

prof. dr hab. Jacek Jakubowski
profesor zwyczajny UW
Wydział Matematyki,
Informatyki i Mechaniki
Uniwersytetu Warszawskiego

Warszawa, 20.03.2026

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Pawła Stępniaaka
p.t. „Pricing time-capped
American options”

Mgr Paweł Stępniaak w rozprawie doktorskiej zajął się badaniem problemu wyceny opcji amerykańskich z końcowym terminem wykonania będącym czasem losowym na rynku na którym cena S aktywów bazowych jest modelowana za pomocą spektralnie ujemnego geometrycznego procesu Léwiego. Motywacją do napisania pracy było zbadanie tej nowej, szerokiej klasy instrumentów finansowych o dobrych własnościach, które potencjalnie mogłyby zostać wprowadzone na rynek.

W rozprawie rozpatrywany jest problem znalezienia ceny takiej opcji, a więc problem znalezienia funkcji wartości postaci

$$V(s) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}, \tau \leq T} E\left(e^{-r\tau \wedge \theta} G(S_{\tau \wedge \theta})\right), \quad (1)$$

gdzie wartość oczekiwana jest liczona przy mierze martyngałowej, r jest stałą stopą procentową, $S_0 = s$, \mathcal{T} jest zbiorem momentów stopu, T jest horyzontem rynku (dopuszczony jest przypadek, że horyzont jest nieskończony), G jest funkcją wypłaty, a θ jest losowym czasem, w którym umowa zostaje wykonana, jeśli nie zrobiono tego wcześniej. Jest to limit czasowy, który nie musi być powiązany z wynikami instrumentu bazowego. Drugim rozpatrywanym problemem jest znalezienie optymalnego momentu stopu τ^* realizującego wypłatę daną wzorem (1).

Proces cen S jest postaci $S_t = e^{X_t}$, $t \geq 0$, gdzie X jest spektralnie ujem-

nym procesem Léwiego specjalnej postaci:

$$X_t = x + \mu t + \sigma B_t - \sum_{k=1}^{N_t} U_k, \quad (2)$$

gdzie $X_0 = x = \ln s$, $\sigma \geq 0$, B jest ruchem Browna, N jednorodnym procesem Poissona z intensywnością $\lambda \geq 0$, U_k są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie, wykładniczym z parametrem ρ . Wszystkie procesy występujące we wzorze (2) są niezależne. Taki wybór odzwierciedla własności empiryczne zachowania się cen i jednocześnie jest na tyle prosty, że Autorowi udało się znaleźć analityczne wzory na funkcję wartości postaci (1) w jawnej postaci.

Praca składa się z pięciu rozdziałów. W czterech pierwszych stosując tę samą idee rozwiązano postawiony problem dla różnych postaci momentu losowego θ przy zastosowaniu różnych wariantów używanych technik. W rozdziale piątym Autor przedstawił metodę numerycznej wyceny opcji amerykańskich z limitem czasowym.

Rozdział 1 jest wstępem zawierającym podstawowe informacje o rynkach finansowych, o wycenie opcji amerykańskich, przedstawia sens opcji z limitem (capped option), podaje informacje o spektralnie ujemnych procesach Lévy'ego i pierwszej $W^{(r)}$ oraz drugiej $Z^{(r)}$ funkcji skalującej związanej z nimi. Funkcje skalujące są pomocne przy wyliczaniu momentów stopu, momentów dojsca i momentów optymalnych dla problemów związanych ze spektralnie ujemnymi procesami Lévy'ego. Dla procesów zdefiniowanych wzorem (2) zostały wyliczone funkcje skalujące w jawnej postaci.

