$ depend on V and W , in Figs. 4(c)–4(f) we show the medians of these distributions versus L . The conclusions are quite similar to those derived previously from the level statistics. At weak two-body interactions [see the results for $V = 1$

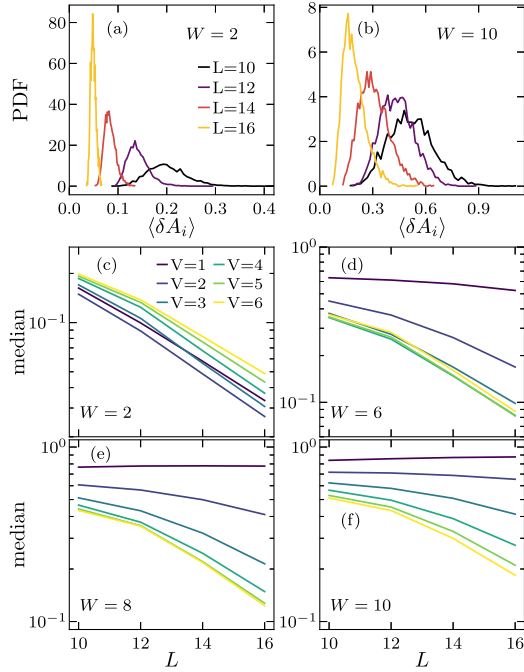


FIG. 4. Fluctuations of the diagonal matrix elements for the model defined in Eq. (11). (a) and (b) PDFs of $\langle \delta A_i \rangle$ [see Eq. (13)] at $V = 6$ for a single site i and 4000 realizations of disorder. (c)–(f) Medians of distributions as in (a) and (b) vs L for various V and W .

in Figs. 4(e) and 4(f)], strongly disordered systems seem to violate the ETH since the eigenstate-to-eigenstate fluctuations stay large for all accessible system sizes. However, the L dependence of the medians at $V > 1$ exhibits clear negative curvatures in this regime of parameters, suggesting that the eigenstate-to-eigenstate fluctuations should eventually start decaying for sufficiently large systems. In the case of stronger two-body interaction, which is the main focus of our study, such decay is clearly visible for all studied disorder strengths.

D. Results for two-body interaction from Eq. (10)

To demonstrate that the ergodicity of the model studied so far is not restricted to the particular form of the interaction, in this section we discuss the average level spacing ratio and the fluctuations of the diagonal matrix elements of observables for the Hamiltonian

$$\tilde{H} = H_0 + V \sum_i \tilde{h}_{\text{ph}}(i), \quad (14)$$

where the pair-hopping term, $\tilde{h}_{\text{ph}}(i)$, is given by Eq. (10). Similarly to the previously discussed case, also $\|\tilde{h}_{\text{ph}}(i)\|$ decays with increasing W (not shown); therefore the entire two-body interaction can be considered as a perturbation to H_0 .

The average level spacing ratios $\langle r \rangle$ obtained at weak interaction $V = 1$ (not shown) are very similar to the results

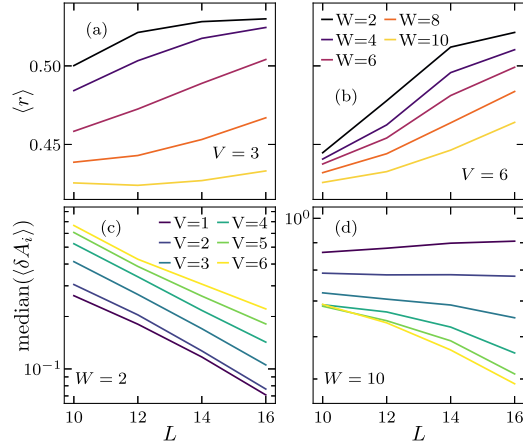


FIG. 5. Ergodicity indicators for the model defined in Eq. (14). (a) and (b) Average level spacing ratio $\langle r \rangle$ vs L at $V = 3$ and 6 , respectively. Results are analogous to those in Figs. 2(c) and 2(e), respectively, shown for the model from Eq. (11). (c) and (d) Medians of the PDFs of the eigenstate-to-eigenstate fluctuations $\langle \delta A_i \rangle$ from Eq. (13) at $W = 2$ and 10 , respectively. Results are analogous to those in Figs. 4(c) and 4(f), respectively, shown for the model from Eq. (11).

for the previously studied model from Eq. (11) shown in Figs. 2(a) and 2(b). The results at stronger interactions $V = 3$ and 6 are shown in Figs. 5(a) and 5(b), respectively. Although deviations of $\langle r \rangle$ from r_{GOE} are more pronounced than in the case of the model from Eq. (11), the L dependence of $\langle r \rangle$ consistently supports the expectation that the spectral properties of macroscopic systems should approach the GOE predictions.

Finally, we also calculated the fluctuations of the diagonal matrix elements $\langle \delta A_i \rangle$ from Eq. (13). Similarly to the discussion in Sec. III C, we obtained the PDFs of $\langle \delta A_i \rangle$, and in Figs. 5(c) and 5(d) we show the corresponding medians. Accessible system sizes do not allow one to formulate univocal claims concerning ergodicity of macroscopic systems at very strong disorder and weak two-body interactions. However, results in the strong-interaction regime clearly indicate that the system satisfies the ETH.

IV. DISCUSSION

We studied the ergodicity of Anderson insulator chains with two-body interactions. A similar problem has been widely studied for systems with nearest-neighbor density-density interactions, mappable onto the random-field spin-1/2 XXZ chain. Due to its simplicity, the random-field XXZ chain appears to be the most natural model for the studies on MBL. However, the interaction term in the fermionic models mappable onto the XXZ chains is rather specific in that it has a large projection on (products of) LIOMs of the single-particle Anderson insulator. Due to this important property, only a tiny part of the two-body interaction represents a true perturbation to the Anderson insulators.

One may expect that a generic local two-body interaction also contains other terms which have no projections on the Anderson LIOMs and thus have greater impact on the ergodicity of disordered systems. For this reason, in this paper we have studied two cases of the pair-hopping interactions which have negligible projections on the Anderson LIOMs.

We found that the results for finite systems at strong disorder W and weak two-body interaction V qualitatively reproduce the known results for random-field XXZ chains. However, the regime with exceedingly different model parameters is most demanding for numerical calculations. For this reason, our results neither confirm nor contradict the presence of localization for large W and $V/W \ll 1$. In the opposite case where V and W are of the same order of magnitude, which was

the main focus of this paper, our numerical results indicate that macroscopic systems are ergodic. The latter observation follows from our studies of the average level spacing ratios as well as the fluctuations of the diagonal matrix elements of local observables.

ACKNOWLEDGMENTS

We acknowledge support from the National Science Centre, Poland, via Project No. 2020/37/B/ST3/00020 (B.K. and M.M.) and support from the Slovenian Research Agency (ARRS), Research Core Funding Grants No. P1-0044 (L.V. and J.B.) and No. N1-0273 (L.V.). The numerical calculations were partly carried out at the facilities of the Wrocław Centre for Networking and Supercomputing.

-
- [1] A. Pal and D. A. Huse, Many-body localization phase transition, *Phys. Rev. B* **82**, 174411 (2010).
- [2] O. S. Barišič and P. Prelovšek, Conductivity in a disordered one-dimensional system of interacting fermions, *Phys. Rev. B* **82**, 161106(R) (2010).
- [3] D. J. Luitz, N. Laflorencie, and F. Alet, Many-body localization edge in the random-field Heisenberg chain, *Phys. Rev. B* **91**, 081103(R) (2015).
- [4] D. J. Luitz, N. Laflorencie, and F. Alet, Extended slow dynamical regime prefiguring the many-body localization transition, *Phys. Rev. B* **93**, 060201(R) (2016).
- [5] E. J. Torres-Herrera and L. F. Santos, Dynamics at the many-body localization transition, *Phys. Rev. B* **92**, 014208 (2015).
- [6] S. Bera, H. Schomerus, F. Heidrich-Meisner, and J. H. Bardarson, Many-Body Localization Characterized from a One-Particle Perspective, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 046603 (2015).
- [7] J. Hauschild, F. Heidrich-Meisner, and F. Pollmann, Domain-wall melting as a probe of many-body localization, *Phys. Rev. B* **94**, 161109(R) (2016).
- [8] T. Devakul and R. R. P. Singh, Early Breakdown of Area-Law Entanglement at the Many-Body Delocalization Transition, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 187201 (2015).
- [9] C. L. Bertrand and A. M. García-García, Anomalous Thouless energy and critical statistics on the metallic side of the many-body localization transition, *Phys. Rev. B* **94**, 144201 (2016).
- [10] E. V. H. Doggen, F. Schindler, K. S. Tikhonov, A. D. Mirlin, T. Neupert, D. G. Polyakov, and I. V. Gornyi, Many-body localization and delocalization in large quantum chains, *Phys. Rev. B* **98**, 174202 (2018).
- [11] J. Šuntajs, J. Bonča, T. Prosen, and L. Vidmar, Quantum chaos challenges many-body localization, *Phys. Rev. E* **102**, 062144 (2020).
- [12] J. Šuntajs, J. Bonča, T. Prosen, and L. Vidmar, Ergodicity breaking transition in finite disordered spin chains, *Phys. Rev. B* **102**, 064207 (2020).
- [13] P. Sierant, M. Lewenstein, and J. Zakrzewski, Polynomially Filtered Exact Diagonalization Approach to Many-Body Localization, *Phys. Rev. Lett.* **125**, 156601 (2020).
- [14] D. Basko, I. Aleiner, and B. Altshuler, Metal-insulator transition in a weakly interacting many-electron system with localized single-particle states, *Ann. Phys. (Amsterdam)* **321**, 1126 (2006).
- [15] V. Oganesyan and D. A. Huse, Localization of interacting fermions at high temperature, *Phys. Rev. B* **75**, 155111 (2007).
- [16] M. Žnidarič, T. Prosen, and P. Prelovšek, Many-body localization in the Heisenberg XXZ magnet in a random field, *Phys. Rev. B* **77**, 064426 (2008).
- [17] M. Serbyn, Z. Papić, and D. A. Abanin, Universal Slow Growth of Entanglement in Interacting Strongly Disordered Systems, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 260601 (2013).
- [18] M. Mierzejewski, J. Herbrych, and P. Prelovšek, Universal dynamics of density correlations at the transition to the many-body localized state, *Phys. Rev. B* **94**, 224207 (2016).
- [19] H. P. Lüschen, P. Bordia, S. Scherg, F. Alet, E. Altman, U. Schneider, and I. Bloch, Observation of Slow Dynamics near the Many-Body Localization Transition in One-Dimensional Quasiperiodic Systems, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 260401 (2017).
- [20] P. Bordia, H. Lüschen, S. Scherg, S. Gopalakrishnan, M. Knap, U. Schneider, and I. Bloch, Probing Slow Relaxation and Many-Body Localization in Two-Dimensional Quasiperiodic Systems, *Phys. Rev. X* **7**, 041047 (2017).
- [21] M. Serbyn, Z. Papić, and D. A. Abanin, Thouless energy and multifractality across the many-body localization transition, *Phys. Rev. B* **96**, 104201 (2017).
- [22] F. Weiner, F. Evers, and S. Bera, Slow dynamics and strong finite-size effects in many-body localization with random and quasiperiodic potentials, *Phys. Rev. B* **100**, 104204 (2019).
- [23] T. Chanda, P. Sierant, and J. Zakrzewski, Time dynamics with matrix product states: Many-body localization transition of large systems revisited, *Phys. Rev. B* **101**, 035148 (2020).
- [24] T. C. Berkelbach and D. R. Reichman, Conductivity of disordered quantum lattice models at infinite temperature: Many-body localization, *Phys. Rev. B* **81**, 224429 (2010).
- [25] Y. Bar Lev, G. Cohen, and D. R. Reichman, Absence of Diffusion in an Interacting System of Spinless Fermions on a One-Dimensional Disordered Lattice, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 100601 (2015).
- [26] O. S. Barišič, J. Kokalj, I. Balog, and P. Prelovšek, Dynamical conductivity and its fluctuations along the crossover to many-body localization, *Phys. Rev. B* **94**, 045126 (2016).

