Prof. dr hab. Taras Banakh
Katedra Matematyki
Uniwersytet Jana Kochanowskiego
ul. Uniwersytecka 15, Kielce

Lviv, 9 czerwca 2025 r.

Recenzja w postępowaniu habilitacyjnym
dr. Andrzeja Starosolskiego
"**Monotoniczne kontury ciągowe i ich zastosowania w badaniu ultrafiltów na zbiorze liczb naturalnych**"

Dr Andrzej Starosolski ukończył studia w 1998 roku na Uniwersytecie Śląskim, a stopień doktora uzyskał w 2003 roku na Uniwersytecie Burgundii we Francji pod kierunkiem znanego francuskiego matematyka polskiego pochodzenia, prof. Szymona Doleckiego. Od 1998 roku dr Starosolski pracuje na Politechnice Śląskiej w Gliwicach. Jest aktywny także w popularyzacji matematyki, regularnie uczestniczy w konferencjach naukowych. Miałem okazję poznać dr. Starosolskiego osobiście na jednej z konferencji, gdzie dowiedziałem się o jego pasji do alpinizmu lodowego – zainteresowaniu podobnym do tego, które miał śp. profesor Vietoris, który zafascynowany lodowcami przeżył ponad 106 lat, czego również życzę dr. Starosolskiemu.

Przechodząc do oceny rozprawy habilitacyjnej, chciałbym zaznaczyć, że składa się ona z cyklu pięciu powiązanych ze sobą prac [H1]–[H5], opublikowanych w renomowanych czasopismach matematycznych, takich jak *Journal of Symbolic Logic*, *Annals of Pure and Applied Logic* oraz *Archive for Mathematical Logic*. Niestety, jeśli chodzi o cytowania i h-index, sytuacja jest nieco skromniejsza: według bazy Scopus dr Starosolski ma 8 prac, które zostały zacytowane 29 razy w 11 artykułach, co daje mu h-indeks równy 3. Możliwą przyczyną takiego stanu rzeczy jest dość hermetyczna terminologia kaskad i konturów stosowana przez dr. Starosolskiego, która nie jest szerzej znana poza jego publikacjami.

Z mojego doświadczenia w czytaniu artykułów dr. Starosolskiego (co nie jest łatwe) wynika, że tą specyficzną terminologię należy najpierw przetłumaczyć na bardziej standardowy język matematyczny: kaskady to dokładnie dobrze założone drzewa (well-founded trees), a kontury to rekurencyjnie zdefiniowane filtry, które nie są egzotyką i naturalnie pojawiają się w badaniach przestrzeni ciągowych lub rozproszonych w topologii ogólnej. Przetłumaczywszy więc kaskady i kontury na bardziej zrozumiały dla mnie język, doszedłem do wniosku, że dr Starosolski uzyskał bardzo wartościowe wyniki dotyczące klasyfikacji ultrafiltów na zbiorze liczb naturalnych.

Istotnym konceptualnym odkryciem autora jest wprowadzenie porządkowej klasyfikacji ultrafiltów, w ramach której dobrze znane P-punkty zajmują drugie piętro tej klasyfikacji. Co więcej, przy założeniu istnienia P-punktów dr Starosolski skonstruował ultrafiltry o dowolnej zadanej z góry złożoności następnikowej (według swojej klasyfikacji). Ta klasyfikacja ultrafiltrów stanowi sedno pracy [H1], opublikowanej w *Journal of Symbolic Logic* w 2008 roku. W tym artykule dr Starosolski bada relacje swojej klasyfikacji z klasyfikacją Baumgartnera. Przypomnę, że klasyfikacja Baumgartnera opiera się na badaniu porządkowych własności obrazów ultrafiltów przy odwzorowaniach w pierwszy nieprzeliczalny ordynał ω_1. Przy założeniu istnienia P-punktów dr Starosolski wykazał, że jego hierarchia różni się od hierarchii Baumgartnera. Artykuł [H1] jest uzupełniony pracą [H4], napisanej wspólnie z prof. Doleckim, która zawiera poprawny dowód twierdzenia o przedłużaniu odwzorowań z maksymalnych elementów kaskad na całe kaskady, stosowanego w pracy [H1]. A propos, wydaje mi się, że Twierdzenie 3.1 (Alternatywa) można alternatywnie udowodnić za pomocą słynnego twierdzenia Ramseya.

Do hierarchii Baumgartnera dr Starosolski wraca w pracy [H2], gdzie za pomocą tych samych konturów udowadnia, że ultrafiltrow ścislej porządkowej klasy Baumgartnera ω^ω nie istnieje. Rozwiązuje tym samym jeden z otwartych problemów Baumgartnera, co należy uznać za bardzo ważne osiągnięcie autora.

Kolejne związki hierarchii Starosolskiego z klasami ultrafiltrow Baumgartnera, a konkretnie z tzw. I-ultrafiltrami (gdzie I jest gęstym P-ideałem), badane są w pracy [H3], napisanej wspólnie z Michałem Machurą. W tej pracy, przy założeniu Hipotezy Continuum, autorzy konstruują na każdym piętrze hierarchii Starosolskiego sporo ultrafiltrów (nawet nieporównalnych względem relacji Rudin-Keisler), które są I-ultrafiltrami Baumgartnera.

