Łódź, 4 września 2025 r.

Prof. dr hab. Marek Balcerzak
Instytut Matematyki
Politechniki Łódzkiej

Recenzja pracy doktorskiej Pana mgr. Aleksandra Cieślaka pt. „On trees, ideals and cardinal invariants of the reals"

Recenzowana rozprawa doktorska liczy 104 strony i składa się z czterech rozdziałów oraz bibliografii. Pierwsze dwa rozdziały mają charakter wprowadzający w temat pracy. Rozdział 1 zawiera streszczenie oraz preliminaria dotyczące drzew, forsingu, klasycznych współczynników kardynalnych, współczynników kardynalnych dotyczących ideałów na zbiorach przeliczalnych oraz pojęć związanych z systemami relacyjnymi.

Rozdział 2 opisuje różne typy drzew rozgałęzionych, które są przedmiotem badań autora. Rozważane są pewne regularne rodzaje tych drzew związane z forsingiem: drzewa kombinatoryczne, posiadające ciągłe czytanie nazw, spełniające aksjomat A oraz te drzewa $\mathbb{T}$, dla których ideał $\mathbb{T}$-nwd jest σ-addytywny. Występują tu dwa uogólnienia drzew Sacksa $\mathbb{S}_F$ oraz $\mathbb{IE}_F$ generowane przez ciąg niemalejący $F \in \omega^\omega$. Inne obiekty to drzewa rozdzielające $\mathbb{SP}$ na 2^ω, drzewa F-ograniczone ewentualnie różne $\mathbb{ED}_F$ oraz modyfikacje drzew Millera $\mathbb{FM}$ i $\mathbb{IE}$. Omawiane są jeszcze inne modyfikacje drzew Millera $\mathbb{M}_\mathcal{J}$ oraz podobne modyfikacje drzew Lavera $\mathbb{L}_\mathcal{J}$, gdzie $\mathcal{J}$ jest ideałem na ω, który zastępuje ideał $\mathcal{F}in$ pełniący analogiczną rolę w klasycznych przypadkach. Uzyskano cenne oszacowania lub wartości dokładne klasycznych współczynników kardynalnych dla odpowiednich ideałów $\mathbb{T}$-nwd (twierdzenia 2.2.33, 2.2.42 oraz wnioski 2.2.34, 2.2.43 i 2.2.44). Autor rozprawy odnotował ciekawe twierdzenie Soleckiego z 1994 roku o dychotomii dla σ-ideału generowanego przez zbiory domknięte w przestrzeni polskiej. Zauważył, że schemat Hurewicza zastosowany w dowodzie tego twierdzenia ma istotne konsekwencje, gdyż dany σ-ideał może być traktowany jako ideał zbiorów nigdzie gęstych względem pewnego drzewa.

Główne wyniki pracy zostały zaprezentowane w rozdziałach 3 i 4. W rozdziale 3 autor przedstawił serię nowych twierdzeń dotyczących współczynników kardynalnych wybranych ideałów drzewowych oraz abstrakcyjnych własności związanych z pojęciami forsingowymi. Ten materiał badawczy powstał w oparciu o wnikliwą analizę pomysłów i osiągnięć znanych specjalistów w tej tematyce (Brendle, Khomskii, Sabok,

Shelah, Spinas, Rosłanowski, Wohefsky, Zapletal). W podrozdziale 3.1 uzyskano oszacowania niezmiennika covering dla ideałów drzewowych (twierdzenia 3.1.1, 3.1.14, wniosek 3.1.13). Zbadano też własności forsingów generowanych przez wyróżnione typy drzew. W podrozdziale 3.2 pokazano serię nowych oszacowań współczynnika is($\mathbb{T}$) dla wybranych drzew. Jako szczególnie wartościowe trzeba uznać twierdzenia 3.2.9 i 3.2.11 oraz wniosek 3.2.13. W podrozdziale 3.3 badany jest współczynnik kardynalny $\mathfrak{a}(\mathbb{T})$, który wyznacza minimum mocy maksymalnych antyłańcuchów w danym drzewie. Otrzymano nowe oszacowania z dołu w twierdzeniach 3.3.5, 3.3.6, 2.3.7, 3.3.9. W dowodzie ostatniego z nich zastosowano schemat Hurewicza z twierdzenia Soleckiego o dualności. W podrozdziale 3.4 zbadano istnienie $\mathfrak{R}$-projekcji drzew na odpowiednie systemy relacyjne $\mathfrak{R}$, co pozwoliło na oszacowanie z góry addytywności ideału drzewowego $\mathcal{I}(\mathbb{T})$. Mówi o tym główny rezultat — twierdzenie 3.4.4. Inne oszacowania współczynnika add($\mathcal{I}(\mathbb{T})$) w szczególnych przypadkach otrzymano w podrozdziale 3.5. Jako narzędzie posłużyły: współczynnik $\mathfrak{t}(\mathcal{J})$ oraz nigdzie dystrybutywność wybranych drzew dla odpowiednich liczb kardynalnych.