- [27] R. Steinigeweg, J. Herbrych, F. Pollmann, and W. Brenig, Typicality approach to the optical conductivity in thermal and many-body localized phases, *Phys. Rev. B* **94**, 180401(R) (2016).
- [28] S. Bera, G. De Tomasi, F. Weiner, and F. Evers, Density Propagator for Many-Body Localization: Finite-Size Effects, Transient Subdiffusion, and Exponential Decay, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 196801 (2017).
- [29] P. Prelovšek, M. Mierzejewski, O. S. Barišić, and J. Herbrych, Density correlations and transport in models of many-body localization, *Ann. Phys. (Berlin)* **529**, 1600362 (2017).
- [30] J. H. Bardarson, F. Pollmann, and J. E. Moore, Unbounded Growth of Entanglement in Models of Many-Body Localization, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 017202 (2012).
- [31] J. A. Kjäll, J. H. Bardarson, and F. Pollmann, Many-Body Localization in a Disordered Quantum Ising Chain, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 107204 (2014).
- [32] E. Baygan, S. P. Lim, and D. N. Sheng, Many-body localization and mobility edge in a disordered spin- $\frac{1}{2}$ Heisenberg ladder, *Phys. Rev. B* **92**, 195153 (2015).
- [33] F. Pietracaprina, G. Parisi, A. Mariano, S. Pascazio, and A. Scardicchio, Entanglement critical length at the many-body localization transition, *J. Stat. Mech.: Theory Exp.* (2017) 113102.
- [34] P. Sierant, D. Delande, and J. Zakrzewski, Many-body localization due to random interactions, *Phys. Rev. A* **95**, 021601(R) (2017).
- [35] P. Sierant and J. Zakrzewski, Level statistics across the many-body localization transition, *Phys. Rev. B* **99**, 104205 (2019).
- [36] M. Kiefer-Emmanouilidis, R. Unanyan, M. Fleischhauer, and J. Sirker, Evidence for Unbounded Growth of the Number Entropy in Many-Body Localized Phases, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 243601 (2020).
- [37] D. Sels and A. Polkovnikov, Dynamical obstruction to localization in a disordered spin chain, *Phys. Rev. E* **104**, 054105 (2021).
- [38] M. Kiefer-Emmanouilidis, R. Unanyan, M. Fleischhauer, and J. Sirker, Slow delocalization of particles in many-body localized phases, *Phys. Rev. B* **103**, 024203 (2021).
- [39] T. LeBlond, D. Sels, A. Polkovnikov, and M. Rigol, Universality in the onset of quantum chaos in many-body systems, *Phys. Rev. B* **104**, L201117 (2021).
- [40] L. Vidmar, B. Krajewski, J. Bonča, and M. Mierzejewski, Phenomenology of Spectral Functions in Disordered Spin Chains at Infinite Temperature, *Phys. Rev. Lett.* **127**, 230603 (2021).
- [41] D. Sels and A. Polkovnikov, Thermalization of Dilute Impurities in One-Dimensional Spin Chains, *Phys. Rev. X* **13**, 011041 (2023).
- [42] D. Sels, Bath-induced delocalization in interacting disordered spin chains, *Phys. Rev. B* **106**, L020202 (2022).
- [43] F. Evers and S. Bera, The internal clock of many-body (de-)localization, [arXiv:2302.11384](https://arxiv.org/abs/2302.11384).
- [44] P. Sierant and J. Zakrzewski, Challenges to observation of many-body localization, *Phys. Rev. B* **105**, 224203 (2022).
- [45] A. Morningstar, L. Colmenarez, V. Khemani, D. J. Luitz, and D. A. Huse, Avalanches and many-body resonances in many-body localized systems, *Phys. Rev. B* **105**, 174205 (2022).
- [46] D. A. Abanin, E. Altman, I. Bloch, and M. Serbyn, Colloquium: Many-body localization, thermalization, and entanglement, *Rev. Mod. Phys.* **91**, 021001 (2019).
- [47] R. K. Panda, A. Scardicchio, M. Schulz, S. R. Taylor, and M. Žnidarič, Can we study the many-body localisation transition? *EPL (Europhys. Lett.)* **128**, 67003 (2020).
- [48] D. Abanin, J. Bardarson, G. De Tomasi, S. Gopalakrishnan, V. Khemani, S. Parameswaran, F. Pollmann, A. Potter, M. Serbyn, and R. Vasseur, Distinguishing localization from chaos: Challenges in finite-size systems, *Ann. Phys. (Amsterdam)* **427**, 168415 (2021).
- [49] P. J. D. Crowley and A. Chandran, A constructive theory of the numerically accessible many-body localized to thermal crossover, *SciPost Phys.* **12**, 201 (2022).
- [50] N. Bölter and S. Kehrein, Scrambling and many-body localization in the XXZ chain, *Phys. Rev. B* **105**, 104202 (2022).
- [51] A. De Luca and A. Scardicchio, Ergodicity breaking in a model showing many-body localization, *EPL (Europhys. Lett.)* **101**, 37003 (2013).
- [52] B. Krajewski, L. Vidmar, J. Bonča, and M. Mierzejewski, Restoring Ergodicity in a Strongly Disordered Interacting Chain, *Phys. Rev. Lett.* **129**, 260601 (2022).
- [53] J. M. Deutsch, Quantum statistical mechanics in a closed system, *Phys. Rev. A* **43**, 2046 (1991).
- [54] M. Srednicki, Chaos and quantum thermalization, *Phys. Rev. E* **50**, 888 (1994).
- [55] M. Rigol, V. Dunjko, and M. Olshanii, Thermalization and its mechanism for generic isolated quantum systems, *Nature (London)* **452**, 854 (2008).
- [56] L. D'Alessio, Y. Kafri, A. Polkovnikov, and M. Rigol, From quantum chaos and eigenstate thermalization to statistical mechanics and thermodynamics, *Adv. Phys.* **65**, 239 (2016).
- [57] Y. Y. Atas, E. Bogomolny, O. Giraud, and G. Roux, Distribution of the Ratio of Consecutive Level Spacings in Random Matrix Ensembles, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 084101 (2013).
- [58] V. Khemani, S. P. Lim, D. N. Sheng, and D. A. Huse, Critical Properties of the Many-Body Localization Transition, *Phys. Rev. X* **7**, 021013 (2017).
- [59] F. Andraschko, T. Enss, and J. Sirker, Purification and Many-Body Localization in Cold Atomic Gases, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 217201 (2014).
- [60] H. Kim, T. N. Ikeda, and D. A. Huse, Testing whether all eigenstates obey the eigenstate thermalization hypothesis, *Phys. Rev. E* **90**, 052105 (2014).
- [61] R. Mondaini, K. R. Fratus, M. Srednicki, and M. Rigol, Eigenstate thermalization in the two-dimensional transverse field Ising model, *Phys. Rev. E* **93**, 032104 (2016).
- [62] D. Jansen, J. Stolpp, L. Vidmar, and F. Heidrich-Meisner, Eigenstate thermalization and quantum chaos in the Holstein polaron model, *Phys. Rev. B* **99**, 155130 (2019).
- [63] M. Mierzejewski, M. Środa, J. Herbrych, and P. Prelovšek, Resistivity and its fluctuations in disordered many-body systems: From chains to planes, *Phys. Rev. B* **102**, 161111(R) (2020).
- [64] B. Krajewski, M. Mierzejewski, and J. Bonča, Modeling sample-to-sample fluctuations of the gap ratio in finite disordered spin chains, *Phys. Rev. B* **106**, 014201 (2022).

ROZDZIAŁ

7

Dependence of charge transport in tilted chains on the choice of two-body interaction

Analiza wprowadzona w rozdziale 5 wymaga znajomości postaci całek ruchu izolatora Andersona $Q_\alpha^{(A)} = 2c_\alpha^\dagger c_\alpha - 1$, gdzie $c_\alpha = \sum_j \langle j|\alpha\rangle c_j^\dagger$ tworzy cząstkę w stanie własnym Andersona $|\alpha\rangle$. W przypadku izolatora Andersona funkcja falowa nie posiada jawnej postaci, więc wartości $\langle j|\alpha\rangle$ muszą być każdorazowo wyliczone numerycznie, co uniemożliwia przeprowadzenie obliczeń analitycznych.

Z tego powodu w artykule [A4] przeprowadzamy wyżej wymienioną analizę dla modelu z liniowym potencjałem (zależy on liniowo od współrzędnych przestrzennych) i oddziaływaniami. Model ten wykazuje tzw. lokalizację wielociałową Starka, co zostało krótko omówione w sekcji 3.2.2. Jest on opisywany Hamiltonianem $H = H_0 + H_V$, gdzie jednocząstkowa część H_0 wykazuje lokalizację Wanniera-Starka

$$H_0 = t \sum_j (c_j^\dagger c_{j+1} + \text{H.c.}) + F \sum_j j \left(n_j - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \sum_\beta \varepsilon_\beta Q_\beta^{(S)} + \text{const}, \quad (7.1)$$

gdzie

$$Q_\beta^{(S)} = 2f_\beta^\dagger f_\beta - 1, \quad f_\beta^\dagger = \sum_j \langle j|\beta\rangle c_j^\dagger, \quad (7.2)$$

a H_V oznacza oddziaływanie gęstość-gęstość

$$H_V = V \sum_j h(j) = V \sum_j \left(n_j - \frac{1}{2} \right) \left(n_{j+1} - \frac{1}{2} \right). \quad (7.3)$$

Model H_0 posiada podobne własności do modelu Andersona – stany własne są eksponencjalnie zlokalizowane, lecz znana jest ich jawna postać

$$\langle j|\beta\rangle = \mathcal{J}_{j-\beta}(2/F), \quad (7.4)$$

gdzie $\mathcal{J}_{j-\beta}(2/F)$ jest funkcją Bessela pierwszego rodzaju. Dzięki jawnej postaci funkcji falowej, a co za tym idzie – jawnej postaci całek ruchu układu bez oddziaływań, możliwe jest wyliczenie jawnej postaci *rzeczywistego zaburzenia* z równań 5.4 i 5.5, przy założeniu nieskończonego układu oraz nieskończonej temperatury

$$\begin{aligned} H_V^\perp &= V \sum_j h^\perp(j) = H_V - V \sum_j h^\parallel(j) \\ &= H_V - V \sum_{j,\alpha,d} (\mathcal{J}_{j-\alpha} \mathcal{J}_{j-\alpha-d+1} - \mathcal{J}_{j-\alpha+1} \mathcal{J}_{j-\alpha-d})^2 \\ &\quad \times \sum_{k,l,m,n} \mathcal{J}_{k-\alpha} \mathcal{J}_{l-\alpha} \mathcal{J}_{m-(\alpha+d)} \mathcal{J}_{n-(\alpha+d)} \left(c_k^\dagger c_l - \frac{1}{2} \delta_{kl} \right) \left(c_m^\dagger c_n - \frac{1}{2} \delta_{mn} \right), \end{aligned} \quad (7.5)$$

gdzie sumy po indeksach α, j, k, l, n, m przeprowadzone są w granicach $(-\infty, \infty)$, a $d \in [1, \infty)$ oraz zastosowano notację $\mathcal{J}_j \equiv \mathcal{J}_j(2/F)$.




Ten rezultat pozwolił potwierdzić, że procedura wyliczania *rzeczywistego zaburzenia* H_V^\perp zachowuje jego lokalność oraz wyliczyć jego własności w granicy dużego pola F . Norma $h^\perp(j)$ maleje jak $1/F$

$$\|h^\perp(j)\| = \frac{1}{2} \frac{1}{F} + O\left(\frac{1}{F^2}\right), \quad (7.6)$$

co jest analogicznym wynikiem do rezultatu otrzymanego dla modelu nieuporządkowanego w rozdziale 5, gdzie zaobserwowano odwrotną proporcjonalność normy *rzeczywistego zaburzenia* do siły nieporządku. Dodatkowo wyliczono dokładne postaci wiodących wkładów H_V^\perp do drugiego rzędu rozwinięcia potęgowego w $1/F$. Ważnym rezultatem jest, że oddziaływania zaproponowane w rozdziale 6 (równania 6.2 i 6.1) pojawiają się w tym rozwinięciu.

W artykule [A4] przeprowadzamy również obliczenia numeryczne, mające na celu zbadanie wpływu rodzaju oddziaływania na dynamikę obsadzeń w modelu z czasowo zależnym strumieniem pola – równoważnym modelowi z liniowym potencjałem, lecz umożliwiającym zastosowanie periodycznych warunków brzegowych. Badane typy oddziaływań odpowiadają wyliczonym częściom składowym H_V^\perp . W rezultacie otrzymaliśmy przyspieszenie dynamiki: współczynnik dyfuzji jest większy o kilka rzędów wielkości przy wyborze skorelowanych przeskoków jako oddziaływania zamiast oddziaływania gęstość-gęstość.

Najważniejszym wynikiem tej pracy było pokazanie, że wyznaczone numerycznie własności *rzeczywistego zaburzenia* w modelach z nieporządkiem, można wyprowadzić analitycznie dla modeli z liniowym potencjałem.

Dependence of charge transport in tilted chains on the choice of two-body interactionBartosz Krajewski  and Marcin Mierzejewski *Institute of Theoretical Physics, Faculty of Fundamental Problems of Technology,
Wrocław University of Science and Technology, 50-370 Wrocław, Poland* (Received 18 September 2024; revised 28 January 2025; accepted 12 February 2025; published 19 February 2025)

We study tilted chains of spinless fermions in the presence of the nearest-neighbor density-density interaction for which the noninteracting counterpart displays Stark localization. We demonstrate that the latter two-body interaction can be decomposed into two (orthogonal) parts which, respectively, commute and do not commute with the single-particle Hamiltonian. We derive an explicit form of the noncommuting part that decreases with tilt and describes the nearest-neighbor correlated hopping and the pair-hopping interaction. When the density-density coupling is replaced by the pair-hopping interaction of the same magnitude then the charge dynamics may be faster by a few orders of magnitude than in the original model.

DOI: [10.1103/PhysRevB.111.075150](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.111.075150)**I. INTRODUCTION**

The study of many-body localization (MBL) has significantly advanced our understanding of nonequilibrium dynamics in quantum systems. MBL was introduced in systems with disordered potentials, where it was conjectured that despite the presence of interactions, one can still observe the breakdown of thermalization, resulting in localized eigenstates [1–7]. This phenomenon has been extensively studied both theoretically [8–18] and experimentally [19–23], primarily in one-dimensional settings. It is characterized, among others, by extremely slow dynamics [21,24–30], logarithmic growth of entanglement entropy in time [24,31–34], and subdiffusive transport for weaker disorders [35–40]. Although finite strongly disordered systems appear localized, the fate of localization in macroscopic systems is still under debate [7,41–51].

Similar research may also be carried out beyond the framework of disorder-induced localization to investigate whether nonergodic behavior can arise in interacting systems without quenched disorder. One particularly intriguing direction concerns the Stark many-body localization that may exist in tilted systems subject to linear potential gradients [52–58]. These systems are accessible experimentally in cold atoms and trapped ions experiments [59–61] and offer a unique way to study the ergodicity breaking transition. The suppression of transport in tilted systems [62] and disordered systems [63] appears similar in that the transport coefficients decrease exponentially with either the strength of disorder or with the strength of the tilt. However, the origins of localization in the noninteracting limits of both models are different. In particular, the tilted model of noninteracting particles exhibits the Wannier-Stark localization that can be linked to energy conservation [64]. Interacting Stark chains conserve the dipole moment, implying that transport at small wave vectors is subdiffusive [60,62,65].

It has recently been argued that the density-density interaction commonly used to study MBL is not a truly representative example of the many-body interaction since only a small part of this two-body interaction acts as a perturbation to the

Anderson insulator [66]. Specifically, the most of the density-density interaction can be expressed in terms of occupations of the single-particle Anderson states, meaning that this part does not disturb the Anderson insulator. The remaining part of the interaction represents the true perturbation that, however, strongly decreases with the disorder strength. Eventually, for strong disorders the true perturbation may be too small to be accurately detected by numerical simulations of finite systems, thus resulting in contradictory conclusions. To illustrate this problem, we have studied models for which the strength of the true perturbation is of the same order of magnitude as the single-particle Hamiltonian [66] or at least does not decrease with disorder [67]. In such models, the indicators of localization are strongly suppressed, and the finite-size scaling suggests ergodicity of macroscopic systems.

The very same problem emerges also in the case of the Stark MBL. However, in contrast to disordered systems, the single-particle eigenstates in the Stark chains have a simple analytical form which allows one to study tilted systems analytically [53]. Taking advantage of this property, in this work we calculate analytically the form of the true perturbation for a tilted model with density-density interaction up to the second order in the high-field expansion, $1/F$. We show that the true perturbation has a form of correlated hopping and pair-hopping interaction on the neighboring lattice sites. Finally, we demonstrate that the slow dynamics observed in a chain with density-density interaction originates, at least partially, from the smallness of the true perturbation. In particular, when the density-density interaction is replaced by the pair hopping interaction of the same strength, then the dynamics is shown to speed up by a few orders of magnitude.

