Łódź, 25 marca 2025 r.

Prof. dr hab. Marek Balcerzak
Instytut Matematyki Politechniki Łódzkiej

Recenzja w postępowaniu habilitacyjnym dr. Andrzeja Starosolskiego

1. Uwagi wstępne. Dr Andrzej Starosolski uzyskał magisterium z matematyki na Politechnice Śląskiej w 1998 r. zaś doktorat obronił w Uniwersytecie Burgundzkim w Dijon w 2003 r. Jego stopień doktora nauk matematycznych został nostryfikowany w 2004 r. w Uniwersytecie Śląskim. Od 1998 roku Habilitant jest zatrudniony na Politechnice Śląskiej, gdzie obecnie pracuje jako adiunkt na Wydziale Matematyki Stosowanej.

Według bazy Mathscinet dr Starosolski jest autorem lub współautorem 11 artykułów naukowych. Zgadza się to z informacją zamieszczoną w Autoreferacie, z której wynika, że wszystkich publikacji jest w rzeczywistości nieco więcej, gdyż baza Mathscinet nie zarejestrowała kilku spośród nich. W dalszym ciągu będę posługiwać się numeracją prac taką jak w Autoreferacie. Został tam wyróżniony cykl artykułów [H1]–[H5] stanowiący osiągnięcie habilitacyjne. Ponadto Habilitant w swoim wykazie umieścił inne prace [R1]–[R7] wydrukowane po doktoracie. Wśród nich są: esej popularyzatorski [R5] i podręcznik [R6] ze wstępu do matematyki przeznaczony dla studentów. Te prace wspólne z A. Samulewicz, nieuwzględnione w bazie Mathscinet, należy zaliczyć do publikacji dydaktycznych. Nowy artykuł [R7] zgłoszony do czasopisma Topology and Its Applications według mojej wiedzy nie ma jeszcze statusu przyjętego do druku. Żałuję, że nie został on umieszczony przez autora w formie preprintu w bazie arXiv, bo byłby wtedy łatwo dostępny. Do tego dorobku Habilitanta dochodzą jeszcze dwie prace [B1], [B2] opublikowane przed doktoratem. Sam doktorat został napisany, jak się można domyślać, w języku francuskim. Nie jest dla mnie jasne, czy został on, choćby we fragmentach opublikowany. Można snuć domysły, że w jego skład weszły wyniki artykułu [B2] oraz jakieś istotne wątki doktoratu mogły zostać wykorzystane później. Jednakże w Autoreferacie nie znalazłem odpowiednich informacji na ten temat. Można sądzić, że doktorat Habilitanta i pobyty na stażu w Dijon miały duży wpływ na jego dalszą aktywność badawczą w kręgu podobnych zagadnień.

Twórczość naukowa dr. Starosolskiego ulokowana jest tematycznie w aksjomatycznej teorii mnogości i kombinatoryce nieskończonej, zaś w tle znajduje się topologia teoriomnogościowa. Powtarzając sformułowanie pochodzące z Autoreferatu, należy uznać, że poligonem badawczym większości prac Habilitanta jest przestrzeń Čecha-Stone'a $\beta\omega$ złożona z ultrafiltrów na zbiorze liczb naturalnych, która ma fundamentalne znaczenie dla współczesnej topologii teoriomnogościowej. Jest ona źródłem opisu wielu zjawisk, które odnoszą się do specjalnych ultrafiltrów i ich własności, często posiłkujących się założeniami niesprzecznymi z aksjomatyką ZFC takimi, jak Hipoteza Continuum, Aksjomat Martina i jego warianty oraz odpowiednie równości między współczynnikami kardynalnymi.

2. Omówienie głównego osiągnięcia habilitacyjnego. Osiągnięcie habilitacyjne dr. Starosolskiego zatytułowane „Monotoniczne kontury ciągowe i ich zastosowania w badaniu ultrafiltrów na zbiorze liczb naturalnych" opiera się na wynikach pięciu prac naukowych opublikowanych w bardzo dobrych czasopismach z podstaw matematyki. W przypadku trzech artykułów w tym cyklu, Habilitant jest jedynym autorem, a w pozostałych pracach współautorami są Szymon Dolecki i Michał Machura. W załączonej dokumentacji przedstawili oni swój wkład we wspólne dzieło. Z tych oświadczeń wynika, że wkład Habilitanta był odpowiednio znaczący.