Rozdział 4 dotyczy ideałów na zbiorach przeliczalnych. W tej tematyce uzyskano nowe rezultaty o współczynnikach kardynalnych i porządku Katětova. Wiemy, że klasyczne współczynniki kardynalne add, cov, non, cof dla ideałów miary i kategorii przyczyniły się do powstania diagramu Cichonia. Potem badano je dla innych ideałów, a także powiązano z innymi małymi nieprzeliczalnymi liczbami kardynalnymi zestawionymi w tzw. diagramie van Douwena. Następnie łączono ze sobą te dwa diagramy i badano, w jakich modelach ZFC zachodzą równości lub ostre nierówności. Nieco później dla ideałów na ω utworzono analogiczną do klasycznej czwórkę współczynników add*, cov*, non*, cof*, a następnie ich ω-odpowiedniki. Intensywne badania zmierzające do oszacowania lub wyznaczenia wartości tych współczynników dla konkretnych ideałów zapoczątkowali Hrušák, Meza-Alcántara, Hernández-Hernández w pierwszej dekadzie naszego wieku. Osiągnięcia autora rozprawy w rozdziale 4 znacznie poszerzają zakres wyników w tej tematyce. W podrozdziale 4.1 doktorant oszacował z góry i z dołu współczynniki add^*_ω i non^*_ω dla ideału nwd i wyznaczył wartości tych współczynników oraz cof^*_ω dla ideału $\mathcal{F}in \times \mathcal{F}in$. W podrozdziałach 4.2 oraz 4.3 badane są odpowiednie współczynniki dla ideałów Spl oraz $\mathcal{IE}$, $\mathcal{IE}_F$. W podrozdziale 4.4 pojawiają się nowe niezmienniki kardynalne $\mathrm{cov}^*_+(\mathcal{J})$ i $\mathrm{non}^*_+(\mathcal{J})$ badane ostatnio przez Farkasa i Zdomskyy'ego oraz Brendlego i Flaškovą. Oryginalnymi wynikami są m.in. wartości dokładne lub oszacowania uzyskane w twierdzeniach 4.4.2, 4.4.3 i 4.4.8 oraz pokazanie niesprzeczności z ZFC zajścia pewnych nierówności ostrych (twierdzenia 4.4.13, 4.4.14, 4.4.17). Wreszcie w podrozdziale 4.5 ba-

dany jest współczynnik $\mathfrak{a}(\mathcal{J})$ definiujący minimalną moc maksymalnej nieprzeliczalnej rodziny $\mathcal{J}$-prawie rozłącznej. Twierdzenie 4.5.5 pokazuje oszacowanie z dołu dla $\mathfrak{a}(\mathcal{J})$, gdy $\mathcal{J}$ jest dobrym ideałem. Pojęcie dobrego ideału na ω pochodzi od autora rozprawy, który wykazał, że rodzina dobrych ideałów zawiera pewne znane podklasy.

Problematyka rozprawy obejmuje ważny wycinek współczesnej teorii mnogości. Dodatkowo w ramach tego wycinka zakres badań jest ciekawy i obszerny. Imponuje mi bogactwo rozpatrywanych zagadnień oraz opanowanie przez autora aktualnej wiedzy i metodologii w temacie niezmienników kardynalnych dla ideałów i stowarzyszonych z nimi struktur (drzew, systemów relacyjnych, porządków i preporządków), a także metod i pojęć forsingowych. Autor wykazał się dużą inwencją twórczą. W licznych przypadkach zauważył, że daną metodę można uogólnić lub zastosować w nowej sytuacji. Wychwycił wiele analogii we wcześniejszych wynikach i zręcznie je wykorzystał, ale wykreował też nowe pojęcia i udowodnił ich własności.

Omawiana rozprawa ma charakter monograficzny. Zebrano w niej najnowsze fakty z rozważanej problematyki, znane w literaturze i uzyskane w ostatnich latach. W pracy znajdują się liczne odsyłacze do książek i artykułów naukowych, ale także do preprintów, prac doktorskich i komunikatów. Pozycje w bibliografii, z zasady uporządkowane alfabetycznie według nazwisk autorów, w kilku przypadkach naruszają tę zasadę – zapewne zostały później dopisane bez należytej kontroli. W przypadku artykułu [Pet93] autor pomylił chyba imię z nazwiskiem Petra Simona (z uwagi na młody wiek nie mógł spotkać tego czeskiego matematyka osobiście). W pozycjach [Sch22] i [Sol94] zabrakło nazwy czasopisma.