The paper is organized as follows. In Sec. II, we recall the notion of the true perturbation and the method of its calculation. We calculate the norm of the true perturbation for tilted model in Sec. II A and calculate its analytical form in Sec. II B. In Sec. III, we present numerical results of charge dynamics for tilted model subject to various types of interaction chosen based on form of the true perturbation. We summarize and discuss our results in Sec. IV

II. TRUE PERTURBATION IN THE STARK MODEL WITH DENSITY-DENSITY INTERACTION

A. The strength of the true perturbation

We consider an interacting tilted chain of length L with open boundary conditions. The system is described by the Hamiltonian $H = H_0 + H_V$. The first part, H_0 , is a single-particle model that exhibits the Wannier-Stark localization

$$H_0 = \sum_j (c_j^\dagger c_{j+1} + \text{H.c.}) + F \sum_j j \tilde{n}_j. \quad (1)$$

Here, c_j^\dagger creates a spinless fermion at site j , $n_j = c_j^\dagger c_j$, $\tilde{n}_j = n_j - \frac{1}{2}$, and F is a tilt of the lattice. The second term, H_V , is a density-density interaction

$$H_V = V \sum_j h(j), \quad h(j) = \tilde{n}_j \tilde{n}_{j+1}. \quad (2)$$

The main focus of this work is to decompose H_V into two parts $H_V = H_V^\parallel + H_V^\perp$ such that $[H_V^\parallel, H_0] = 0$. It is rather obvious that only H_V^\perp may perturb the Wannier-Stark localization; thus we call this term the true perturbation. First, we determine how the strength of H_V^\perp depends on F , while its explicit form will be discussed in subsequent subsection.

The single-particle part of the Hamiltonian may be written in a diagonal form [53]

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_\alpha \varepsilon_\alpha Q_\alpha + \text{const}, \quad (3)$$

with

$$Q_\alpha = 2f_\alpha^\dagger f_\alpha - 1, \quad f_\alpha^\dagger = \sum_j \langle j|\alpha\rangle c_j^\dagger. \quad (4)$$

Away from the boundaries of the studied chain, the single-particle energies are equidistant, $\varepsilon_\alpha = F\alpha$, and the single-particle eigenstates can be expressed by the Bessel functions of the first kind, $\langle j|\alpha\rangle = \mathcal{J}_{j-\alpha}(2/F)$ for which we use $1/F$ expansion [68]

$$\mathcal{J}_{j-\alpha}(2/F) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+j-\alpha)!} \left(\frac{1}{F}\right)^{2m+j-\alpha}. \quad (5)$$

One observes that the wave function $\langle j|\alpha\rangle$ is Wannier-Stark localized at site $j_0 = \alpha$ and exhibits approximately exponential decay in the real space, $|\langle j|\alpha\rangle| \sim F^{-|j-j_0|}$.

The occupations of the Wannier-Stark states, Q_α , as well as their products, $Q_{\alpha,d}^{(2)} \equiv Q_\alpha Q_{\alpha+d}$, commute with H_0 . Therefore the true perturbation refers to the part of H_V that cannot be expressed by either Q_α or $Q_{\alpha,d}^{(2)}$. In order to single out the true perturbation we note that Q_α are orthonormal with orthogonality and normalization defined via the (Hilbert-Schmidt) product

$$\langle Q_\alpha Q_\beta \rangle = \frac{1}{Z} \text{Tr}(Q_\alpha Q_\beta) = \delta_{\alpha\beta}. \quad (6)$$

Here, the trace is carried out over the many-body Hilbert space of dimension Z so that (...) coincides with the grand-canonical averaging at infinite temperature. It is straightforward to show that the products of occupations are also orthonormal, $\langle Q_{\alpha,d}^{(2)} Q_{\alpha',d'}^{(2)} \rangle = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{dd'}$, provided one takes only positive (or only negative) d . From now on, we choose $d > 0$.

Following the same reasoning as for the disordered systems [66], we first determine projections of the interaction term, Eq. (2), on $Q_{\alpha,d}^{(2)}$,

$$H_V^\parallel = V \sum_j h^\parallel(j), \quad (7)$$

$$h^\parallel(j) = \sum_{\alpha,d} \langle h(j) Q_{\alpha,d}^{(2)} \rangle Q_{\alpha,d}^{(2)}. \quad (8)$$

Obviously, all $h^\parallel(j)$ commute with H_0 so that the entire H_V^\parallel commutes with the single-particle Hamiltonian. Consequently, the true perturbation is defined as the difference

$$H_V^\perp = H_V - H_V^\parallel = V \sum_j h^\perp(j), \quad (9)$$

$$h^\perp(j) = h(j) - h^\parallel(j). \quad (10)$$

The most challenging task related with these calculations is to determine the projections in Eq. (8). In the case of disordered systems, analogous projections have been estimated from numerical calculations [66]. Here, using the single-particle eigenstates from Eq. (5), one can obtain analytically the leading contributions to H_V^\perp . For clarity, from now on, we drop the argument of the Bessel function $\mathcal{J}_j(2/F) \rightarrow \mathcal{J}_j$ and write the explicit form of the projection

$$\begin{aligned} \langle h(j) Q_{\alpha,d}^{(2)} \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{k,l,m,n} \mathcal{J}_{k-\alpha} \mathcal{J}_{l-\alpha} \mathcal{J}_{m-(\alpha+d)} \mathcal{J}_{n-(\alpha+d)} \\ &\times \langle (2n_j - 1)(2n_{j+1} - 1)(2c_k^\dagger c_l - \delta_{kl}) \\ &\times (2c_m^\dagger c_n - \delta_{mn}) \rangle. \end{aligned} \quad (11)$$

The only nonzero elements in the fourfold sum in Eq. (11) are those in which the indices of the creation operators (k, m) and the indices of the annihilation operators (l, n) are permutations of $(j, j+1)$. It leaves one with four elements in the sum which can be written in a compact form

$$\langle h(j) Q_{\alpha,d}^{(2)} \rangle = \frac{1}{4} (\mathcal{J}_{j-\alpha} \mathcal{J}_{j-\alpha-d+1} - \mathcal{J}_{j-\alpha+1} \mathcal{J}_{j-\alpha-d})^2. \quad (12)$$

The Bessel functions decay for large F as $|\mathcal{J}_m| \sim (\frac{1}{F})^{|m|}$, see also Eq. (5). One may check (for $d > 0$) that the indexes of the Bessel functions in Eq. (12) satisfy the inequality $|j - \alpha| + |j - \alpha - d + 1| \leq |j - \alpha + 1| + |j - \alpha - d|$, so that the largest projection occurs for $\alpha = j$ and $d = 1$ when the left-hand side of the latter inequality is minimal. The largest projection reads

$$\langle h(j) Q_{j,1}^{(2)} \rangle = \frac{1}{4} (\mathcal{J}_0 \mathcal{J}_0 - \mathcal{J}_1 \mathcal{J}_{-1})^2. \quad (13)$$

Then it is straightforward to calculate the squared norm of $||h^\parallel(j)||^2 = \langle h^\parallel(j) h^\parallel(j) \rangle$. The projection in Eq. (13) is the only term that contributes to that norm up to the second order in $1/F$. Using the fact that $Q_{\alpha,d}^{(2)}$ are orthonormal, one finds from Eq. (8)

$$\begin{aligned} ||h^\parallel(j)||^2 &= \sum_{\alpha,d} \langle h(j) Q_{\alpha,d}^{(2)} \rangle^2 = \langle h(j) Q_{j,1}^{(2)} \rangle^2 + o\left(\frac{1}{F^4}\right) \\ &= \frac{1}{16} - \frac{1}{4} \frac{1}{F^2} + o\left(\frac{1}{F^4}\right). \end{aligned} \quad (14)$$

Finally, one can determine the norm of the true perturbation introduced in Eq. (10). Due to orthogonality of $h^\perp(j)$ and

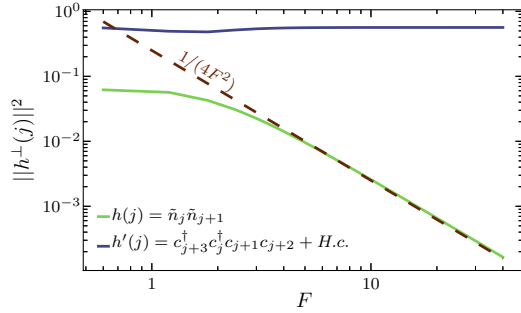


FIG. 1. Squared norms of the density of true perturbation defined in Eqs. (8) and (10) as a function of tilt F . Continuous lines show numerical results obtained for $L = 18$ at half fillings for two types of the many-body interactions, as indicated in the legend. Dashed line shows analytical result from Eq. (15).

$h^{\parallel}(j)$, one finds

$$||h^{\perp}(j)||^2 = ||h(j)||^2 - ||h^{\parallel}(j)||^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{F^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{F^4}\right), \quad (15)$$

i.e., the squared norm of the true perturbation decays as $1/F^2$. It is clear that the strength of the perturbation in the present model is not determined solely by V , but it decreases significantly with F . It poses a challenge to the finite size numerics, as for sufficiently strong tilts the true perturbation becomes so small that the studied model appears localized. A similar result has been established numerically for strongly disordered chains [66]. In the latter case $||h^{\perp}(j)||^2$ decays as $\propto 1/W^2$, where W is the disorder strength.

In order to estimate the applicability of the $1/F$ expansion for finite tilts, we have also carried out numerical studies of a finite system with $L = 18$ sites. We have first calculated the single particle wave-functions $\langle j|\alpha\rangle$ and then numerically constructed the occupations of the Stark-Wannier states Q_{α} as well as their products $Q_{\alpha,d}^{(2)}$ for $d = 1, 2$. Then, the true perturbation $h^{\perp}(j)$ and its norm are calculated using Eqs. (8) and (10). The results are shown in Fig. 1. In the high-field regime, the numeric results fit very accurately the analytical results from Eq. (15), whereas quite reasonable agreement between both results takes place already for $F \geq 2$.

We stress that such quick decay of the true perturbation with F is not a generic property of two-body interactions. As an example in Fig. 1 we show numerical results for the case when the density-density interaction in Eq. (2) is replaced by a pair hopping $h(j) \rightarrow h'(j) = c_{j+3}^{\dagger} c_j^{\dagger} c_{j+1} c_{j+2} + \text{H.c.}$ In such a case, the true perturbation hardly depends on the tilt, i.e., the strength of the perturbation is controlled solely by V .

B. Form of the true perturbation

Having the analytical form of the single-particle wave functions, one may explicitly calculate the leading contributions to the true perturbation. In this section, we expand $H_V^{\perp} = H_V - H_V^{\parallel}$ into a power series in $1/F$ up to the second

order. To do this, we first inspect the matrix elements of H_V^{\parallel}

$$H_V^{\parallel} = V \sum_{j,\alpha,d} 4 \langle h(j) Q_{\alpha,d}^{(2)} \rangle \sum_{k,l,m,n} \mathcal{J}_{k-\alpha} \mathcal{J}_{l-\alpha} \mathcal{J}_{m-(\alpha+d)} \\ \times \mathcal{J}_{n-(\alpha+d)} \left(c_k^{\dagger} c_l - \frac{1}{2} \delta_{kl} \right) \left(c_m^{\dagger} c_n - \frac{1}{2} \delta_{mn} \right). \quad (16)$$

Since H_V is diagonal in the Wannier basis, we first inspect the diagonal part of H_V^{\parallel} in this basis, that will be denoted as $H_V^{\parallel(d)}$. We have argued in the preceding subsection that the projection $\langle h(j) Q_{\alpha,d}^{(2)} \rangle$ in Eq. (16) is of the order of $(\frac{1}{F})^{o_1}$ with $o_1 = 2(|j-\alpha| + |j-\alpha+1-d|)$ whereas the order of the four other Bessel functions in Eq. (16) is $(\frac{1}{F})^{o_2}$ with $o_2 = |k-\alpha| + |l-\alpha| + |m-\alpha-d| + |n-\alpha-d|$. To single out all diagonal terms up to the second order in $1/F$, we investigate all cases with $o_1 + o_2 \leq 2$ and denote the corresponding contributions to $H_V^{\parallel(d)}$ as $D_{o_1 o_2}$.

The largest contribution to $H_V^{\parallel(d)}$ corresponds to $o_1 = o_2 = 0$ when $\alpha = j$, $d = 1$, $k, l = j$ and $m, n = j+1$. Using the expansion of the Bessel functions from Eq. (5), we obtain

$$D_{00} = V \sum_j \left(1 - 6 \frac{1}{F^2} \right) \tilde{n}_j \tilde{n}_{j+1}. \quad (17)$$

There are six diagonal terms corresponding to $o_1 = 0$ and $o_2 = 2$ which sum to

$$D_{02} = 2V \sum_j \frac{1}{F^2} [\tilde{n}_j \tilde{n}_{j+1} + \tilde{n}_j \tilde{n}_{j+2}]. \quad (18)$$

Finally, for $o_1 = 2$ and $o_2 = 0$, one gets two contributions: $\alpha = j$, $d = 2$ or $\alpha = j-1$, $d = 2$ with all other indices set accordingly to fulfill $o_2 = 0$ for which one finds

$$D_{20} = 2V \sum_j \frac{1}{F^2} \tilde{n}_j \tilde{n}_{j+2}. \quad (19)$$

After summing up all diagonal terms, $H_V^{\parallel(d)} = D_{00} + D_{20} + D_{02}$, it is straightforward to calculate also the diagonal part of the true perturbation

$$H_V^{\perp(d)} = H_V - H_V^{\parallel(d)} = \frac{4V}{F^2} \sum_j \tilde{n}_j (n_{j+1} - n_{j+2}). \quad (20)$$

Diagonal part of the true perturbation, H_V^{\perp} , decays quadratically with field and consists of the nearest- and the next-nearest-neighbor density-density interaction.

Next, we focus on the off-diagonal terms of the true perturbation, starting with the contribution that is of the order of $\frac{1}{F}$. Linear terms are obtained from Eq. (16) only for $o_1 = 0$ and $o_2 = 1$, given that o_1 has to be an even number. The former condition yields $\alpha = j$ and $d = 1$ while the latter condition, $|k-j| + |l-j| + |m-j-1| + |n-j-1| = 1$, means that only one of these four summands is nonzero. From these constraints, one obtains four terms describing correlated hoppings which sum up to the following expression

$$H_V^{\perp(1)} = V \sum_j \frac{1}{F} (n_{j+3} - n_j) (c_{j+1}^{\dagger} c_{j+2} + \text{H.c.}). \quad (21)$$

This part of the true perturbation is odd under the inversion transformation $c_j \rightarrow c_{-j}$ but is invariant when the inversion is combined with $F \rightarrow -F$.