W artykule [H1] autor zaproponował naturalną P-hierarchię $\mathcal{P}_\alpha$, $\alpha < \omega_1$, ultrafiltrów w przestrzeni $\beta\omega$. Przynależność ultrafiltra u do klasy $\mathcal{P}_\alpha$ polega na tym, że u zawiera monotoniczną kaskadę ciągową każdego rzędu $\beta < \alpha$, ale nie zawiera takiej kaskady rzędu α. Klasa $\mathcal{P}_1$ składa się z ultrafiltrów głównych, zaś klasa $\mathcal{P}_2$ składa się z P-punktów. Uzyskano serię ważnych rezultatów na temat P-hierarchii, na przykład pewne własności klas $\mathcal{P}_\alpha$ dla liczb α następnikowych i granicznych. Pokazano niesprzeczność istnienia specjalnych ultrafiltrów w klasie $\mathcal{P}_3$ oraz bardzo ciekawy fakt: istnienie P-punktu jest równoważne z niepustością każdej klasy $\mathcal{P}_\alpha$, gdy liczba α jest następnikowa. Druga część pracy została poświęcona porównaniu P-hierarchii z hierarchią wprowadzoną przez Baumgartnera w 1995 roku. Pokazano, że obie hierarchie mają pewne analogiczne własności. Ponadto uzyskano wyniki porównujące odpowiednie klasy w obu hierarchiach przy założeniu specjalnych warunków teoriomnogościowych niesprzecznych z ZFC.

Habilitant nawiązał do hierarchii Baumgartnera także w innych publikacjach omawianego cyklu. Ciekawym i ważnym pomysłem Baumgartnera jest pojęcie $\mathcal{I}$-ultrafiltra, gdzie $\mathcal{I}$ jest ideałem zbiorów. Było ono później badane m.in. przez Błaszczyka, Brendlego, Flaškovą, Laflamme'a i Shelaha. Wśród $\mathcal{I}$-ultrafiltrów są tzw. ultrafiltry porządkowe $\mathcal{J}_\alpha$ dla $\alpha < \omega_1$. To właśnie one generują hierarchię Baumgartnera. Wiadomo, że istnienie P-punktów implikuje niepustość klasy (właściwych) $\mathcal{J}^*_{\omega^\alpha}$-ultrafiltrów dla każdej następnikowej liczby porządkowej $\alpha < \omega_1$. Pytanie o niepustość tej klasy, gdy liczba α jest graniczna, pozostało otwarte. Zasługą dr. Starosolskiego było pokazanie w artykule [H2], że dla $\alpha = \omega$ ta klasa jest pusta, co rozwiązuje problem Baumgartnera w szczególnym przypadku. Ponadto w pracy [H2] Habilitant rozstrzygnął dwa problemy Laflamme'a dotyczące łańcuchów względem porządku $<^\infty$ między ultrafiltrami na ω. Zastosował tam z powodzeniem monotoniczne kaskady jako narzędzie w dowodach otrzymanych twierdzeń.

Kolejna publikacja [H3] wspólna z Machurą stanowi kontynuację badań w zakresie $\mathcal{I}$-ultrafiltrów i P-hierarchii. Wykazano, że przy założeniu Hipotezy Continuum dla każdego gęstego P-ideału $\mathcal{I}$ na ω zawierającego Fin i dowolnej liczby porządkowej $\gamma \leqslant \omega_1$ istnieje $\mathcal{I}$-ultrafiltr w klasie P_γ. Ten rezultat był motywowany pomysłami Flaškovej, która rozwinęła teorię $\mathcal{I}$-ultrafiltrów. Z opisanego wyżej twierdzenia Machury i Starosolskiego wynika jedno z twierdzeń Flaškovej. Według oświadczenia Machury trzon kombinatoryczny dowodu głównego twierdzenia pracy [F3] zapisany w języku kaskad i konturów należy do Habilitanta. Praca [P3] zawiera ponadto wzmocnienie głównego wyniku pokazujące, że przy założeniu CH, do każdej klasy P_γ należą odpowiednie dwa $\mathcal{I}$-ultrafiltry nieporównywalne w porządku RK (Rudin-Kieslera).

Artykuł [P4] wspólny z Doleckim ma szczególne znaczenie, bo Habilitant omówił w Autoreferacie jego zawartość w pierwszej kolejności. Jest on poświęcony ciągłym rozszerzonym odwzorowań między kaskadami ciągowymi. Wcześniejszy rezultat na ten temat pochodzący z pracy Doleckiego, Starosolskiego i Watsona z 2003 r. jeszcze sprzed doktoratu Habilitanta zawierał w dowodzie lukę, która została w [P4] naprawiona, a odpowiednie twierdzenie zostało zaprezentowane w pełnej ogólności. Publikacja [P4] w precyzyjny sposób opisuje całą maszynerię wokół operacji konturu. Anuluje ona wątpliwości związane ze wspomnianą luką.

Mam duże uznanie dla pracy [H5], w której dr Starosolski przyczynił się do znacznego postępu w badaniu P-punktów i ich własności względem porządku RK. Przy założeniu teoriomnogościowym $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, słabszym niż $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ we wcześniejszym wyniku Blassa, Habilitant wykazał, że dla danego P-punktu p istnieje RK-większy od niego P-punkt q. Zaproponował nową metodę dowodu opartą na konturach i quasi-podbazach dla filtrów.