W rozdziale 2 badany jest dla $T = \infty$ przypadek funkcji wypłaty postaci $G(x) = (K - x)^+$ (zatem mamy do czynienia z amerykańską wieczystą opcją sprzedaży) i θ będącym momentem wyjścia z otwartego przedziału (L, H) , gdzie $L < \ln K < H$. W głównym twierdzeniu rozdziału (twierdzenie 1) przedstawiona jest jawna postać funkcji wartości w języku funkcji skalujących $W^{(r)}$ i $Z^{(r)}$ i pewnej stałej a^* związanej z L, K, H i $Z^{(r)}$. Używając tej stałej został zdefiniowany moment stopu jako pierwszy moment spadku procesu X poniżej bariery a^* i zostało udowodnione, że jest to moment optymalny. Została tu użyta metoda zgadnięcia wyniku i udowodnienia, że ten wynik

jest poprawny. Poprawność została wykazana za pomocą twierdzenia weryfikacyjnego w połączeniu z układem Hamiltona–Jacobiego–Bellmana. Autor umiejętnie połączył metody szukania optymalnych momentów stopu z głębokimi wynikami z teorii spektralnie ujemnych procesów Lévy’ego. Ta mieszanka dała poszukiwaną odpowiedź. Rozdział kończy analiza numeryczna przeprowadzona na przykładzie modelu z ustalonymi parametrami.

Rozdział 3 zajmuje się głównym problemem, gdy wygaśnięcie opcji następuje w momencie, gdy względny spadek ceny aktywów w stosunku do jej historycznego maksimum przekracza ustalony próg. W pierwszym kroku został rozważony model Blacka-Scholesa, a w następnym model ogólny. Rozdział kończy analiza numeryczna.

W rozdziale 4 rozpatrzono problem wieczystej amerykańskiej opcji sprzedaży, która wygasa w momencie ostatniego przejścia procesu ceny instrumentu bazowego przez barierę b , $b > K$. Jak poprzednio rozważono model Blacka-Scholesa, model ogólny i zakończono analizą numeryczną.

W rozdziale 5 została przedstawiona metoda numerycznej wyceny opcji amerykańskich z limitem czasowym przy założeniu $T < \infty$, dla modelu ogólniejszego niż poprzednio, gdyż jest założone, że $(U_k)_k$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie i skończonym drugim momencie. Została przedstawiona modyfikacja metody Monte Carlo zaproponowanej przez Longstaffa i Schwartza. Jak wiadomo metoda Longstaffa i Schwartza jest odporna na wybór modelu, zatem wybór metody do modyfikacji jest wyborem naturalnym i sensownym.

Mam drobne zastrzeżenia do prezentacji wyników. Na przykład Autor oznacza proces S przez S_t , a to jest wartość procesu w chwili t , więc zmienna losowa. Lepiej by było używać S lub (S_t) lub $(S_t)_t$. W rozdziale 3 warto by było dopisać zdanie, kiedy problem jest nietrywialny (zależność x i c).

Z punktu widzenia zastosowań najważniejszy jest skończony horyzont rynku, więc następnym wyzwaniem dla Autora jest uzyskanie wyników dla tego przypadku.

Podsumowanie.

Nowością w tej pracy jest wprowadzenie ograniczenia na termin wykonania opcji amerykańskiej na rynku na którym cena S aktywów bazowych

jest modelowana za pomocą spektralnie ujemnego geometrycznego procesu Lévięgo. Rozwiązanie postawionego w pracy problemu wymagało od mgr. Pawła Stępniaaka dużej biegłości technicznej, korzystania z zaawansowanych metod analitycznych i z różnych technik. Uważam, że Autor wykazał się umiejętnością samodzielnego wykorzystania skomplikowanego aparatu technicznego używanego w matematyce finansowej i w teorii spektralnie ujemnych procesów Levy'ęgo, a także umiejętnością stosowania metod numerycznych. Na końcu chcę podkreślić, że wszystkie drobne uwagi i zastrzeżenia nie wpływają na moją pozytywną ocenę recenzowanej pracy.

Konkluzja

Uważam, że przedstawiona rozprawa spełnia wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim. Praca zawiera ciekawe wyniki. Wnoszę o jej przyjęcie i dopuszczenie magistra Pawła Stępniaaka do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

J. Jakubowski