Finally, we calculate the quadratic off-diagonal terms of the true perturbation. They are obtained for $o_1 = 0$ and $o_2 = 2$, which yields $\alpha = j$, $d = 1$ and $|k - j| + |l - j| + |m - j - 1| + |n - j - 1| = 2$. This gives one several terms which can be compactly written as

$$H_V^{\perp(2)} = \frac{V}{2} \sum_j \frac{1}{F^2} [(2n_{j+2} - n_j - n_{j+4})(c_{j+1}^\dagger c_{j+3} + \text{H.c.}) + 2(c_j^\dagger c_{j+3} c_{j+2} c_{j+1} + c_j^\dagger c_{j+2} c_{j+3} c_{j+1} + \text{H.c.})]. \quad (22)$$

Having calculated the explicit form of the true perturbation up to the second order in the inverse field $H_V^\perp = H_V^{\perp(d)} + H_V^{\perp(1)} + H_V^{\perp(2)}$, in the subsequent section we check how each contribution to the true perturbation influences the dynamics of the tilted model.

This approach to the true perturbation is general and can be applied to other models in any dimension. In particular, it can be used for the tilted Hubbard model [59–61,69], where we expect similar results for the charge transport. The procedure can also be carried out without formal resorting to projections. As the first step one needs to express the density of particles using the single-particle eigenstates from Eq. (5), $\tilde{n}_j = \sum_{\alpha,\beta} \mathcal{J}_{j-\beta} \mathcal{J}_{j-\alpha} (f_\alpha^\dagger f_\beta - \delta_{\alpha,\beta}/2)$. This result is then used to construct the density-density interaction from Eq. (2), H_V , from which one should single out all terms which can be expressed as products of Q_α defined in Eq. (4), $H_V^\parallel = \sum_{\alpha,d} V_{\alpha,d} Q_\alpha Q_{\alpha+d}$. All other terms of H_V represent the true perturbation, $H_V^\perp = H_V - H_V^\parallel$ which can be expressed again in the original Wannier basis. We note that any approximation introduced to the wave-function $\mathcal{J}_{j-\alpha}$ may affect the perturbation H_V^\perp ; however, the single-particle Hamiltonian from Eq. (1) is exactly taken into account. This is a difference with respect to approaches which consider the single-particle hopping as a perturbation [70].

III. CHARGE DYNAMICS

Analytical calculations in the preceding section show that the true perturbation contains three types of the two-body interaction: density-density coupling in Eq. (20), correlated hoppings in Eqs. (21) and (22) as well as the pair-hopping interactions in Eq. (22). The corresponding coupling strengths decay either as $1/F$ or as $1/F^2$ and for large F the perturbations become too small to be studied numerically in finite systems. In order to overcome this problem and to compare their influence on the charge dynamics, we rescale their strengths and study them separately.

We numerically investigate charge dynamics in a model which is equivalent to the tilted chain but allows for periodic boundary conditions. Introducing periodic boundary conditions reduces the boundary effects and thus facilitates numerical studies of finite systems. However, following results in Ref. [62], we do not expect that boundary conditions introduce significant qualitative changes to the bulk charge dynamics. In models with periodic boundary conditions, the

field F is introduced via time-dependent flux

$$H_F = \sum_j (e^{-iFt} c_j^\dagger c_{j+1} + e^{iFt} c_{j+1}^\dagger c_j) + H'. \quad (23)$$

We choose various forms of the interaction term H' which occur in the true perturbation. As a reference we take a density-density interaction on the nearest-neighbor and the next-nearest-neighbor sites

$$H'_1 = V'_1 \sum_j [\tilde{n}_j \tilde{n}_{j+1} + \tilde{n}_j \tilde{n}_{j+2}], \quad (24)$$

as well as the similar term which represents the diagonal part of the true perturbation, see Eq. (20)

$$H'_2 = V'_2 \sum_j [\tilde{n}_j \tilde{n}_{j+1} - \tilde{n}_j \tilde{n}_{j+2}]. \quad (25)$$

We consider also both off-diagonal parts of H_V^\perp , see Eqs. (21) and (22), rewritten in a form appropriate for the time-dependent flux

$$H'_3 = V'_3 \sum_j (n_{j+3} - n_j) (e^{-iFt} c_{j+1}^\dagger c_{j+2} + \text{H.c.}), \quad (26)$$

$$H'_4 = V'_4 \sum_j [(2n_{j+2} - n_j - n_{j+4}) (e^{-2iFt} c_{j+1}^\dagger c_{j+3} + \text{H.c.}) + 2(c_j^\dagger c_{j+3} c_{j+2} c_{j+1} + e^{-2iFt} c_j^\dagger c_{j+2} c_{j+3} c_{j+1} + \text{H.c.})], \quad (27)$$

alongside a symmetric pair-hopping term from H_V^\perp (2) being also the simplest effective model for a tilted chain

$$H'_5 = V'_5 \sum_j (c_j^\dagger c_{j+3} c_{j+2} c_{j+1} + \text{H.c.}). \quad (28)$$

In numerical calculations, we set $V'_1 = 2$ and then we determine the remaining potentials V'_2, V'_3, V'_4 , and V'_5 in such a way that the norms of all interaction terms are equal

$$\|H'_1\|^2 = \langle H'_1 H'_1 \rangle = \|H'_2\|^2 = \dots = \|H'_5\|^2. \quad (29)$$

The charge dynamics is studied numerically using the same technique as in Ref. [62]. For the sake of completeness, we briefly recall the main steps. Initially, we prepare a thermal state for the Hamiltonian $H_{t < 0} = H_{F=0} + \sum_j \cos(qj) \tilde{n}_j$. To this end, we utilize the microcanonical Lanczos method [71–73]. We use a finite but sufficiently high temperature $kT = 10$, so that the density modulation induced by the term $\sum_j \cos(qj) \tilde{n}_j$ remains within the linear response regime, i.e., the modulation has a form of a plain wave with wave-vector q and the amplitude A_0 , $\langle \tilde{n}_j \rangle = A_0 \cos(qj)$. Then we quench the field F at $t = 0$ and observe the evolution of the amplitude of the modulation, A_t . This amplitude is obtained from the discrete Fourier transform performed on L -dimensional vector $\{(\tilde{n}_1), \dots, (\tilde{n}_L)\}$, whereas the evolution is calculated using the Lanczos propagation method [74,75].

The results for the evolution of normalized wave amplitude A_t/A_0 are presented in Fig. 2 separately for each interaction $H' = H'_1, \dots, H'_5$. We use $L = 24$ and the smallest wave-vectors $q = 2\pi/L$. For the accessible system sizes, we cannot reliably determine how the decay rate Γ depends on q . However, we expect the transport to be either diffusive with $\Gamma \propto q^2$

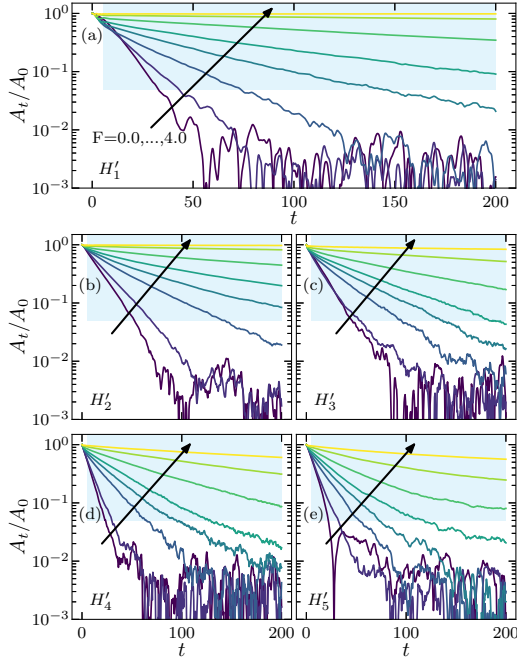


FIG. 2. Time evolution of the normalized amplitude A_t of density modulation with wave vector $q = 2\pi/L$ at $L = 24$ for Hamiltonian $H'_F(t)$ defined in Eq. (23) and $F = 0.0, 0.4, 0.8, 1.0, 1.2, 1.6, 2.4, \text{ and } 4.0$. The arrows represent the increasing F . (a)–(e) contain results for H'_1 – H'_5 , respectively. Shaded areas depict the range where the data were fitted by the exponential function $A_t/A_0 = \exp(-\Gamma t)$.

or subdiffusive $\Gamma \propto q^4$ and in both cases the amplitude of the density modulation decays exponentially in time [62], $A_t = A_0 \exp(-\Gamma t)$, as it is also visible from numerical results in Fig. 2.

The relaxation rates, Γ , have been obtained from fitting results for A_t . We have used results for sufficiently large amplitude, $A_t \geq 0.05A_0$, (marked by shaded area in Fig. 2) for which the deviations from the exponential decay are rather inessential. The relaxation rates obtained for various forms of H' are shown in Fig. 3. In case of weak tilts, $F \lesssim 0.5$, the relaxation rates are of the same order of magnitude. However, upon increasing F the differences between various interactions become very pronounced. The smallest relaxation rate and the slowest charge dynamics take place for the density-density interactions, H'_1 and H'_2 , which are mostly studied in the context of Stark MBL. The relaxation rate is an order of magnitude larger for the case of correlated hopping H'_3 . However, the fastest dynamics is observed for either H'_4 or H'_5 . We recall that the potentials, V'_1, \dots, V'_5 are tuned in such a way that Eq. (29) holds true. We note also that the norms of H'_1, \dots, H'_5 do not depend on F . Consequently, the differences in the relaxation times visible in Fig. 3 can not be attributed to normalization of the interaction terms.

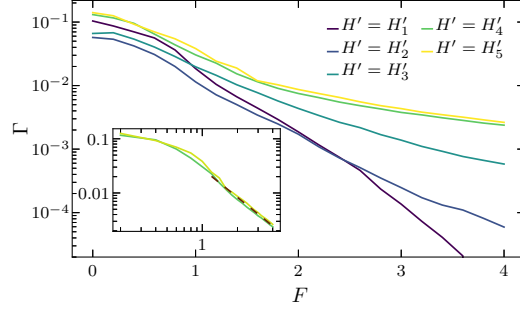


FIG. 3. Decay rate of normalized amplitude of charge density wave with wave vector $q = 2\pi/L$ obtained from exponential fits of shaded area in Fig. 2. The inset shows results for H'_4 and H'_5 on a log-log scale. The dashed line is added as a guide to illustrate the approximate power-law dependence, $\Gamma \propto F^{-1.75}$.

The pair hopping interaction described by H'_5 is the most efficient source of the charge dynamics in strongly tilted chains and the resulting relaxation rate can be two orders of magnitude larger than in the case of density-density interaction. It is interesting that H'_5 , when studied alone as the entire Hamiltonian, strictly conserves the dipole moment, M . It has been considered as an effective model [60,61,65] for the strongly-tilted systems that exhibit the Hilbert space fragmentation [76–83]. We note also that H'_5 appears as a part of H'_4 and they both lead to almost identical relaxation rates, see Fig. 3. This suggests that the conservation of the dipole moment by H'_5 is essential for the charge dynamics. In the Appendix, we discuss the evolution of the dipole moment, $M(t)$, for all considered interactions. The stronger is the tilt, the smaller is the difference $M(t) - M(0)$, in agreement with analytical discussion in Ref. [62]. Therefore, for sufficiently large F , the studied systems evolve mainly within a subspace (or a few subspaces) with fixed M . Out of all studied interactions, only H'_5 directly leads to a charge dynamics that is restricted to a subspace with fixed dipole moment. We expect that the latter mechanism is responsible for the fast dynamics observed in this model.

The decay of the relaxation rates for H'_4 and H'_5 seems to be a power law, (see the inset in Fig. 3), as opposed to a clear exponential decay for H'_1 . However, this observation should be verified for a larger span of F . In particular, it seems important to discuss the case when F (multiplied by a lattice constant) is the largest energy scale in the system. Since the dynamics is extremely slow already for the tilts shown in Fig. 3, it will be hard to establish numerically the values of Γ for even stronger tilts. Therefore the approximate power-law dependence shown in the inset in Fig. 3, $\Gamma \sim 1/F^2$, should be considered as an empirical observation that holds for moderate tilts, $1 \lesssim F \lesssim 4$.

Results shown in Fig. 3 lead to several observations. Although various forms of interaction lead to very different relaxation times, for all cases we observe that the decay rates decrease with F but remain nonzero for any finite F . This agrees with the previous observations that finite tilted systems ($L < \infty$) appear localized only up to a finite time, t^* ,

which depends on the size of the system and the strength of the tilt [84]. In the case of systems with the density-density interactions (H'_1 and H'_2) the latter dependence is exponential [62,84,85], i.e., $t^* \sim 1/\Gamma$ with $\log(\Gamma) \propto -F$, whereas for the pair-hopping interaction, we obtained a power-law dependence that holds at least for moderate fields. In order to establish the L dependence of the relaxation rates, one needs to use an approach that allows to study a broader span of system sizes, e.g., the matrix product state methods which were previously used for studies of the tilted chains [62,84].

IV. SUMMARY

The fate of the single particle localization in the presence of the many-body interactions has recently attracted a significant interest. The cases of the single-particle Anderson insulator and the Stark localization have been studied in the context of MBL and Stark MBL, respectively. One usually considers the simplest many-body interaction, H_V , being the nearest-neighbor density-density coupling. One may formally single out a part of H_V which does not commute with the one-particle Hamiltonian and represents the true perturbation to the single-particle localization. Such procedure has been carried out numerically for disordered systems [66] whereas in present work we derive an explicit form of the true perturbation for chains tiled by the field F taking into account terms up to the order $1/F^2$. The main contributions to the true perturbations describe the nearest-neighbor correlated hopping and the pair hopping interactions. Finally, we have shown that the charge dynamics in the Stark chain significantly depends on the choice of the two-body interaction. When the density-density coupling is replaced by the pair-hopping interaction of the same magnitude then the charge dynamics may speed up by a few orders of magnitude. Therefore the slow charge dynamics in the mostly studied model with the density-density interaction originates, at least partially, from the smallness of the true perturbation and seems not to be generic for other two-body interactions. In this respect, the Stark MBL systems closely resemble the disordered MBL chains. It would be interesting to study the possible onset of the Stark localization in systems where the true perturbation does not decrease with the field and conserves the dipole moment. To this end one may either study the standard model with the density-density interaction that is appropriately rescaled by the field, or one may directly introduce an interaction that has the same properties as the pair hopping interaction.

ACKNOWLEDGMENTS

We acknowledge support from the National Science Centre, Poland via Project No. 2020/37/B/ST3/00020. The numerical calculations were partly carried out at the facilities of the Wrocław Centre for Networking and Supercomputing.