Wspomniane twierdzenie Starosolskiego w dalszym ciągu artykułu H5] uzyskało kolejne silniejsze warianty. Przy założeniu $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ pokazano zanurzenie porządkowe prostej i długiej prostej w zbiór P-punktów z porządkiem RK. W dalszych uogólnieniach zaproponowano liczbę kardynalną $\mathfrak{q} \geqslant \mathfrak{b}$, której użycie wystarczy do zachowania prawdziwości uzyskanych twierdzeń.

Osiągnięcie habilitacyjne dr. Starosolskiego oceniam wysoko. Wszystkie prace omawianego cyklu zawierają mocne rezultaty poparte pomysłowymi technicznymi dowodami. Zostały tu pokazane nietrywialne rozwiązania trudnych problemów postawionych przez znanych matematyków. Monotoniczne kaskady ciągowe i ich kontury bardzo dobrze sprawdziły się jako skuteczne metody dowodowe. Habilitant wprowadził nową P-hierarchię ultrafiltrów na ω i zaprezentował jej ciekawe własności. Twórczo rozszerzył wiedzę na temat P-punktów i porządku RK. Widać, że Habilitant ma świetną wyobraźnię, dzięki czemu swobodnie operuje w świecie abstrakcyjnych obiektów matematyki. Moim zdaniem jego osiągnięcie wnosi znaczący wkład w rozwój wybranych działów teorii mnogości i topologii.

3. Omówienie pozostałych osiągnięć Habilitanta. Pozostały dorobek publikacyjny Habilitanta wygląda ilościowo dość skromnie. Można wyróżnić tu cztery publikacje [R1]–[R4]. Artykuły [R2] i [R4] stanowią kontynuację badań cyklu habilitacyjnego na temat P-hierarchii. W pracy [R2] pokazano m.in. niepustość wszystkich klas P_α przy założeniu CH oraz uogólniono elegancki wynik Ketonena. W artykule [R4] wspólnym z Machurą pokazano, że przy założeniu Aksjomatu Martina (MA) dla każdego $\gamma < \omega_1$ w klasie P_γ istnieje $\mathcal{T}$-ultrafiltr, a przy założeniu CH w klasie P_{ω_1} istnieje $\mathcal{T}$-ultrafiltr, gdzie $\mathcal{T}$ oznacza cienki (thin) ideał na ω. W pracy [R3] (będącej częścią monografii wydanej w Gliwicach i poświęconej 100-leciu urodzin prof. Zahorskiego) znajdują się wyniki dotyczące filtrów podciągowych, a wśród nich odpowiedź na pytanie Garcii-Ferreiry i Uzcáteui'ego z 2009 roku. Natomiast publikacja [R1], do której nie dotarłem, przedstawia nowe twierdzenia na temat superkonturów. W najnowszej pracy [R7] wysłanej do Topology Appl. autor włączył do swoich badań inną hierarchię ultrafiltrów na ω pochodzącą od Baumgartnera i pokazał wspólne cechy wszystkich trzech hierarchii.

Moim zdaniem omówione powyżej artykuły spoza głównego cyklu habilitacyjnego zawierają wartościowe wyniki, ciekawą metodologię i perspektywę dalszych podobnych rozważań. Słabszym punktem aktywności naukowej dr. Starosolskiego jest niezbyt częste uczestnictwo w konferencjach międzynarodowych (ostatnio wygłosił referat na konferencji w Wiedniu w 2019 roku) oraz brak współpracy z naukowcami młodszego pokolenia. Z uwagi na dość wąską elitarną tematykę, która jednakże jest ważna i ceniona na świecie, jego indeks cytowań jest niski. Domyślam się, że Habilitant nie uczestniczył w grantach ani nie prezentował swoich wyników na seminariach z teorii mnogości w Warszawie, Wrocławiu lub Katowicach, a jeśli się mylę, to nie napisał o tym w Autoreferacie. Nie znalazłem też wzmianki o nagrodach uczelnianych lub innych.

Uzyskanie patentu jest istotnym osiągnięciem pozazawodowym Habilitanta. Przynajmniej dobrze należy ocenić jego działalność dydaktyczną, popularyzatorską i organizacyjną na polu matematyki. Ponadto spełniony jest wymóg ustawowy istotnej aktywności naukowej w przynajmniej dwóch ośrodkach – w tym przypadku są to Gliwice i Dijon.

4. Konkluzja. Pomimo kilku uwag krytycznych wniosek habilitacyjny dr. Starosolskiego oceniam pozytywnie. Uważam, że spełnia on wymagania formalne, a także zwyczajowe. Wnoszę o dopuszczenie Habilitanta do dalszych etapów postępowania.

M. Balcerak