Koncepcja rozprawy jest dobrze przemyślana, a definicje i dowody są kompletne i precyzyjnie sformułowane. Dokładne sprawdzenie szczegółów dowodowych wymagałoby dłuższego czasu i pełnej koncentracji. Starając się uchwycić główne idee rozumowania, nie znalazłem luk ani usterek rzeczowych w dowodach twierdzeń. Podobają mi się pomysłowe konstrukcje kombinatoryczne. Nie będąc znawcą forsingu, nie czuję się w pełni kompetentny w ocenie tych fragmentów pracy, gdzie autor posługuje się pojęciami forsingowymi.

Odnotowałem w pracy drobne usterki typograficzne i językowe, ale nie są one częste jak na tak obszerną rozprawę (czasem brakuje pojedynczych liter w wyrazie), np. $17_1, 18^2, 31_{10}, 39^2, 39^{11}, 41_5, 41_{11}, 41_{18}, 78_3, 80_{15}$. Autor zastosował urozmaicone oznaczenia, które są konsekwentnie kontynuowane. W rzadkich przypadkach symbole $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ mogą oznaczać różne obiekty, ale po namyśle czytelnik powinien się w tym zorientować. Symbol $\mathbb{B}$ na str. 38 nie został wcześniej objaśniony, lecz odpowiedni komentarz można

znaleźć na dole str. 45. Gwiazdka we współczynnikach is* we wniosku 3.2.13 na str. 48 oraz wcześniej w podrozdziale 3.2 jest prawdopodobnie zbędna. Autor dość konsekwentnie nie stosuje apostrofu przy niektórych nazwiskach, zapisując je w formie Martins, Hechlers, Konigs, Mazurs, Lavers.

Powyższe uwagi krytyczne o pracy nie umniejszają mojej oceny merytorycznej, która jest jednoznacznie pozytywna. W rozprawie nie znalazłem żadnej wzmianki o tym, czy jej rezultaty zostały opublikowane lub wysłane do publikacji. Jednakże z dodatkowych oświadczeń wynika, że część wyników weszła w skład artykułu, którego współautorem jest A. Martinez-Celis, przyjętego do druku w Journal of Symbolic Logic. Wkład doktoranta w tę pracę jest bez wątpienia znaczący.

Konkluzja. Uważam, że przedstawiona rozprawa doktorska spełnia wymagania ustawowe i zwyczajowe. Jej autor rozwiązał samodzielnie cały zestaw problemów naukowych w tematyce drzew, ideałów i współczynników kardynalnych. Na tej podstawie wnoszę o dopuszczenie pana mgr. Cieślaka do dalszych etapów postępowania o nadanie stopnia doktora. Ze względu na ilość i jakość uzyskanych twierdzeń oraz bardzo dobrą orientację autora w tematyce uważam, że rozprawa zasługuje na wyróżnienie.

Conclusion. I believe that the presented dissertation meets all statutory and customary requirements. The author has independently solved a series of scientific problems concerning trees, ideals, and cardinal invariants. Based on these achievements, I recommend that Mr. Cieślak be allowed to proceed to the next stages of the PhD procedure. Due to both the quantity and quality of his theorems, as well as his excellent knowledge of the subject, I believe that the dissertation deserves distinction.

[redacted]

Politechnika Łódzka
Instytut Matematyki

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA
Kod jednostki do której przekazano pismo WM3N RDNJ09
Wpłynęło 08 -09- 2025
Zarejestr. pod nr PWr RPW/2904/25
Referent
Podpis osoby rejestr. .....
Renata Namyślik

RPW/2904/2025 N
Data:2025-09-08

Prof. dr hab. Marek Balcerzak

Łódź, 4.09.2025

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA
WYDZIAŁ MATEMATYKI
08 -09- 2025
DATA WPŁYWU

Przesyłam moją recenzję rozprawy doktorskiej pana mgr Aleksandra Cieślaka.

Z poważaniem.

[redacted]

Marek Balcerzak

Instytut Matematyki
90-924 Łódź, ul. Wólczańska 215
tel. 42 631 36 17, tel. / fax 42 631 38 65, e-mail: biuro_im@info.p.lodz.pl

HR EXCELLENCE IN RESEARCH

Instytut Matematyki
90-924 Łódź, ul. Wólczańska 215
tel. 42 631 36 17, tel. / fax 42 631 38 65, e-mail: biuro_im@info.p.lodz.pl

HR EXCELLENCE IN RESEARCH