APPENDIX: CONSERVATION OF THE DIPOLE MOMENT

In the Appendix, we study the dynamics of the dipole moment in the models which were considered in the main text. In particular, we demonstrate that for sufficiently strong

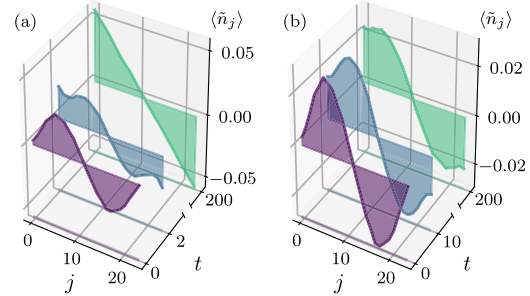


FIG. 4. The density modulation for the Hamiltonian $\tilde{H} = \tilde{H}_0 + \tilde{H}'_3$ (a) with $F = 0.4$ at times $t = 0, t = 2$, and $t = 200$, (b) with $F = 4.0$ at times $t = 0, t = 10$, and $t = 200$.

tilt, the dipole moment is conserved for all considered Hamiltonians. To this end, we consider the same Hamiltonians as in Sec. II but with *open boundary conditions*, $\tilde{H} = \tilde{H}_0 + \tilde{H}'$. Again, the first term is a single particle model that exhibits the

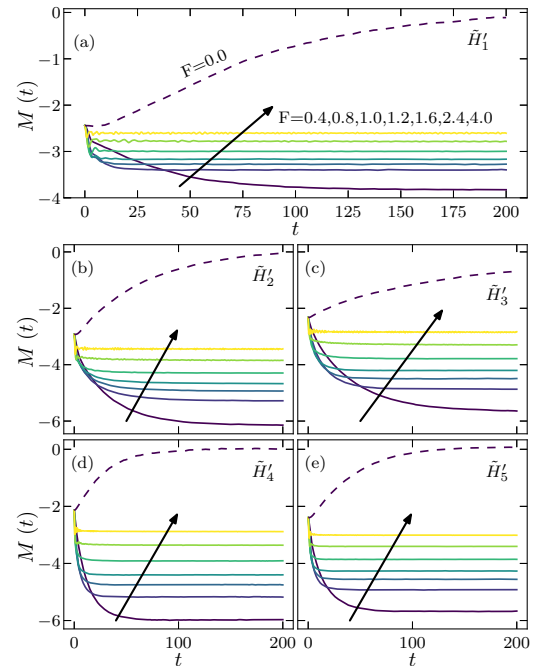


FIG. 5. Time evolution of the dipole moment, $M(t)$ in a chain with $L = 24$. Dashed curves show results without a tilt, $F = 0$. Continuous lines present results are obtained for tilts $F = 0.4, 0.8, 1.0, 1.2, 1.6, 2.4$, and 4.0 and arrows represent the increasing F . (a)–(e) contain results for interaction \tilde{H}'_1 – \tilde{H}'_5 , respectively.

Wannier-Stark localization:

$$\tilde{H}_0 = \sum_j (c_j^\dagger c_{j+1} + \text{H.c.}) + FM, \quad (\text{A1})$$

where M is a dipole moment

$$M = \sum_{j=0}^{L-1} \tilde{n}_j (j - j_c). \quad (\text{A2})$$

For convenience, the positions of particles are determined relative to the center of the chain, $j_c = (L-1)/2$, so that the dipole moment in Eq. (A2) vanishes for symmetrically distributed particles.

For the interaction part \tilde{H}' we choose the same forms of interaction as in Sec. III; however, without a time-dependent flux:

$$\tilde{H}'_1 = V'_1 \sum_j [\tilde{n}_j \tilde{n}_{j+1} + \tilde{n}_j \tilde{n}_{j+2}], \quad (\text{A3})$$

$$\tilde{H}'_2 = V'_2 \sum_j [\tilde{n}_j \tilde{n}_{j+1} - \tilde{n}_j \tilde{n}_{j+2}], \quad (\text{A4})$$

$$\tilde{H}'_3 = V'_3 \sum_j (n_{j+3} - n_j) (c_{j+1}^\dagger c_{j+2} + \text{H.c.}), \quad (\text{A5})$$

$$\tilde{H}'_4 = V'_4 \sum_j [(2n_{j+2} - n_j - n_{j+4}) (c_{j+1}^\dagger c_{j+3} + \text{H.c.}) + 2(c_j^\dagger c_{j+3} c_{j+2} c_{j+1} + c_j^\dagger c_{j+2} c_{j+3} c_{j+1} + \text{H.c.})], \quad (\text{A6})$$

$$\tilde{H}'_5 = V'_5 \sum_j (c_j^\dagger c_{j+3} c_{j+2} c_{j+1} + \text{H.c.}), \quad (\text{A7})$$

where the potentials V'_1, \dots, V'_5 are exactly the same as in Sec. III.

To calculate the dynamics of the dipole moment, we follow a similar procedure as in Sec. III. Using the microcanonical Lanczos method, we generate the initial state for the dynamics as a thermal state for the Hamiltonian $\tilde{H}_{t < 0} = \tilde{H}_{F=0} - \sum_j \sin(qj) \tilde{n}_j$ at temperature $kT = 10$. Then, we quench the field F at $t = 0$ and follow the dynamics of the initial state. For the calculations, we use $L = 24$ and $q = 2\pi/(L-1)$.

An exemplary time evolution is shown in Fig. 4. The results are calculated for Hamiltonian $\tilde{H} = \tilde{H}_0 + \tilde{H}'_i$ at small $F = 0.4$ and high $F = 4.0$ fields in panels (a) and (b), respectively. At a small field $F = 0.4$, the evolution is relatively fast. The final configuration at $t = 200$ reflects the linear tilt and appears to be independent of the original charge modulation. At a higher field $F = 4.0$, the dynamics is much slower and the original modulation is well preserved within the studied entire time-window.

Next, we calculate the time evolution of dipole moment, $M(t) = \langle \psi(t) | M | \psi(t) \rangle$, for all interactions from Eqs. (A3)–(A7). The results are shown in Fig. 5. As expected for systems with $F = 0$, the dipole moment vanishes during the evolutions independently of the choice of the interaction. Here, the fastest decay rates are observed for \tilde{H}'_4 and \tilde{H}'_5 . For $F \neq 0$, the dipole moment changes in time and saturates at stationary value $M(\infty) = M(t \rightarrow \infty)$. The stronger the field, the smaller the variation $|M(\infty) - M(0)|$, and the faster $M(t)$ reaches its stationary value. Similarly, to the case of periodic system with time-dependent flux discussed in Sec. III, we observe the fastest dynamics for interactions \tilde{H}'_4 and \tilde{H}'_5 . The main conclusion is that for sufficiently large F , the evolutions of all studied models are restricted to a subspace or a few subspaces with fixed dipole moment.

-
- [1] D. Basko, I. Aleiner, and B. Altshuler, Metal–insulator transition in a weakly interacting many-electron system with localized single-particle states, *Ann. Phys.* **321**, 1126 (2006).
- [2] I. V. Gornyi, A. D. Mirlin, and D. G. Polyakov, Interacting electrons in disordered wires: Anderson localization and low- t transport, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 206603 (2005).
- [3] V. Oganesyan and D. A. Huse, Localization of interacting fermions at high temperature, *Phys. Rev. B* **75**, 155111 (2007).
- [4] R. Nandkishore and D. A. Huse, Many-body-localization and thermalization in quantum statistical mechanics, *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **6**, 15 (2015).
- [5] E. Altman and R. Vosk, Universal dynamics and renormalization in many-body-localized systems, *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **6**, 383 (2015).
- [6] F. Alet and N. Laflorencie, Many-body localization: An introduction and selected topics, *C. R. Physique* **19**, 498 (2018).
- [7] D. A. Abanin, E. Altman, I. Bloch, and M. Serbyn, Colloquium: Many-body localization, thermalization, and entanglement, *Rev. Mod. Phys.* **91**, 021001 (2019).
- [8] A. Pal and D. A. Huse, Many-body localization phase transition, *Phys. Rev. B* **82**, 174411 (2010).
- [9] O. S. Barišić and P. Prelovšek, Conductivity in a disordered one-dimensional system of interacting fermions, *Phys. Rev. B* **82**, 161106(R) (2010).
- [10] D. J. Luitz, N. Laflorencie, and F. Alet, Many-body localization edge in the random-field Heisenberg chain, *Phys. Rev. B* **91**, 081103(R) (2015).
- [11] E. J. Torres-Herrera and L. F. Santos, Dynamics at the many-body localization transition, *Phys. Rev. B* **92**, 014208 (2015).
- [12] T. Devakul and R. R. P. Singh, Early breakdown of area-law entanglement at the many-body delocalization transition, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 187201 (2015).
- [13] J. Hauschild, F. Heidrich-Meisner, and F. Pollmann, Domain-wall melting as a probe of many-body localization, *Phys. Rev. B* **94**, 161109(R) (2016).
- [14] C. L. Bertrand and A. M. García-García, Anomalous Thouless energy and critical statistics on the metallic side of the many-body localization transition, *Phys. Rev. B* **94**, 144201 (2016).
- [15] J. Šuntajs, J. Bonča, T. Prosen, and L. Vidmar, Quantum chaos challenges many-body localization, *Phys. Rev. E* **102**, 062144 (2020).
- [16] J. Šuntajs, J. Bonča, T. Prosen, and L. Vidmar, Ergodicity breaking transition in finite disordered spin chains, *Phys. Rev. B* **102**, 064207 (2020).
- [17] P. Sierant, M. Lewenstein, and J. Zakrzewski, Polynomially filtered exact diagonalization approach to many-body localization, *Phys. Rev. Lett.* **125**, 156601 (2020).

- [18] P. Sierant, D. Delande, and J. Zakrzewski, Thouless time analysis of anderson and many-body localization transitions, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 186601 (2020).
- [19] M. Schreiber, S. S. Hodgman, P. Bordia, H. P. Lüschen, M. H. Fischer, R. Vosk, E. Altman, U. Schneider, and I. Bloch, Observation of many-body localization of interacting fermions in a quasi-random optical lattice, *Science* **349**, 842 (2015).
- [20] J. Smith, A. Lee, P. Richerme, B. Neyenhuis, P. W. Hess, P. Hauke, M. Heyl, D. A. Huse, and C. Monroe, Many-body localization in a quantum simulator with programmable random disorder, *Nat. Phys.* **12**, 907 (2016).
- [21] H. P. Lüschen, P. Bordia, S. Scherg, F. Alet, E. Altman, U. Schneider, and I. Bloch, Observation of slow dynamics near the many-body localization transition in one-dimensional quasiperiodic systems, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 260401 (2017).
- [22] A. Lukin, M. Rispoli, R. Schittko, M. E. Tai, A. M. Kaufman, S. Choi, V. Khemani, J. Léonard, and M. Greiner, Probing entanglement in a many-body-localized system, *Science* **364**, 256 (2019).
- [23] J. Léonard, S. Kim, M. Rispoli, A. Lukin, R. Schittko, J. Kwan, E. Demler, D. Sels, and M. Greiner, Probing the onset of quantum avalanches in a many-body localized system, *Nat. Phys.* **19**, 481 (2023).
- [24] M. Žnidarič, T. Prosen, and P. Prelovšek, Many-body localization in the Heisenberg XXZ magnet in a random field, *Phys. Rev. B* **77**, 064426 (2008).
- [25] M. Serbyn, Z. Papić, and D. A. Abanin, Universal slow growth of entanglement in interacting strongly disordered systems, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 260601 (2013).
- [26] M. Mierzejewski, J. Herbrych, and P. Prelovšek, Universal dynamics of density correlations at the transition to the many-body localized state, *Phys. Rev. B* **94**, 224207 (2016).
- [27] P. Bordia, H. Lüschen, S. Scherg, S. Gopalakrishnan, M. Knap, U. Schneider, and I. Bloch, Probing slow relaxation and many-body localization in two-dimensional quasiperiodic systems, *Phys. Rev. X* **7**, 041047 (2017).
- [28] M. Serbyn, Z. Papić, and D. A. Abanin, Thouless energy and multifractality across the many-body localization transition, *Phys. Rev. B* **96**, 104201 (2017).
- [29] F. Weiner, F. Evers, and S. Bera, Slow dynamics and strong finite-size effects in many-body localization with random and quasiperiodic potentials, *Phys. Rev. B* **100**, 104204 (2019).
- [30] T. Chanda, P. Sierant, and J. Zakrzewski, Time dynamics with matrix product states: Many-body localization transition of large systems revisited, *Phys. Rev. B* **101**, 035148 (2020).
- [31] J. H. Bardarson, F. Pollmann, and J. E. Moore, Unbounded growth of entanglement in models of many-body localization, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 017202 (2012).
- [32] J. A. Kjäll, J. H. Bardarson, and F. Pollmann, Many-body localization in a disordered quantum Ising chain, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 107204 (2014).
- [33] E. Baygan, S. P. Lim, and D. N. Sheng, Many-body localization and mobility edge in a disordered spin - 1/2 Heisenberg ladder, *Phys. Rev. B* **92**, 195153 (2015).
- [34] F. Pietracaprina, G. Parisi, A. Mariano, S. Pascazio, and A. Scardicchio, Entanglement critical length at the many-body localization transition, *J. Stat. Mech.* (2017) 113102.
- [35] T. C. Berkelbach and D. R. Reichman, Conductivity of disordered quantum lattice models at infinite temperature: Many-body localization, *Phys. Rev. B* **81**, 224429 (2010).
- [36] Y. Bar Lev, G. Cohen, and D. R. Reichman, Absence of diffusion in an interacting system of spinless fermions on a one-dimensional disordered lattice, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 100601 (2015).
- [37] O. S. Barišić, J. Kokalj, I. Balog, and P. Prelovšek, Dynamical conductivity and its fluctuations along the crossover to many-body localization, *Phys. Rev. B* **94**, 045126 (2016).
- [38] R. Steinigeweg, J. Herbrych, F. Pollmann, and W. Brenig, Typicality approach to the optical conductivity in thermal and many-body localized phases, *Phys. Rev. B* **94**, 180401(R) (2016).
- [39] S. Bera, G. De Tomasi, F. Weiner, and F. Evers, Density propagator for many-body localization: Finite-size effects, transient subdiffusion, and exponential decay, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 196801 (2017).
- [40] P. Prelovšek, M. Mierzejewski, O. S. Barišić, and J. Herbrych, Density correlations and transport in models of many-body localization, *Ann. Phys.* **529**, 1600362 (2016).
- [41] R. K. Panda, A. Scardicchio, M. Schulz, S. R. Taylor, and M. Žnidarič, Can we study the many-body localisation transition? *Europhys. Lett.* **128**, 67003 (2020).
- [42] M. Kiefer-Emmanouilidis, R. Unanyan, M. Fleischhauer, and J. Sirker, Evidence for unbounded growth of the number entropy in many-body localized phases, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 243601 (2020).
- [43] D. Sels and A. Polkovnikov, Dynamical obstruction to localization in a disordered spin chain, *Phys. Rev. E* **104**, 054105 (2021).
- [44] M. Kiefer-Emmanouilidis, R. Unanyan, M. Fleischhauer, and J. Sirker, Slow delocalization of particles in many-body localized phases, *Phys. Rev. B* **103**, 024203 (2021).
- [45] D. Abanin, J. Bardarson, G. De Tomasi, S. Gopalakrishnan, V. Khemani, S. Parameswaran, F. Pollmann, A. Potter, M. Serbyn, and R. Vasseur, Distinguishing localization from chaos: Challenges in finite-size systems, *Ann. Phys.* **427**, 168415 (2021).
- [46] T. LeBlond, D. Sels, A. Polkovnikov, and M. Rigol, Universality in the onset of quantum chaos in many-body systems, *Phys. Rev. B* **104**, L201117 (2021).
- [47] L. Vidmar, B. Krajeński, J. Bonča, and M. Mierzejewski, Phenomenology of spectral functions in disordered spin chains at infinite temperature, *Phys. Rev. Lett.* **127**, 230603 (2021).
- [48] D. Sels and A. Polkovnikov, Thermalization of dilute impurities in one-dimensional spin chains, *Phys. Rev. X* **13**, 011041 (2023).
- [49] D. Sels, Bath-induced delocalization in interacting disordered spin chains, *Phys. Rev. B* **106**, L020202 (2022).
- [50] P. Sierant and J. Zakrzewski, Challenges to observation of many-body localization, *Phys. Rev. B* **105**, 224203 (2022).
- [51] F. Evers, I. Modak, and S. Bera, Internal clock of many-body delocalization, *Phys. Rev. B* **108**, 134204 (2023).
- [52] M. Schulz, C. A. Hooley, R. Moessner, and F. Pollmann, Stark many-body localization, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 040606 (2019).
- [53] E. van Nieuwenburg, Y. Baum, and G. Refael, From Bloch oscillations to many-body localization in clean interacting systems, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **116**, 9269 (2019).