Ostatnia praca z cyklu habilitacyjnego, [H5], nie dotyczy już bezpośrednio hierarchii Starosolskiego, lecz bada porządek Rudin-Keislera na P-punktach. Przy założeniu, $\mathbf{b} = \mathbf{c}$, dr Starosolski dowodzi, że porządek ten jest bardzo bogaty i zawiera kopie długiej prostej (a jako wniosek – prostej rzeczywistej), co wiecej, nad każdym P-punktem istnieje continuum RK-nieporównalnych ultrafiltrów. Są to interesujące i znaczące wyniki rozszerzające wcześniejsze osiągnięcia takich wybitnych matematyków jak Mary Ellen Rudin, Adrian Mathias, Andreas Blass, Dilip Raghavan.

Analizując pozostały dorobek [R1] – [R7] dra Andrzeja Starosolskiego, powstały po doktoracie, lecz niewłączony do cyklu habilitacyjnego, mam przyjemność stwierdzić, że zawiera on bardzo interesujące publikacje. W szczególności warto wyróżnić pracę [R1] dotyczącą filtrów fraktalnych (pojęcia naturalnego i niezwykle ciekawego) oraz superkonturów (czyli filtrów granicznych rzędu ω_1). W artykule [R1], przy różnych założeniach teoriomnogościowych (głównie Hipoteza Continuum lub przeciwnie – silne jej zaprzeczenie $2^\omega < 2^{\omega_1}$, co w znanym sensie można uważać za „aksjomat Katowicki”), skonstruowano przykłady filtrów i ultrafiltrów rozróżniających filtry fraktalne i superkontury. Równie ważna i interesująca jest praca [R2], w której prowadzone są dalsze badania hierarchii Starosolskiego. Udowodniono w niej w szczególności, że wszystkie poziomy tej hierarchii (łącznie z granicznymi) są niepuste. Wprowadzono tam także pojęcie filtra

RK-minimalnego i uzyskano ciekawe rezultaty dotyczące istnienia (lub nieistnienia) takich filtrów na różnych piętrach omawianej hierarchii. Ze względu na swoją tematykę i podejście badawcze, praca [R2] jest bardzo bliska cyklowi habilitacyjnemu [H1]–[H5] i bez wahania mogłaby zostać do niego włączona. Z kolei artykuł [R3] bada naturalne związki między konturami a filtrami w przestrzeniach ciągowych i odpowiada na szereg pytań postawionych wcześniej przez znanych matematyków – Garcíę-Ferreirę i Uzcáteguiego. Bardzo ciekawą kontynuacją wspólnej z M. Machurą pracy [H3] jest również publikacja [R4], dotycząca relacji filtrów w hierarchii Starosolskiego do tzw. cienkich ultrafiltrów Baumgartnera. W pracy tej wykazano, że przy założeniu Hipotezy Martina, na każdym piętrze przeliczalnej wysokości w hierarchii Starosolskiego istnieje cienki ultrafiltr, a przy założeniu hipotezy continuum – istnieje cienki ultrafiltr również na piętrze wysokości ω_1. Praca [R7] prezentuje ogólny pogląd na różne klasyfikacje ultrafiltrów, wyrażając je w języku tzw. level ultrafiltrow. Ta publikacja świadczy także o dojrzałości jej autora, który – by użyć słów Stefana Banacha – osiągnął poziom matematyka „dopatrującego się analogii między analogiami".

Na uwagę zasługują również dwie pozycje popularyzatorskie, istotne z punktu widzenia nauczania matematyki, a w szczególności teorii mnogości: skrypty [R5] „Dwa spojrzenia na nieskończoność" oraz [R6] „Podstawy matematyki i jak to się je", napisane wspólnie z dr Alicją Samuliewicz. Uważam, że jest to bardzo ważny i często niedoceniany aspekt działalności matematyka.

Na koniec muszę przyznać, że całkowicie mnie zaskoczył i zafascynował patent 214597: „Pętla typu daisy chain" – w moim odczuciu genialny (choć zarazem prosty, wręcz „oczywisty") wynalazek pozwalający na absorbowanie energii kinetycznej, który może uratować (a być może już uratował) życie niejednemu alpiniście-wspinaczowi.

Podsumowując: *Uważam, że zarówno rozprawa habilitacyjna, jak i cały dorobek dra Andrzeja Starosolskiego spełniają wszystkie ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane w postępowaniach habilitacyjnych. Zarówno prace habilitacyjne* [H1] – [H5], *jak i dorobek powstały po doktoracie* [R1] – [R7] *stanowią znaczący wkład w rozwój teorii ultrafiltrów oraz ich zastosowań w teorii mnogości i topologii teoriomnogościowej. Dlatego z pełnym przekonaniem rekomenduję nadanie doktorowi Andrzejowi Starosolskiemu całkiem zasłużonego stopnia doktora habilitowanego.*