- [54] S. R. Taylor, M. Schulz, F. Pollmann, and R. Moessner, Experimental probes of stark many-body localization, *Phys. Rev. B* **102**, 054206 (2020).
- [55] R. Yao, T. Chanda, and J. Zakrzewski, Many-body localization in tilted and harmonic potentials, *Phys. Rev. B* **104**, 014201 (2021).
- [56] R. Yao, T. Chanda, and J. Zakrzewski, Nonergodic dynamics in disorder-free potentials, *Ann. Phys.* **435**, 168540 (2021) [Special Issue on Localisation 2020](#).
- [57] P. R. N. Falcão and J. Zakrzewski, Nonergodic dynamics for an impurity interacting with bosons in a tilted lattice, *Phys. Rev. B* **108**, 134201 (2023).
- [58] J. J. Mendoza-Arenas and S. R. Clark, Giant rectification in strongly interacting driven tilted systems, *PRX Quantum* **5**, 010341 (2024).
- [59] E. Guardado-Sanchez, A. Morningstar, B. M. Spar, P. T. Brown, D. A. Huse, and W. S. Bakr, Subdiffusion and heat transport in a tilted two-dimensional fermi-hubbard system, *Phys. Rev. X* **10**, 011042 (2020).
- [60] S. Scherg, T. Kohlert, P. Sala, F. Pollmann, B. Hebbe Madhusudhana, I. Bloch, and M. Aidelsburger, Observing non-ergodicity due to kinetic constraints in tilted fermi-hubbard chains, *Nat. Commun.* **12**, 4490 (2021).
- [61] T. Kohlert, S. Scherg, P. Sala, F. Pollmann, B. Hebbe Madhusudhana, I. Bloch, and M. Aidelsburger, Exploring the regime of fragmentation in strongly tilted fermi-hubbard chains, *Phys. Rev. Lett.* **130**, 010201 (2023).
- [62] S. Nandy, J. Herbrych, Z. Lenarčič, A. Głódkowski, P. Prelovšek, and M. Mierzejewski, Emergent dipole moment conservation and subdiffusion in tilted chains, *Phys. Rev. B* **109**, 115120 (2024).
- [63] P. Prelovšek, J. Herbrych, and M. Mierzejewski, Slow diffusion and thouless localization criterion in modulated spin chains, *Phys. Rev. B* **108**, 035106 (2023).
- [64] G. H. Wannier, Dynamics of band electrons in electric and magnetic fields, *Rev. Mod. Phys.* **34**, 645 (1962).
- [65] S. Moudgalya, A. Prem, R. Nandkishore, N. Regnault, and B. A. Bernevig, *Thermalization and Its Absence within Krylov Subspaces of a Constrained Hamiltonian*, Memorial Volume for Shoucheng Zhang (World Scientific Publishing Co., Singapore, 2021), Chap. 7, pp. 147–209.
- [66] B. Krajewski, L. Vidmar, J. Bonča, and M. Mierzejewski, Restoring ergodicity in a strongly disordered interacting chain, *Phys. Rev. Lett.* **129**, 260601 (2022).
- [67] B. Krajewski, L. Vidmar, J. Bonča, and M. Mierzejewski, Strongly disordered anderson insulator chains with generic two-body interaction, *Phys. Rev. B* **108**, 064203 (2023).
- [68] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Eds., *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Applied Mathematics Series 55 (National Bureau of Standards, Washington, D.C., 1964).
- [69] H. Atanasova, A. Erpenbeck, E. Gull, Y. B. Lev, and G. Cohen, Stark many-body localization in interacting infinite dimensional systems, *Phys. Rev. Lett.* **132**, 166301 (2024).
- [70] A. Mallick and J. Zakrzewski, Anomalous localization in spin chains with tilted interactions, *Phys. Rev. B* **109**, 214206 (2024).
- [71] M. W. Long, P. Prelovšek, S. El Shawish, J. Karadamoglou, and X. Zotos, Finite-temperature dynamical correlations using the microcanonical ensemble and the lanczos algorithm, *Phys. Rev. B* **68**, 235106 (2003).
- [72] P. Prelovšek and J. Bonča, Ground state and finite temperature lanczos methods, *Strongly Correlated Systems - Numerical Methods*, edited by A. Avella and F. Mancini (Springer, Berlin, 2013).
- [73] J. Herbrych, M. Mierzejewski, and P. Prelovšek, Relaxation at different length scales in models of many-body localization, *Phys. Rev. B* **105**, L081105 (2022).
- [74] T. J. Park and J. C. Light, Unitary quantum time evolution by iterative lanczos reduction, *J. Chem. Phys.* **85**, 5870 (1986).
- [75] M. Mierzejewski and P. Prelovšek, Nonlinear current response of an isolated system of interacting fermions, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 186405 (2010).
- [76] S. Pai, M. Pretko, and R. M. Nandkishore, Localization in fractonic random circuits, *Phys. Rev. X* **9**, 021003 (2019).
- [77] V. Khemani, M. Hermele, and R. Nandkishore, Localization from hilbert space shattering: From theory to physical realizations, *Phys. Rev. B* **101**, 174204 (2020).
- [78] S. Moudgalya, B. A. Bernevig, and N. Regnault, Quantum many-body scars and hilbert space fragmentation: a review of exact results, *Rep. Prog. Phys.* **85**, 086501 (2022).
- [79] G. Francica and L. Dell'Anna, Hilbert space fragmentation in a long-range system, *Phys. Rev. B* **108**, 045127 (2023).
- [80] P. Brighi, M. Ljubotina, and M. Serbyn, Hilbert space fragmentation and slow dynamics in particle-conserving quantum East models, *SciPost Phys.* **15**, 093 (2023).
- [81] M. Will, R. Moessner, and F. Pollmann, Realization of hilbert space fragmentation and fracton dynamics in 2d, [arXiv:2311.05695](#) (2023).
- [82] P. Sala, T. Rakovszky, R. Verresen, M. Knap, and F. Pollmann, Ergodicity breaking arising from hilbert space fragmentation in dipole-conserving hamiltonians, *Phys. Rev. X* **10**, 011047 (2020).
- [83] P. Łydźba, P. Prelovšek, and M. Mierzejewski, Local integrals of motion in dipole-conserving models with hilbert space fragmentation, *Phys. Rev. Lett.* **132**, 220405 (2024).
- [84] G. Zisling, D. M. Kennes, and Y. Bar Lev, Transport in stark many-body localized systems, *Phys. Rev. B* **105**, L140201 (2022).
- [85] T. M. Gunawardana and B. Buča, Dynamical 1-bits and persistent oscillations in stark many-body localization, *Phys. Rev. B* **106**, L161111 (2022).

Podsumowanie i wnioski

Celem rozprawy było wyjaśnienie przyczyn szeroko dyskutowanych w literaturze trudności w interpretacji wyników uzyskiwanych w standardowym modelu MBL, gdzie wyniki ścisłych obliczeń numerycznych mogą prowadzić do sprzecznych wniosków na temat własności układu w granicy termodynamicznej. Na drodze serii spójnych badań [A1–A4] pokazaliśmy, że jest to konsekwencja wyboru specyficznego oddziaływania gęstość-gęstość.

Jednym z kluczowych punktów wyjścia rozprawy było wykazanie, że standardowy model MBL może być interpretowany jako słabo zaburzony izolator Andersona (rozdział 4), a jego własności (takie jak charakter funkcji spektralnych) można wyjaśnić poprzez założenie delokalizacji części całek ruchu izolatora Andersona pod wpływem oddziaływań, bez konieczności zakładania istnienia fazy zlokalizowanej oraz l-bitów. Ten rezultat spowodował dalsze zainteresowanie naturą zaburzenia w modelu MBL i stanowił motywację do przeprowadzenia kolejnych badań.

Fizycy teoretycy najczęściej wykorzystują najprostsze modele, mając nadzieję, że na ich podstawie będą mogli wyciągnąć wnioski dotyczące bardziej złożonych układów. Jednak w przypadku MBL oddziaływanie w standardowym modelu nie jest reprezentatywne dla innych oddziaływań dwuciałowych. Stanowi to najważniejszy rezultat tej rozprawy: tylko niewielka część oddziaływania wykorzystywanego w standardowym modelu MBL rzeczywiście zaburza izolator Andersona (rozdział 5). Siła tego zaburzenia maleje wraz ze wzrostem nieporządku. Oznacza to, że wyniki literaturowe uzyskiwane przy bardzo silnym nieporządku dotyczą de facto ekstremalnie słabych zaburzeń, których nie sposób wiarygodnie uchwycić numerycznie dla dostępnych rozmiarów układów.

Jako rozwiązanie tego problemu zaproponowano wykorzystanie innych form

oddziaływania, które w całości stanowią *rzeczywiste zaburzenie* izolatora Andersona: (i) odpowiednio przeskalowanego *rzeczywistego zaburzenia* (rozdział 5), (ii) skorelowanych przeskoków (rozdział 6). W obu przypadkach otrzymane układy były „bardziej” ergodyczne, nawet przy ekstremalnie silnych nieporządkach w przypadku (i). Co więcej, w przypadku (ii) wykluczono istnienie zjawiska lokalizowania się układu dla silnych oddziaływań (tzw. *reentrant behavior*), charakterystycznego dla standardowego modelu MBL.

W rozdziale 7 przeniesiono zaproponowaną analizę do modelu z liniowym potencjałem (gdzie, w przypadku braku oddziaływania, również dochodzi do lokalizacji). Znajomość jawnej postaci całek ruchu umożliwiła analityczne wyprowadzenie *rzeczywistego zaburzenia*. Zbieżność wniosków z rozdziałów 5–7 wzmacnia obraz, w którym to wybór operatora oddziaływania, a nie siła nieporządku sama w sobie, decyduje o obserwowanych cechach dynamiki modeli.

Na tym tle można zreinterpretować trend obecny w literaturze: wiele prac, opierając się na obliczeniach numerycznych, stopniowo podnosiło wartość nieporządku wymaganą do lokalizacji [15, 155, 156]. Rezultaty zawarte w tej rozprawie pokazują, że wraz ze wzrostem nieporządku problem numeryczny staje się coraz trudniejszy, ponieważ *rzeczywiste zaburzenie* słabnie i staje się niewidoczne dla skończonych rozmiarów układu. Innymi słowy, rosnący próg lokalizacji może być w dużej mierze artefaktem modelowania i metod numerycznych.

Biorąc pod uwagę ogromny wysiłek włożony w badania standardowego modelu MBL, mimo znalezionych problemów, z którymi się on boryka, wciąż kluczowe pozostaje pytanie, czy dla skończonego nieporządku ($W < \infty$) może występować ścisła lokalizacja w tym modelu.

Zdaniem autora, obecnie dostępne metody numeryczne mogą nie być w stanie jednoznacznie rozstrzygnąć tej kwestii. Co gorsza, przybliżone metody analityczne również zawodzą, ponieważ rozważane układy są „w przybliżeniu” zlokalizowane. Dobrym kierunkiem wydaje się droga ścisłych rozważań matematycznych – analogicznych do tych przedstawionych w pracy [128], w której wykazano brak dyfuzji. Należy jednak podkreślić, że brak dyfuzji nie jest równoznaczny z dowodem istnienia fazy zlokalizowanej.

W tym kontekście niniejsza rozprawa proponuje zmianę perspektywy w badaniach numerycznych nad lokalizacją wielociałową. Zamiast koncentrować się wyłącznie na sile nieporządku, kluczowe okazuje się zrozumienie struktury operatora oddziaływania i jego rzeczywistego wpływu na własności układu. W rozprawie pokazano, że standardowy model MBL stanowi przypadek szczególny, w którym efektywna siła zaburzenia zanika wraz ze wzrostem nieporządku, prowadząc do

istotnych ograniczeń interpretacyjnych. Zaproponowane alternatywne modele oddziaływań otwierają drogę do bardziej wiarygodnych analiz numerycznych i teoretycznych oraz pozwalają oddzielić artefakty modelowania od rzeczywistych efektów fizycznych. W szerszej perspektywie wyniki te wskazują, że pytanie o istnienie fazy MBL wymaga bardziej precyzyjnego sformułowania, uwzględniającego zarówno wybór oddziaływania, jak i granice stosowalności dostępnych metod numerycznych.

Bibliografija

- [1] P. W. Anderson, Absence of diffusion in certain random lattices, *Phys. Rev.* **109**, 1492 (1958).
- [2] V. Oganesyan and D. A. Huse, Localization of interacting fermions at high temperature, *Phys. Rev. B* **75**, 155111 (2007).
- [3] I. V. Gornyi, A. D. Mirlin, and D. G. Polyakov, Interacting electrons in disordered wires: Anderson localization and low- t transport, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 206603 (2005).
- [4] D. Basko, I. Aleiner, and B. Altshuler, Metal–insulator transition in a weakly interacting many-electron system with localized single-particle states, *Ann. Phys.* **321**, 1126 (2006).
- [5] P. Sierant, M. Lewenstein, A. Scardicchio, L. Vidmar, and J. Zakrzewski, Many-body localization in the age of classical computing, *Reports on Progress in Physics* **88**, 026502 (2025).
- [6] J. Šuntajs, J. Bonča, T. c. v. Prosen, and L. Vidmar, Quantum chaos challenges many-body localization, *Phys. Rev. E* **102**, 062144 (2020).
- [7] F. Weiner, F. Evers, and S. Bera, Slow dynamics and strong finite-size effects in many-body localization with random and quasiperiodic potentials, *Phys. Rev. B* **100**, 104204 (2019).
- [8] J. Šuntajs, J. Bonča, T. Prosen, and L. Vidmar, Ergodicity breaking transition in finite disordered spin chains, *Phys. Rev. B* **102**, 064207 (2020).
- [9] M. Kiefer-Emmanouilidis, R. Unanyan, M. Fleischhauer, and J. Sirker, Slow delocalization of particles in many-body localized phases, *Phys. Rev. B* **103**, 024203 (2021).
- [10] D. Sels and A. Polkovnikov, Dynamical obstruction to localization in a disordered spin chain, *Phys. Rev. E* **104**, 054105 (2021).
- [11] D. Sels and A. Polkovnikov, Thermalization of dilute impurities in one-dimensional spin chains, *Phys. Rev. X* **13**, 011041 (2023).

- [12] P. Sierant, D. Delande, and J. Zakrzewski, Thouless time analysis of anderson and many-body localization transitions, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 186601 (2020).
- [13] D. J. Luitz and Y. B. Lev, Absence of slow particle transport in the many-body localized phase, *Phys. Rev. B* **102**, 100202 (2020).
- [14] D. Abanin, J. Bardarson, G. De Tomasi, S. Gopalakrishnan, V. Khemani, S. Parameswaran, F. Pollmann, A. Potter, M. Serbyn, and R. Vasseur, Distinguishing localization from chaos: Challenges in finite-size systems, *Ann. Phys.* **427**, 168415 (2021).
- [15] P. Sierant and J. Zakrzewski, Challenges to observation of many-body localization, *Phys. Rev. B* **105**, 224203 (2022).
- [16] J. M. Deutsch, Eigenstate thermalization hypothesis, *Rep. Prog. Phys.* **81**, 082001 (2018).
- [17] D. Boltzmann, *Vorlesungen über Gastheorie* (Barth, Leipzig, 1896).
- [18] O. Penrose, *Foundations of statistical mechanics* (Pergamon Press, Oxford, 1970).
- [19] L. D'Alessio, Y. Kafri, A. Polkovnikov, and M. Rigol, From quantum chaos and eigenstate thermalization to statistical mechanics and thermodynamics, *Adv. Phys.* **65**, 239 (2016).
- [20] H. A. Lorentz, The motion of electrons in metallic bodies i, *Proceedings*, **7**, 438–453 (KNAW, 1905).
- [21] Y. G. Sinai, On the foundations of the ergodic hypothesis for a dynamical system of statistical mechanics, *Doklady Akademii Nauk*, volume 153, 1261–1264 (Russian Academy of Sciences, 1963).
- [22] Y. G. Sinai, Dynamical systems with elastic reflections, *Russian Mathematical Surveys* **25**, 137 (1970).
- [23] M. Kardar, *Statistical Physics of Particles* (Cambridge University Press, 2007).
- [24] S. Dal Conte, L. Vidmar, D. Golež, M. Mierzejewski, G. Soavi, S. Peli, F. Banfi, G. Ferrini, R. Comin, B. M. Ludbrook, L. Chauviere, N. D. Zhigadlo, H. Eisaki, M. Greven, S. Lupi, A. Damascelli, D. Brida, M. Capone, J. Bonča, G. Cerullo, and C. Giannetti, Snapshots of the retarded interaction of charge carriers with ultrafast fluctuations in cuprates, *Nature Physics* **11**, 421 (2015).
- [25] D. A. Abanin, E. Altman, I. Bloch, and M. Serbyn, Colloquium: Many-body localization, thermalization, and entanglement, *Rev. Mod. Phys.* **91**, 021001 (2019).

- [26] J. M. Deutsch, Quantum statistical mechanics in a closed system, *Phys. Rev. A* **43**, 2046 (1991).
- [27] M. Srednicki, Chaos and quantum thermalization, *Phys. Rev. E* **50**, 888 (1994).
- [28] M. Srednicki, The approach to thermal equilibrium in quantized chaotic systems, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **32**, 1163 (1999).
- [29] M. Rigol and M. Srednicki, Alternatives to eigenstate thermalization, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 110601 (2012).
- [30] M. Rigol, V. Dunjko, and M. Olshanii, Thermalization and its mechanism for generic isolated quantum systems, *Nature (London)* **452**, 854 (2008).
- [31] P. Łydźba, Y. Zhang, M. Rigol, and L. Vidmar, Single-particle eigenstate thermalization in quantum-chaotic quadratic hamiltonians, *Phys. Rev. B* **104**, 214203 (2021).
- [32] P. Tokarczyk, L. Vidmar, and P. Łydźba, Single-quasiparticle eigenstate thermalization, *Phys. Rev. E* **109**, 024102 (2024).
- [33] F. Haake, *Quantum Signatures of Chaos*, Springer series in synergetics, 3 edition (Springer, Berlin, Germany, 2010).
- [34] Y. Y. Atas, E. Bogomolny, O. Giraud, and G. Roux, Distribution of the ratio of consecutive level spacings in random matrix ensembles, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 084101 (2013).
- [35] I. Bengtsson and K. Życzkowski, *Geometry of quantum states* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2006).
- [36] D. N. Page, Average entropy of a subsystem, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1291 (1993).
- [37] P. Łydźba, M. Rigol, and L. Vidmar, Eigenstate entanglement entropy in random quadratic hamiltonians, *Phys. Rev. Lett.* **125**, 180604 (2020).
- [38] P. Łydźba, M. Rigol, and L. Vidmar, Entanglement in many-body eigenstates of quantum-chaotic quadratic hamiltonians, *Phys. Rev. B* **103**, 104206 (2021).
- [39] J. Eisert, M. Cramer, and M. B. Plenio, Colloquium: Area laws for the entanglement entropy, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 277 (2010).
- [40] M. Mierzejewski, J. Herbrych, and P. Prelovšek, Universal dynamics of density correlations at the transition to the many-body localized state, *Phys. Rev. B* **94**, 224207 (2016).

- [41] P. Prelovšek, M. Mierzejewski, O. S. Barišić, and J. Herbrych, Density correlations and transport in models of many-body localization, *Annalen der Physik* **529**, 1600362 (2016).
- [42] M. Schreiber, S. S. Hodgman, P. Bordia, H. P. Lüschen, M. H. Fischer, R. Vosk, E. Altman, U. Schneider, and I. Bloch, Observation of many-body localization of interacting fermions in a quasi-random optical lattice, *Science* **349**, 842 (2015).
- [43] P. Bordia, H. P. Lüschen, S. S. Hodgman, M. Schreiber, I. Bloch, and U. Schneider, Coupling Identical 1D Many-Body Localized Systems, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 140401 (2016).
- [44] H. P. Lüschen, P. Bordia, S. Scherg, F. Alet, E. Altman, U. Schneider, and I. Bloch, Observation of slow dynamics near the many-body localization transition in one-dimensional quasiperiodic systems, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 260401 (2017).
- [45] C. J. Turner, A. A. Michailidis, D. A. Abanin, M. Serbyn, and Z. Papić, Weak ergodicity breaking from quantum many-body scars, *Nature Physics* **14**, 745 (2018).
- [46] M. Serbyn, D. A. Abanin, and Z. Papić, Quantum many-body scars and weak breaking of ergodicity, *Nature Physics* **17**, 675 (2021).
- [47] T. Iadecola and M. Žnidarič, Exact localized and ballistic eigenstates in disordered chaotic spin ladders and the fermi-hubbard model, *Phys. Rev. Lett.* **123**, 036403 (2019).
- [48] C. J. Turner, A. A. Michailidis, D. A. Abanin, M. Serbyn, and Z. Papić, Quantum scarred eigenstates in a rydberg atom chain: Entanglement, breakdown of thermalization, and stability to perturbations, *Phys. Rev. B* **98**, 155134 (2018).
- [49] H. Bernien, S. Schwartz, A. Keesling, H. Levine, A. Omran, H. Pichler, S. Choi, A. S. Zibrov, M. Endres, M. Greiner, V. Vuletić, and M. D. Lukin, Probing many-body dynamics on a 51-atom quantum simulator, *Nature* **551**, 579 (2017).
- [50] F. Wilczek, Quantum time crystals, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 160401 (2012).
- [51] K. Sacha, Modeling spontaneous breaking of time-translation symmetry, *Phys. Rev. A* **91**, 033617 (2015).
- [52] J. Zhang, P. W. Hess, A. Kyprianidis, P. Becker, A. Lee, J. Smith, G. Pagano, I.-D. Potirniche, A. C. Potter, A. Vishwanath, N. Y. Yao, and C. Monroe, Observation of a discrete time crystal, *Nature* **543**, 217 (2017).

- [53] K. Sacha and J. Zakrzewski, Time crystals: a review, *Reports on Progress in Physics* **81**, 016401 (2017).
- [54] D. V. Else, C. Monroe, C. Nayak, and N. Y. Yao, Discrete time crystals, *Annual Review of Condensed Matter Physics* **11**, 467 (2020).
- [55] K. Sacha and D. Delande, Anderson localization in the time domain, *Phys. Rev. A* **94**, 023633 (2016).
- [56] M. Rigol, V. Dunjko, V. Yurovsky, and M. Olshanii, Relaxation in a completely integrable many-body quantum system: An ab initio study of the dynamics of the highly excited states of 1d lattice hard-core bosons, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 050405 (2007).
- [57] M. Kollar, F. A. Wolf, and M. Eckstein, Generalized gibbs ensemble prediction of prethermalization plateaus and their relation to nonthermal steady states in integrable systems, *Phys. Rev. B* **84**, 054304 (2011).
- [58] A. C. Cassidy, C. W. Clark, and M. Rigol, Generalized thermalization in an integrable lattice system, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 140405 (2011).
- [59] C. Gogolin, M. P. Müller, and J. Eisert, Absence of thermalization in nonintegrable systems, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 040401 (2011).
- [60] J.-Y. Choi, S. Hild, J. Zeiher, P. Schauß, A. Rubio-Abadal, T. Yefsah, V. Khemani, D. A. Huse, I. Bloch, and C. Gross, Exploring the many-body localization transition in two dimensions, *Science* **352**, 1547 (2016).
- [61] J. Smith, A. Lee, P. Richerme, B. Neyenhuis, P. W. Hess, P. Hauke, M. Heyl, D. A. Huse, and C. Monroe, Many-body localization in a quantum simulator with programmable random disorder, *Nat. Phys.* **12**, 907 (2016).
- [62] M. Rispoli, A. Lukin, R. Schittko, S. Kim, M. E. Tai, J. Léonard, and M. Greiner, Quantum critical behaviour at the many-body localization transition, *Nature* **573**, 385 (2019).
- [63] P. Drude, Zur elektronentheorie der metalle, *Annalen der Physik* **306**, 566 (1900).
- [64] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, *Solid State Physics* (Holt-Saunders, 1976).
- [65] N. Mott and W. T. and, The theory of impurity conduction, *Advances in Physics* **10**, 107 (1961).

- [66] R. E. Borland, The nature of the electronic states in disordered one-dimensional systems, *Proc. R. Soc. Lond.* **274**, 529 (1963).
- [67] J. Šuntajs, T. Prosen, and L. Vidmar, Spectral properties of three-dimensional anderson model, *Annals of Physics* **435**, 168469 (2021). Special issue on Philip W. Anderson.
- [68] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan, Scaling theory of localization: Absence of quantum diffusion in two dimensions, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 673 (1979).
- [69] J. T. Edwards and D. J. Thouless, Numerical studies of localization in disordered systems, *Journal of Physics C: Solid State Physics* **5**, 807 (1972).
- [70] A. Legendijk, B. v. Tiggelen, and D. S. Wiersma, Fifty years of anderson localization, *Physics Today* **62**, 24 (2009).
- [71] J. Šuntajs, T. c. v. Prosen, and L. Vidmar, Localization challenges quantum chaos in the finite two-dimensional anderson model, *Phys. Rev. B* **107**, 064205 (2023).
- [72] D. Thouless, *Anderson localization in the seventies and beyond, 50 Years of Anderson Localization*, edited by E. Abrahams, 7–25 (WORLD SCIENTIFIC, 2010).
- [73] J. Šuntajs, T. c. v. Prosen, and L. Vidmar, Localization challenges quantum chaos in the finite two-dimensional anderson model, *Phys. Rev. B* **107**, 064205 (2023).
- [74] A. MacKinnon and B. Kramer, One-parameter scaling of localization length and conductance in disordered systems, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1546 (1981).
- [75] A. MacKinnon and B. Kramer, The scaling theory of electrons in disordered solids: Additional numerical results, *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter* **53**, 1 (1983).
- [76] E. N. Economou, C. M. Soukoulis, and A. D. Zdetsis, Localized states in disordered systems as bound states in potential wells, *Phys. Rev. B* **30**, 1686 (1984).
- [77] D. C. Licciardello and D. J. Thouless, Conductivity and mobility edges in disordered systems. ii. further calculations for the square and diamond lattices, *Journal of Physics C: Solid State Physics* **11**, 925 (1978).
- [78] N. Mott, M. Pepper, S. Pollitt, R. H. Wallis, and C. J. Adkins, The anderson transition, *Proc. Math. Phys. Eng. Sci.* **345**, 169 (1975).
- [79] N. F. Mott, Electrons in disordered structures, *Advances in Physics* **16**, 49 (1967).

- [80] N. F. Mott, Conduction in glasses containing transition metal ions, *Journal of Non-Crystalline Solids* **1**, 1 (1968).
- [81] K. Slevin and T. Ohtsuki, Critical exponent of the anderson transition using massively parallel supercomputing, *Journal of the Physical Society of Japan* **87**, 094703 (2018).
- [82] P. Prelovšek and J. Herbrych, Diffusion in the anderson model in higher dimensions, *Phys. Rev. B* **103**, L241107 (2021).
- [83] M. Cutler and N. F. Mott, Observation of anderson localization in an electron gas, *Phys. Rev.* **181**, 1336 (1969).
- [84] T. Ying, Y. Gu, X. Chen, X. Wang, S. Jin, L. Zhao, W. Zhang, and X. Chen, Anderson localization of electrons in single crystals: $\text{Li}_x\text{Fe}_7\text{Se}_8$, *Science Advances* **2**, e1501283 (2016).
- [85] A. Aspect and M. Inguscio, Anderson localization of ultracold atoms, *Physics Today* **62**, 30 (2009).
- [86] J. Billy, V. Josse, Z. Zuo, A. Bernard, B. Hambrecht, P. Lugan, D. Clément, L. Sanchez-Palencia, P. Bouyer, and A. Aspect, Direct observation of anderson localization of matter waves in a controlled disorder, *Nature* **453**, 891 (2008).
- [87] G. Roati, C. D'Errico, L. Fallani, M. Fattori, C. Fort, M. Zaccanti, G. Modugno, M. Modugno, and M. Inguscio, Anderson localization of a non-interacting bose–einstein condensate, *Nature* **453**, 895 (2008).
- [88] D. H. White, T. A. Haase, D. J. Brown, M. D. Hoogerland, M. S. Najafabadi, J. L. Helm, C. Gies, D. Schumayer, and D. A. W. Hutchinson, Observation of two-dimensional anderson localisation of ultracold atoms, *Nature Communications* **11**, 4942 (2020).
- [89] T. Schulte, S. Drenkelforth, J. Kruse, W. Ertmer, J. Arlt, K. Sacha, J. Zakrzewski, and M. Lewenstein, Routes towards anderson-like localization of bose-einstein condensates in disordered optical lattices, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 170411 (2005).
- [90] T. Schulte, S. Drenkelforth, J. Kruse, R. Tiemeyer, K. Sacha, J. Zakrzewski, M. Lewenstein, W. Ertmer, and J. J. Arlt, Analysis of localization phenomena in weakly interacting disordered lattice gases, *New Journal of Physics* **8**, 230 (2006).
- [91] R. Dalichaouch, J. P. Armstrong, S. Schultz, P. M. Platzman, and S. L. McCall, Microwave localization by two-dimensional random scattering, *Nature* **354**, 53 (1991).

- [92] D. S. Wiersma, P. Bartolini, A. Lagendijk, and R. Righini, Localization of light in a disordered medium, *Nature* **390**, 671 (1997).
- [93] T. Schwartz, G. Bartal, S. Fishman, and M. Segev, Transport and anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices, *Nature* **446**, 52 (2007).
- [94] Y. Lahini, A. Avidan, F. Pozzi, M. Sorel, R. Morandotti, D. N. Christodoulides, and Y. Silberberg, Anderson localization and nonlinearity in one-dimensional disordered photonic lattices, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 013906 (2008).
- [95] L. Fleishman and P. W. Anderson, Interactions and the Anderson transition, *Phys. Rev. B* **21**, 2366 (1980).
- [96] B. L. Altshuler, Y. Gefen, A. Kamenev, and L. S. Levitov, Quasiparticle lifetime in a finite system: A nonperturbative approach, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2803 (1997).
- [97] D. M. Basko, I. L. Aleiner, and B. L. Altshuler, 50on the problem of many-body localization, *Problems of Condensed Matter Physics: Quantum coherence phenomena in electron-hole and coupled matter-light systems* (Oxford University Press, 2007).
- [98] B. Altshuler and A. Aronov, Zero bias anomaly in tunnel resistance and electron-electron interaction, *Solid State Communications* **30**, 115 (1979).
- [99] T. Giamarchi and H. J. Schulz, Anderson localization and interactions in one-dimensional metals, *Phys. Rev. B* **37**, 325 (1988).
- [100] R. Abou-Chacra, D. J. Thouless, and P. W. Anderson, A selfconsistent theory of localization, *Journal of Physics C: Solid State Physics* **6**, 1734 (1973).
- [101] G. Parisi, S. Pascazio, F. Pietracaprina, V. Ros, and A. Scardicchio, Anderson transition on the bethe lattice: an approach with real energies, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **53**, 014003 (2019).
- [102] P. Jordan and E. Wigner, Über das paulische äquivalenzverbot, *Zeitschrift für Physik* **47**, 631 (1928).
- [103] M. Žnidarič, T. Prosen, and P. Prelovšek, Many-body localization in the Heisenberg XXZ magnet in a random field, *Phys. Rev. B* **77**, 064426 (2008).
- [104] A. Pal and D. A. Huse, Many-body localization phase transition, *Phys. Rev. B* **82**, 174411 (2010).
- [105] P. Sierant, M. Lewenstein, and J. Zakrzewski, Polynomially filtered exact diagonalization approach to many-body localization, *Phys. Rev. Lett.* **125**, 156601 (2020).

- [106] F. Pietracaprina, N. Macé, D. J. Luitz, and F. Alet, Shift-invert diagonalization of large many-body localizing spin chains, *SciPost Phys.* **5**, 045 (2018).
- [107] D. J. Luitz, N. Laflorencie, and F. Alet, Many-body localization edge in the random-field Heisenberg chain, *Phys. Rev. B* **91**, 081103 (2015).
- [108] P. Sierant, D. Delande, and J. Zakrzewski, Many-body localization due to random interactions, *Phys. Rev. A* **95**, 021601 (2017).
- [109] P. Sierant and J. Zakrzewski, Level statistics across the many-body localization transition, *Phys. Rev. B* **99**, 104205 (2019).
- [110] P. Sierant and J. Zakrzewski, Model of level statistics for disordered interacting quantum many-body systems, *Phys. Rev. B* **101**, 104201 (2020).
- [111] P. Prelovšek, M. Mierzejewski, J. Krsnik, and O. S. Barišić, Many-body localization as a percolation phenomenon, *Phys. Rev. B* **103**, 045139 (2021).
- [112] J. Bonča and M. Mierzejewski, Relaxation mechanisms in a disordered system with poisson-level statistics, *Phys. Rev. B* **105**, 155146 (2022).
- [113] P. Prelovšek, J. Herbrych, and M. Mierzejewski, Slow diffusion and thouless localization criterion in modulated spin chains, *Phys. Rev. B* **108**, 035106 (2023).
- [114] O. Giraud, N. Macé, E. Vernier, and F. Alet, Probing symmetries of quantum many-body systems through gap ratio statistics, *Phys. Rev. X* **12**, 011006 (2022).
- [115] J. Šuntajs, J. Bonča, T. Prosen, and L. Vidmar, Quantum chaos challenges many-body localization, *Phys. Rev. E* **102**, 062144 (2020).
- [116] M. Serbyn, Z. Papić, and D. A. Abanin, Local conservation laws and the structure of the many-body localized states, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 127201 (2013).
- [117] D. A. Huse, R. Nandkishore, and V. Oganesyan, Phenomenology of fully many-body-localized systems, *Phys. Rev. B* **90**, 174202 (2014).
- [118] V. Ros, M. Müller, and A. Scardicchio, Integrals of motion in the many-body localized phase, *Nucl. Phys. B* **891**, 420 (2015).
- [119] M. Mierzejewski, M. Kozarzewski, and P. Prelovšek, Counting local integrals of motion in disordered spinless-fermion and Hubbard chains, *Phys. Rev. B* **97**, 064204 (2018).
- [120] J. Z. Imbrie, Diagonalization and many-body localization for a disordered quantum spin chain, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 027201 (2016).

- [121] C. Monthus and T. Garel, Many-body localization transition in a lattice model of interacting fermions: Statistics of renormalized hoppings in configuration space, *Phys. Rev. B* **81**, 134202 (2010).
- [122] D. J. Luitz, N. Laflorencie, and F. Alet, Extended slow dynamical regime prefiguring the many-body localization transition, *Phys. Rev. B* **93**, 060201(R) (2016).
- [123] P. Prelovšek and J. Herbrych, Self-consistent approach to many-body localization and subdiffusion, *Phys. Rev. B* **96**, 035130 (2017).
- [124] K. Agarwal, S. Gopalakrishnan, M. Knap, M. Müller, and E. Demler, Anomalous diffusion and Griffiths effects near the many-body localization transition, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 160401 (2015).
- [125] S. Gopalakrishnan, K. Agarwal, E. A. Demler, D. A. Huse, and M. Knap, Griffiths effects and slow dynamics in nearly many-body localized systems, *Phys. Rev. B* **93**, 134206 (2016).
- [126] T. Chanda, P. Sierant, and J. Zakrzewski, Time dynamics with matrix product states: Many-body localization transition of large systems revisited, *Phys. Rev. B* **101**, 035148 (2020).
- [127] M. Hopjan and L. Vidmar, Scale-invariant survival probability at eigenstate transitions, *Phys. Rev. Lett.* **131**, 060404 (2023).
- [128] W. D. Roeck, L. Giacomin, F. Huveneers, and O. Prosnjak, Absence of normal heat conduction in strongly disordered interacting quantum chains, *arXiv:2408.04338* (2024).
- [129] J. H. Bardarson, F. Pollmann, and J. E. Moore, Unbounded growth of entanglement in models of many-body localization, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 017202 (2012).
- [130] J. A. Kjäll, J. H. Bardarson, and F. Pollmann, Many-body localization in a disordered quantum Ising chain, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 107204 (2014).
- [131] E. Baygan, S. P. Lim, and D. N. Sheng, Many-body localization and mobility edge in a disordered spin - 1/2 Heisenberg ladder, *Phys. Rev. B* **92**, 195153 (2015).
- [132] F. Pietracaprina, G. Parisi, A. Mariano, S. Pascazio, and A. Scardicchio, Entanglement critical length at the many-body localization transition, *J. Stat. Mech.* (2017), 113102 (2017).

- [133] B. Bauer and C. Nayak, Area laws in a many-body localized state and its implications for topological order, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* **2013**, P09005 (2013).
- [134] L. Vidmar and M. Rigol, Entanglement entropy of eigenstates of quantum chaotic hamiltonians, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 220603 (2017).
- [135] M. Kliczkowski, R. Świątek, L. Vidmar, and M. Rigol, Average entanglement entropy of midspectrum eigenstates of quantum-chaotic interacting hamiltonians, *Phys. Rev. E* **107**, 064119 (2023).
- [136] G. De Chiara, S. Montangero, P. Calabrese, and R. Fazio, Entanglement entropy dynamics of heisenberg chains, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* **2006**, P03001 (2006).
- [137] M. Serbyn, Z. Papić, and D. A. Abanin, Universal slow growth of entanglement in interacting strongly disordered systems, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 260601 (2013).
- [138] H. Kim and D. A. Huse, Ballistic spreading of entanglement in a diffusive nonintegrable system, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 127205 (2013).
- [139] G. H. Wannier, Dynamics of band electrons in electric and magnetic fields, *Rev. Mod. Phys.* **34**, 645 (1962).
- [140] P. Sala, T. Rakovszky, R. Verresen, M. Knap, and F. Pollmann, Ergodicity breaking arising from hilbert space fragmentation in dipole-conserving hamiltonians, *Phys. Rev. X* **10**, 011047 (2020).
- [141] R. Yao and J. Zakrzewski, Many-body localization of bosons in an optical lattice: Dynamics in disorder-free potentials, *Phys. Rev. B* **102**, 104203 (2020).
- [142] R. Yao, T. Chanda, and J. Zakrzewski, Nonergodic dynamics in disorder-free potentials, *Annals of Physics* **435**, 168540 (2021). Special Issue on Localisation 2020.
- [143] S. Nandy, J. Herbrych, Z. Lenarčič, A. Głódkowski, P. Prelovšek, and M. Mierzejewski, Emergent dipole moment conservation and subdiffusion in tilted chains, *Phys. Rev. B* **109**, 115120 (2024).
- [144] M. Schulz, C. A. Hooley, R. Moessner, and F. Pollmann, Stark many-body localization, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 040606 (2019).
- [145] S. R. Taylor, M. Schulz, F. Pollmann, and R. Moessner, Experimental probes of stark many-body localization, *Phys. Rev. B* **102**, 054206 (2020).

- [146] K. Xu, J.-J. Chen, Y. Zeng, Y.-R. Zhang, C. Song, W. Liu, Q. Guo, P. Zhang, D. Xu, H. Deng, K. Huang, H. Wang, X. Zhu, D. Zheng, and H. Fan, Emulating many-body localization with a superconducting quantum processor, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 050507 (2018).
- [147] A. Lukin, M. Rispoli, R. Schittko, M. E. Tai, A. M. Kaufman, S. Choi, V. Khemani, J. Léonard, and M. Greiner, Probing entanglement in a many-body-localized system, *Science* **364**, 256 (2019).
- [148] P. Roushan, C. Neill, J. Tangpanitanon, V. M. Bastidas, A. Megrant, R. Barends, Y. Chen, Z. Chen, B. Chiaro, A. Dunsworth, A. Fowler, B. Foxen, M. Giustina, E. Jeffrey, J. Kelly, E. Lucero, J. Mutus, M. Neeley, C. Quintana, D. Sank, A. Vainsencher, J. Wenner, T. White, H. Neven, D. G. Angelakis, and J. Martinis, Spectroscopic signatures of localization with interacting photons in superconducting qubits, *Science* **358**, 1175 (2017).
- [149] P. Bordia, H. Lüschen, S. Scherg, S. Gopalakrishnan, M. Knap, U. Schneider, and I. Bloch, Probing slow relaxation and many-body localization in two-dimensional quasiperiodic systems, *Phys. Rev. X* **7**, 041047 (2017).
- [150] T.-M. Li, Z.-H. Sun, Y.-H. Shi, Z.-T. Bao, Y.-Y. Wang, J.-C. Zhang, Y. Liu, C.-L. Deng, Y.-H. Yu, Z.-H. Liu, C.-T. Chen, L. Li, H. Li, H.-T. Liu, S.-Y. Zhou, Z.-Y. Peng, Y.-J. Liu, Z. Wang, Y.-S. Xu, K. Zhao, Y. He, D. Feng, J.-C. Song, C.-P. Fang, J. Deng, M. Xu, Y.-T. Chen, B. Zhou, G.-H. Liang, Z.-C. Xiang, G. Xue, D. Zheng, K. Huang, Z.-A. Wang, H. Yu, P. Sierant, K. Xu, and H. Fan, Many-body delocalization with a two-dimensional 70-qubit superconducting quantum simulator, [arXiv:2507.16882](https://arxiv.org/abs/2507.16882) (2025).
- [151] Pochodzenie indeksu 'M' jest nieznane. Wiadomo jedynie, że zostało zaproponowane przez promotora tej rozprawy Marcina Mierzejewskiego i zaakceptowane przez pozostałych współautorów.
- [152] M. Mierzejewski and L. Vidmar, Quantitative impact of integrals of motion on the eigenstate thermalization hypothesis, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 040603 (2020).
- [153] M. Serbyn, Z. Papić, and D. A. Abanin, Thouless energy and multifractality across the many-body localization transition, *Phys. Rev. B* **96**, 104201 (2017).
- [154] Y. Bar Lev, G. Cohen, and D. R. Reichman, Absence of diffusion in an interacting system of spinless fermions on a one-dimensional disordered lattice, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 100601 (2015).

-
- [155] A. Morningstar, L. Colmenarez, V. Khemani, D. J. Luitz, and D. A. Huse, Avalanches and many-body resonances in many-body localized systems, *Phys. Rev. B* **105**, 174205 (2022).
- [156] D. Sels, Bath-induced delocalization in interacting disordered spin chains, *Phys. Rev. B* **106**, L020202 (2022).